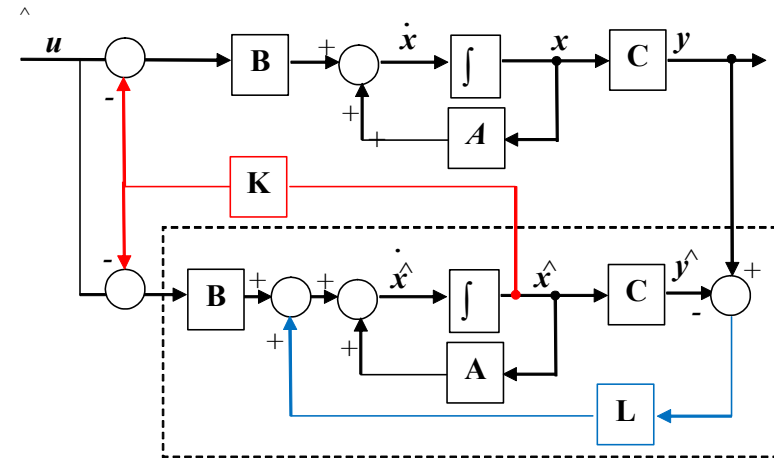
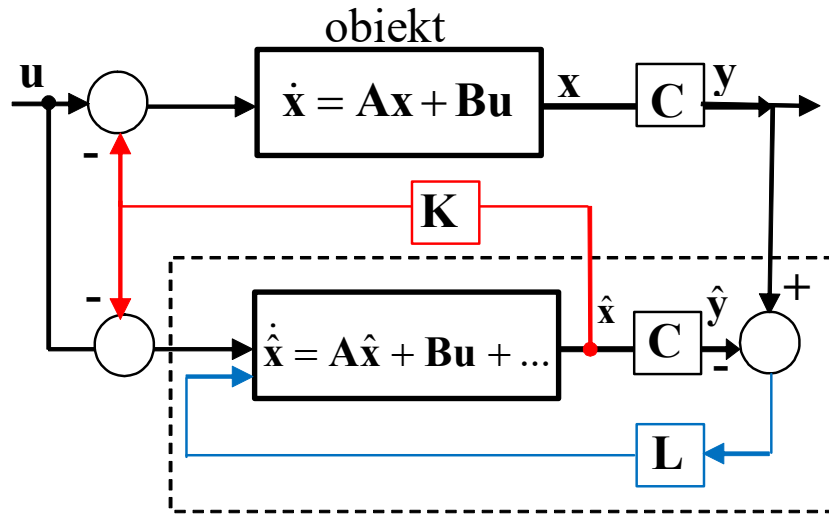


Przykład projektowania



Niezależne etapy projektowania:

Etap 1: Określenie położenie biegunów i opracowanie zasady sterowania (K),
które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego

Etap 2: Opracowanie estymatora (gdy nie wszystkie x są dostępne)

Etap 3: Połączenie zasady sterowania i estymatora

Przykład

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = [K_1 \quad K_2] \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$
$$\mathbf{y} = [1 \quad 0]\mathbf{x}$$

1° Stabilność układu - bieguny układu: $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

$$\begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ -1 & s+4 \end{vmatrix} = (s+1)(s+4) - 2 \quad \rightarrow s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2 \quad \text{System jest stabilny}$$

2° Macierz obserowalności: $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Osobliwość macierzy \mathbf{Q} : $\det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$ System jest obserwowalny

3° Równanie charakterystyczne obserwatora: $\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})) = 0$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] \right) = \begin{vmatrix} s+1+L_1 & -2 \\ -1+L_2 & s+4 \end{vmatrix} = s^2 + (L_1 + 5)s + 4L_1 + 2L_2 - 2$$

4° Lokowanie biegunów – np. $5 \times \operatorname{Re}(s_{1,2}) = -25$

$$(s+25)^2 = s^2 + 50s + 625$$

5° Układ równań (porównanie współczynników):

$$\begin{cases} L_1 + 5 = 50 \\ 4L_1 + 2L_2 + 2 = 625 \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 = 45 \\ L_2 = 221.5 \end{cases}$$

