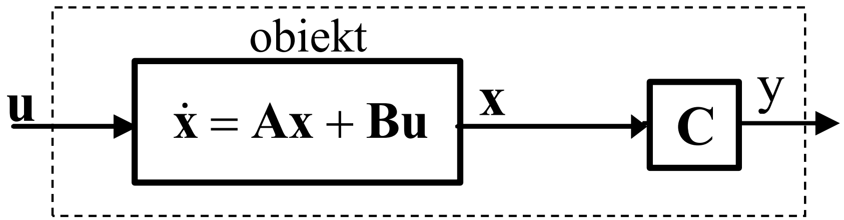
Sterowanie w przestrzeni stanów

(Sterowanie wielowymiarowe)

state-space control design (modern control design)



A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

B. Dostępna część zmiennych stanu

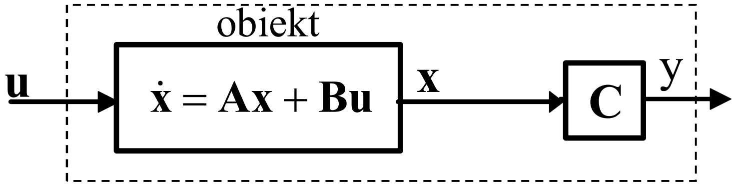
I. Lokowanie biegunów

II. Regulator liniowo-kwadratowy (LQR- Linear-quadratic regulator)

Control Tutorial: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction&section=ControlStateSpace#24

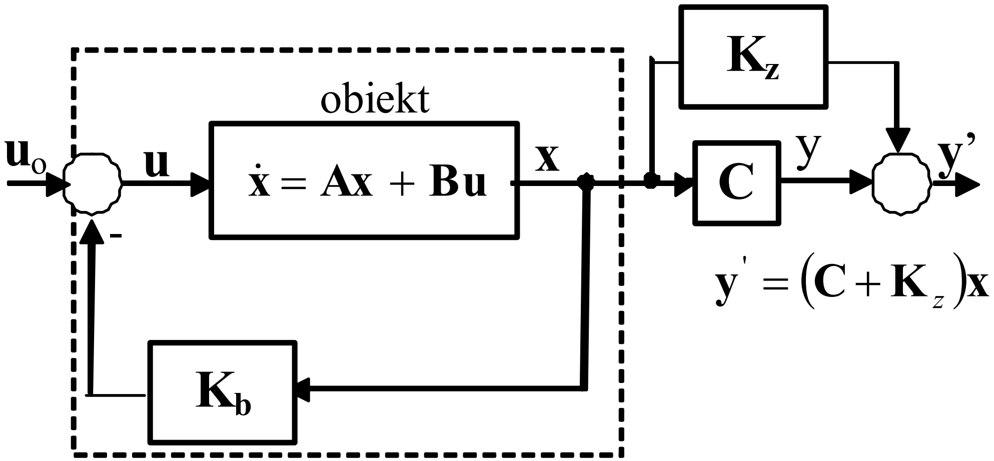
A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}\end{cases} \longrightarrow \begin{cases} s\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}\end{cases}$$



$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

I.A. Dostępne wszystkie zmienne stanu x obiektu



$$\mathbf{y}' = (\mathbf{C} + \mathbf{K}_z)\mathbf{x}$$

układ skorygowany: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}_o$

bieguny układu zamkniętego

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b\mathbf{x}\end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_b)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}_o$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}_o$$

$$\begin{cases}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b\mathbf{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b\mathbf{x}\end{cases}$$

$$\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_o - (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_b\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_b\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_o$$

$$\left(1 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_b\right)\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_o$$

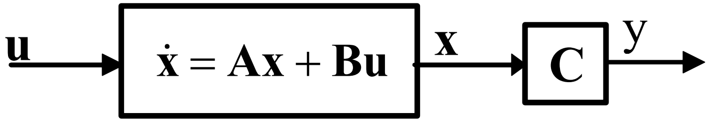
$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C} + \mathbf{K}_z)\frac{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}}{1 + \mathbf{K_b}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}}$$

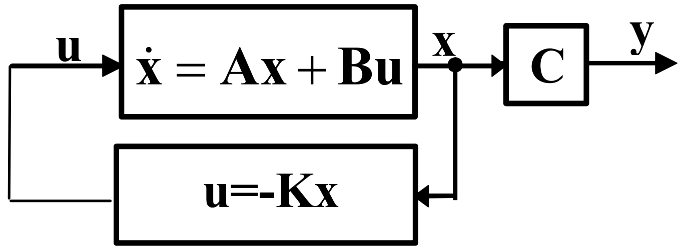
bieguny i zera układu zamkniętego

[Amborski/354-357,381-384]

A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

1) Opracowanie zasady sterowania (macierz K)





obiekt $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{Bu}$ i sterowanie $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx} = \begin{bmatrix} K_1 & \ldots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$

układ zamknięty $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BKx}$

r.charakterystyczne $\det\left(s\mathbf{I} - \left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right)\right) = 0$