Matlab:
eig(A);
Q = obsv(A, C); det(Q);
L = acker(A', C', [-25, -25]);

(Uwaga zwraca L jako wiersz)

Przykład $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$ $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2]$

$\mathbf{y} = [1 \quad 0] \mathbf{x}$

Bieguny układu: $s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2$

Obserwator: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix} (\mathbf{y} - [1 \quad 0] \hat{\mathbf{x}})$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix} \mathbf{y} - \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix} [1 \quad 0] \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -46 & 2 \\ -220.5 & -4 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 45 \\ 1 & 221.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{y}$$

Bieguny: -25, -25

$$\mathbf{e}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Matlab:

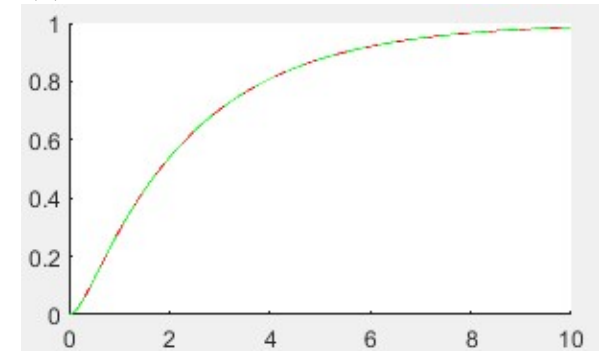
```
eig(A-L*C);           %spr. biegunów
%Porównanie odpowiedzi modelu i obserwatora
modell = ss(A, B, C, 0);
modellO = ss(A-L*C, [B,L'], C, 0);
```

figure, hold on

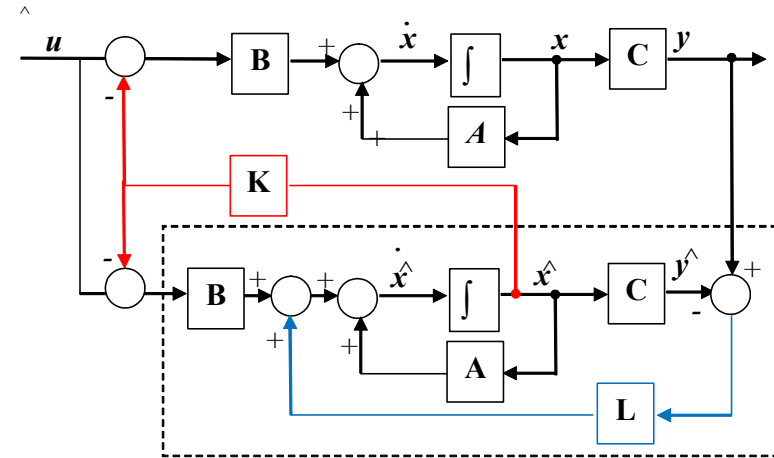
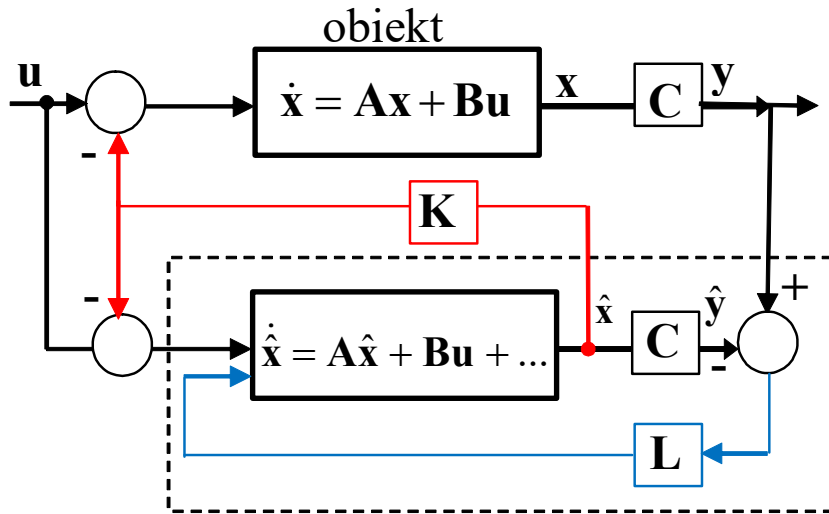
```
t = 0:0.01:10; u = zeros(size(t))+1; x0 = [0, 0]; %przygotowanie do skoku 1(t)
```

```
y1 = lsim(modell, u, t, x0); plot(t, y1, 'r-'); %step(modell);
```

```
y1O = lsim(modellO, [u; y1'], t, x0); plot(t, y1O, 'g--');
```



Sprzężenie od wektora stanu obserwatora



Niezależne etapy projektowania:

- Etap 1:** Określenie położenie biegunów i opracowanie zasady sterowania (\mathbf{K}), które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego
- Etap 2:** Opracowanie estymatora (gdy nie wszystkie \mathbf{x} są dostępne)
- Etap 3:** Połączenie zasady sterowania i estymatora

Przykład $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$ $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2]$
 $\mathbf{y} = [1 \quad 0] \mathbf{x}$ Bieguny układu: $s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2$

6° Macierz sterowalności: $\mathbf{P} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 1 & 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

Osobliwość macierzy \mathbf{P} : $\det P = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$ System jest sterowalny

7° Równanie charakterystyczne układu skorygowanego: $\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = 0$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] \right) = \begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ -1+K_1 & s+4+K_2 \end{vmatrix} = s^2 + (K_2 + 5)s + (K_2 + 4) + 2(K_1 - 1)$$

8° Lokowanie biegunów układu skorygowanego – np. -10, -10 (przyspieszenie reakcji)
 ($s + 10$)² = $s^2 + 20s + 100$ (przesunięcie biegunów s_1, s_2)

9° Układ równań (porównanie współczynników):

$$\begin{cases} K_2 + 5 = 20 \\ K_2 + 4 + 2K_1 - 2 = 100 \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 = 41.5 \\ K_2 = 15 \end{cases}$$

Matlab:
 $P = \text{ctrb}(A, B); \det(P);$
 $K = \text{acker}(A, B, [-10, -10]);$

Przykład

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 41.5 & 15 \end{bmatrix}$$

Bieguny układu: $s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2$

Bieguny układu

skorygowanego: $s_{1,2} = -10$

Układ skorygowany: $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bu}$

Matlab:

```
eig(A-B*K);           %spr. biegunów
```

```
%Porównanie odpowiedzi modelu pierwotnego i skorygowanego
```

```
modell = ss(A, B, C, 0);
```

```
modellK = ss(A-B*K, B, C, 0);
```

```
figure, hold on
```

```
step(modell);
```

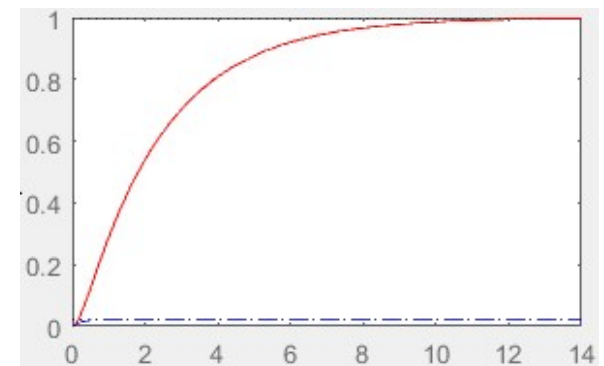
```
step(modellK);
```

```
%alternatywa -----
```

```
t = 0:0.01:10; u = zeros(size(t))+1; x0 = [0, 0]; %przygotowanie do skoku 1(t)
```

```
y1 = lsim(modell, u, t, x0); plot(t, y1, 'r-');
```

```
y1K = lsim(modellK, u, t, x0); plot(t, y1K, 'b--');
```



Stan ustalony:

$$0 = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{Ax} = -\mathbf{Bu}$$

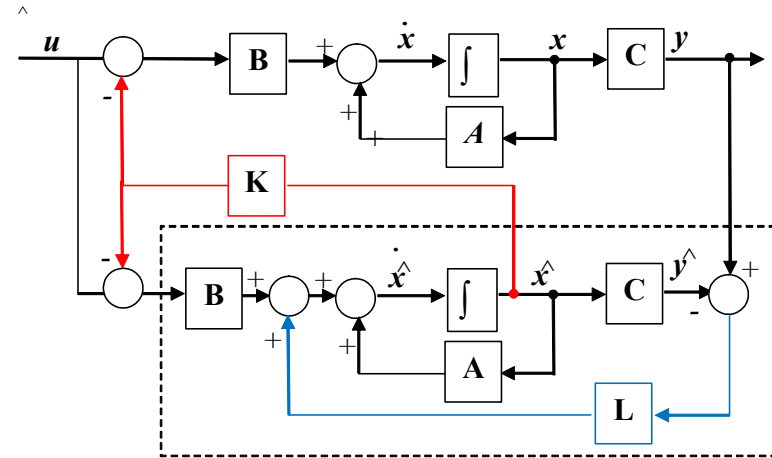
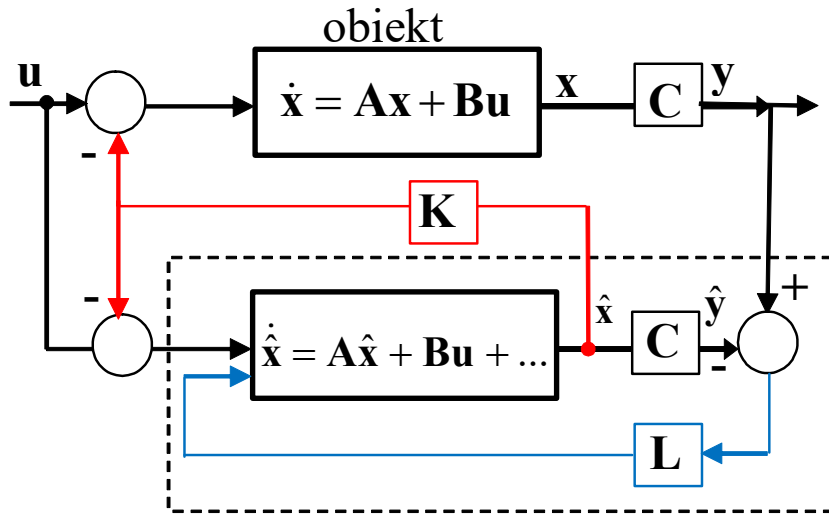
$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}$$

$$0 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{Bu}$$

Sprzężenie od wektora stanu obserwatora



Niezależne etapy projektowania:

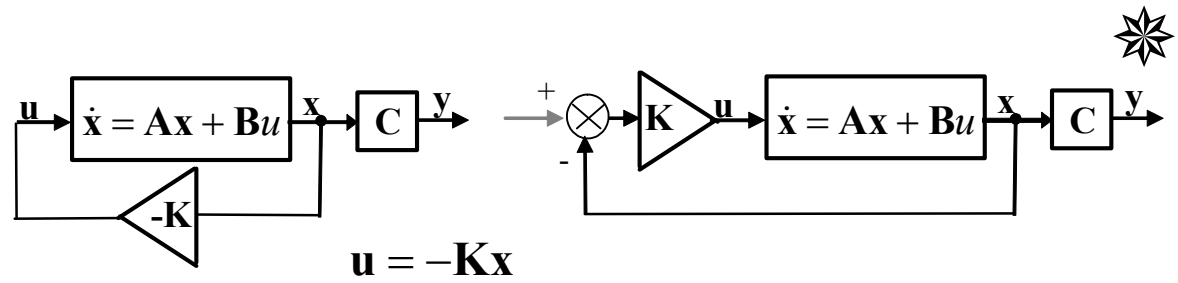
Etap 1: Określenie położenie biegunów i opracowanie zasady sterowania (\mathbf{K}),
które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego

Etap 2: Opracowanie estymatora (gdy nie wszystkie x są dostępne)

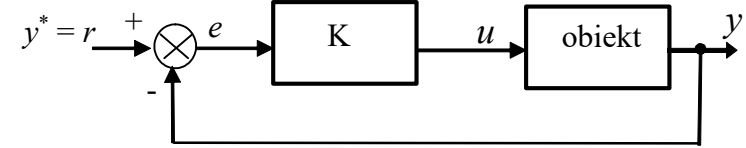
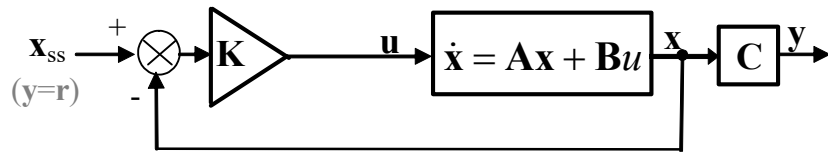
Etap 3: Połączenie zasady sterowania i estymatora

Etap 4: Wprowadzenie wejścia odniesienia

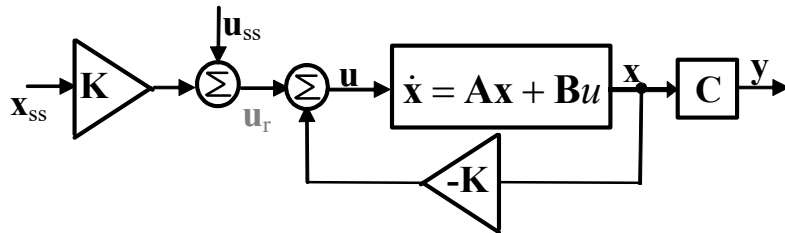
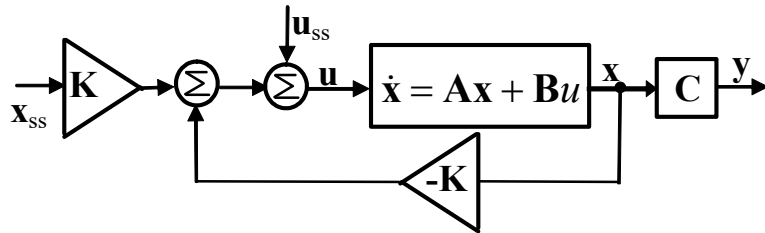
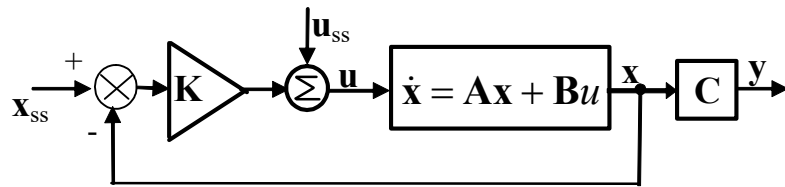
Opracowanie zasady sterowania



Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)



niezerowy uchyb e_{ss}



$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{ss} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{ss}$

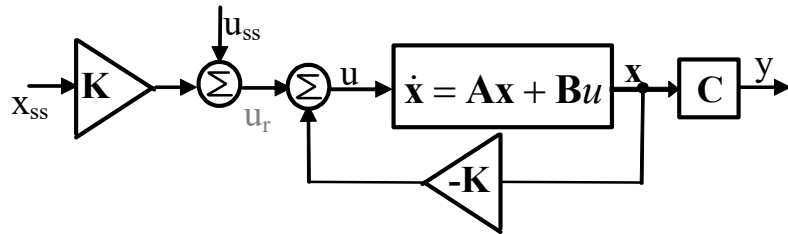
$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{u}_r$

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss})$

gdy $e_{ss} = 0$ ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$) to $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$

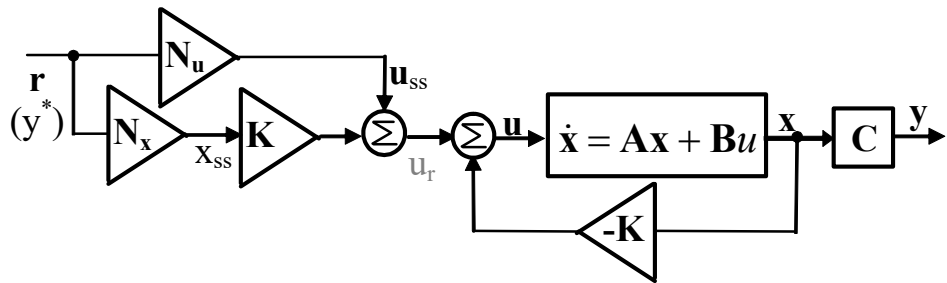


Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss})$$

gdy $e_{ss} = 0$ ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$) to $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{ss}$$

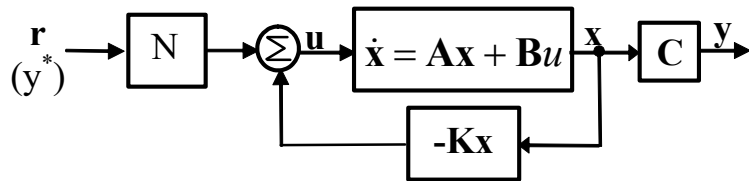
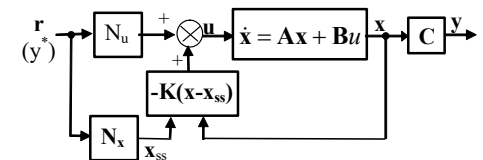
$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$\mathbf{N}_u \mathbf{r} \quad \quad \quad \mathbf{N}_x \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{N}_x \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + (\mathbf{N}_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x) \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{r}$$



(\mathbf{N} - jak przeliczyć w zadane \mathbf{r} na wartości wektora \mathbf{x}_{ss} i \mathbf{u}_{ss})

W stanie ustalonym, gdy $e_{ss} = 0$: $\mathbf{y} = \mathbf{r}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$,

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{y}_{ss} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_{ss} = \mathbf{N}_x \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{N}_u \mathbf{r}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{N}_x + \mathbf{B}\mathbf{N}_u = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{N}_x + \mathbf{D}\mathbf{N}_u = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{N} = \mathbf{N}_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x}$$

Przykład

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 41.5 & 15 \end{bmatrix}$$



Bieguny układu: $s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2$

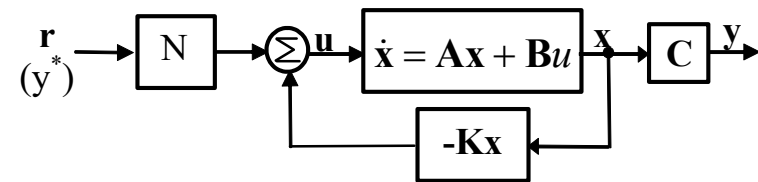
Bieguny układu

skorygowanego: $s_{1,2} = -10$

10° Wprowadzenie wejścia odniesienia:

Na wyjściu obserwujemy zmienną $y = x_1$

$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$



Zmienna y powinna osiągnąć wartość zadaną r

Obliczenie macierzy do przeskalowania wartości zadanej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_u = 1$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_u + \mathbf{K} \mathbf{N}_x$$

$$\mathbf{N} = 1 + \begin{bmatrix} 41.5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 50$$

Matlab:

```
N_1 = [A, B; C, 0];
```

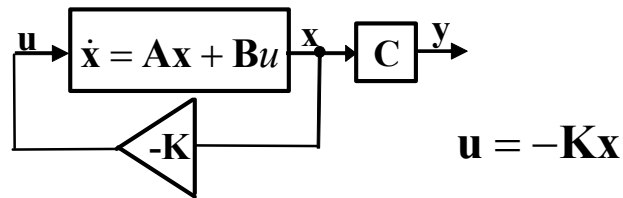
```
N_2 = N_1 ^ (-1) * [0;0;1];
```

```
Nx = N_2(1:2);
```

```
Nu = N_2(3);
```

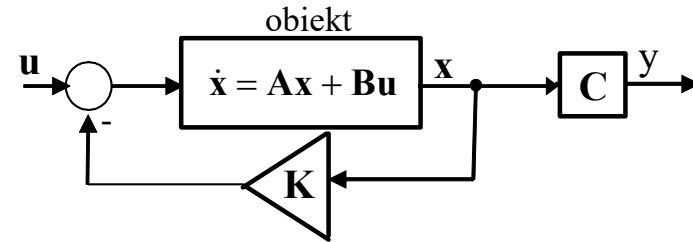
```
N = Nu +K * Nx
```

Sprężenie od wektora stanu

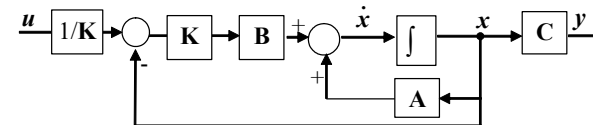
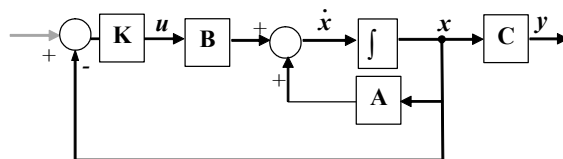
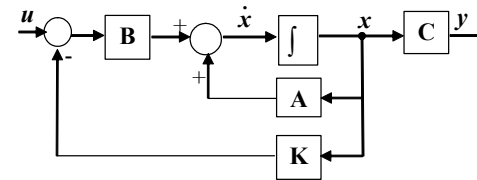
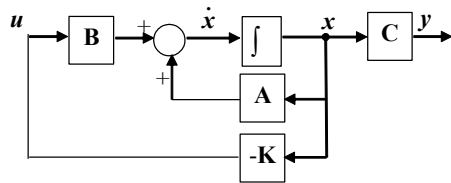
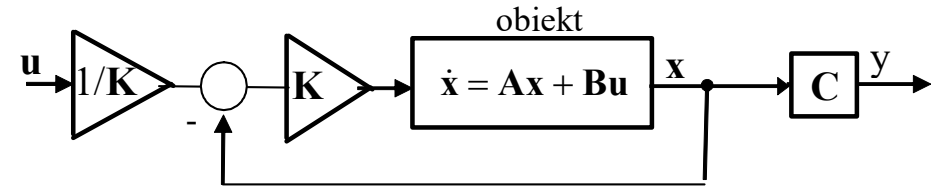
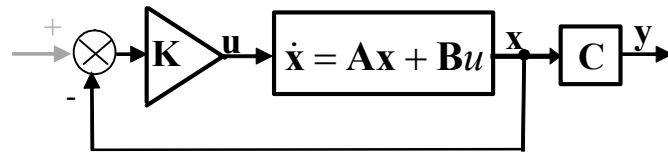


$$u = -Kx$$

$$\dot{x} = (A - BK)x$$



$$\dot{x} = (A - BK)x + Bu$$



$$\dot{x} = Ax + BK(-x + 1/Ku)$$

$$\dot{x} = Ax - BKx + BK \cdot 1/Ku$$

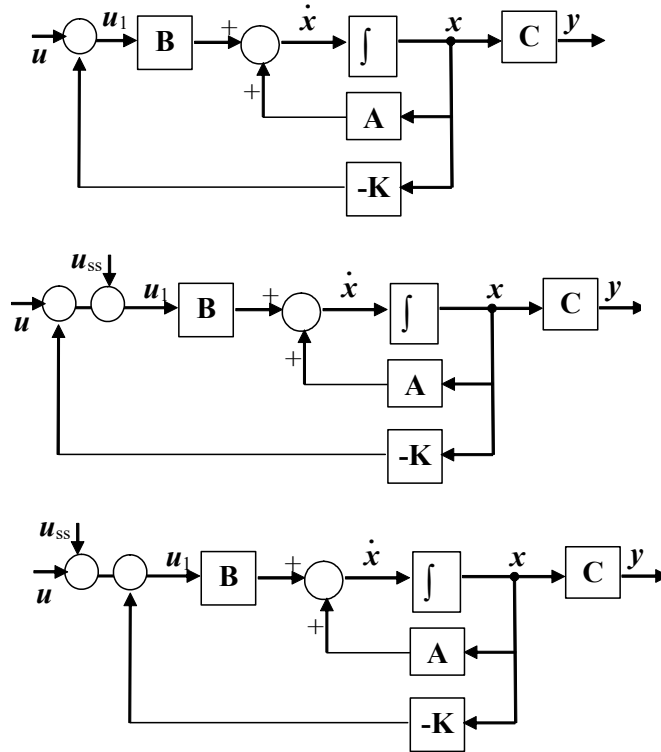
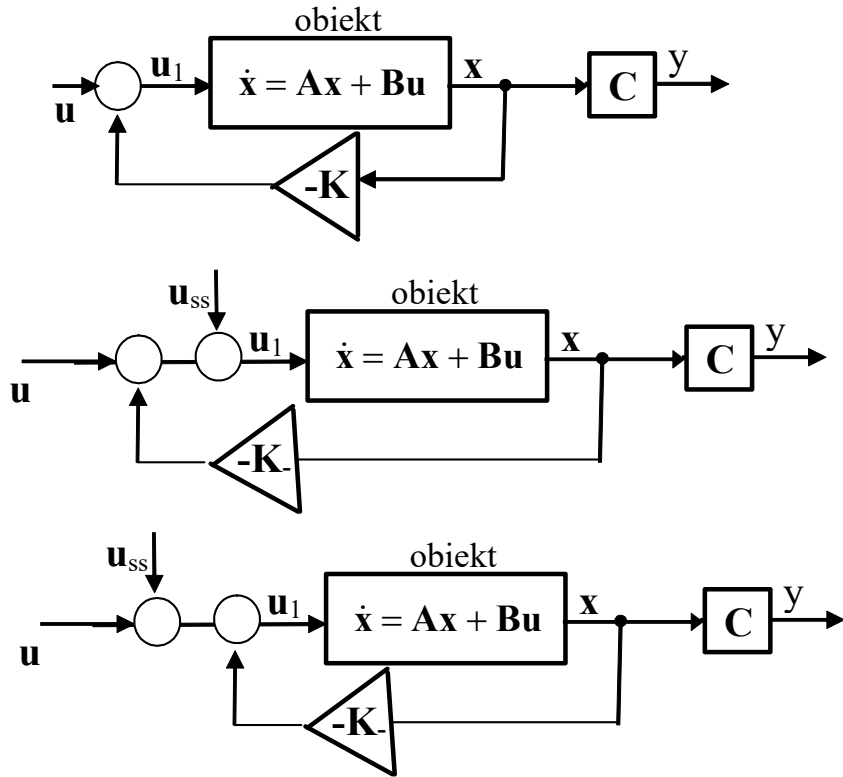
$$\dot{x} = (A - BK)x + Bu$$

$$x = -A^{-1}Bu$$

$$x = -(A - BK)^{-1}Bu$$



Sprężenie od wektora stanu



$$\dot{x} = (A - BK)x + Bu$$

$$u_1 = u - BKx$$

$$x = -(A - BK)^{-1}Bu$$