- obiekt n-tego rzędu (n biegunów)

- wszystkie elementy **x** są dostępne (mierzone)
- układ zamknięty n-tego rzędu (n biegunów)

1a) Określ położenie biegunów, które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego

Załóżmy bieguny: $s=s_1, \ldots, s=s_n$ $\rightarrow$ r.charakterystyczne: $(s-s_1)\ldots(s-s_n)=0$

(lokowanie biegunów)

1b) Opracuj zasadę sterowania (macierz sprzężeń)

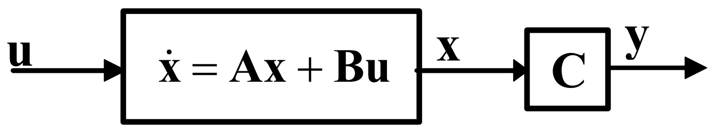
Wyznacz elementy macierzy **K** tak aby oba równania charakterystyczne były takie same

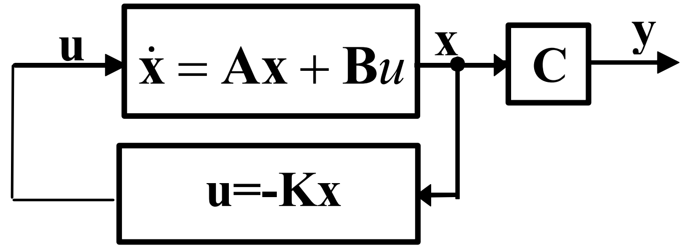
$$\det\left(s\mathbf{I} - \left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right)\right) = 0 \qquad (s-s_1)\ldots(s-s_n)=0$$

[Franklin/462]

A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

Przykład 1.





wahadło o pulsacji ω_0 i tłumieniu ξ=0

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = u$$

$$x = x_1 \qquad = x$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad = \dot{x}$$

$$\dot{x}_2 \qquad = \ddot{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

układ zamknięty $\quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BKx}$

r.charakterystyczne $\quad \det\left(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\right) = 0$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$s^2 + K_2 s + \omega_0^2 + K_1 = 0$$

1a) Bieguny układu zamkniętego - podwójny biegun o wartości $-2\omega_0$

r.charakterystyczne: $(s + 2\omega_0)^2 = 0 \qquad s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2 = 0$

1b) Zasada sterowania (macierz sprzężeń) (Sterowanie modalne - lokowanie biegunów)

$$K_2 = 4\omega_0$$

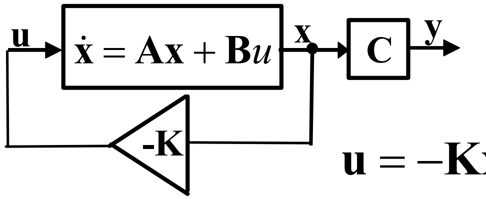
$$\omega_0^2 + K_1 = 4\omega_0^2$$

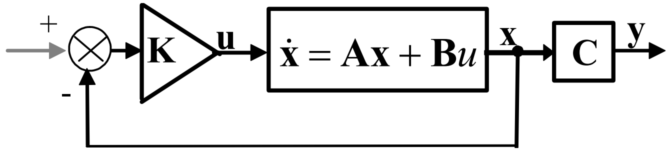
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \end{bmatrix}$$

[Franklin/463n]

A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

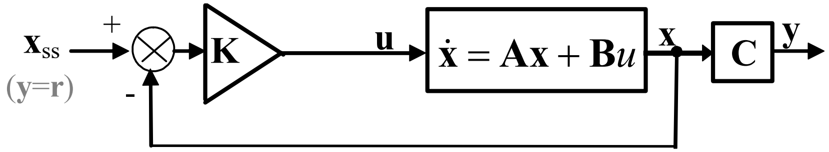
1) Opracowanie zasady sterowania
  a) bieguny układu zamkniętego
  b) zasada sterowania



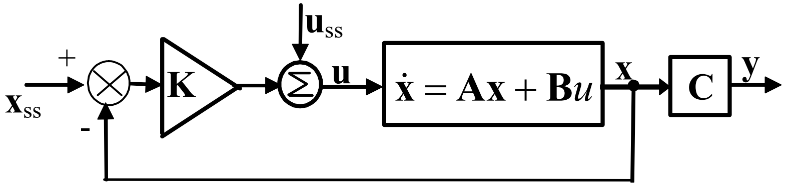


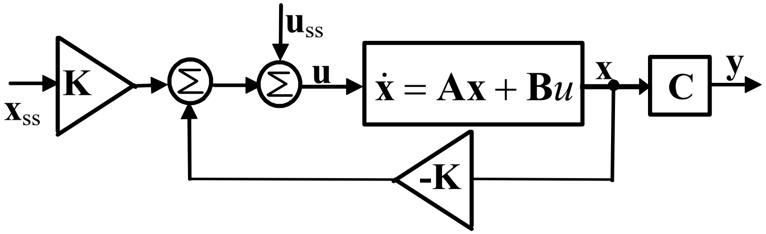
$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

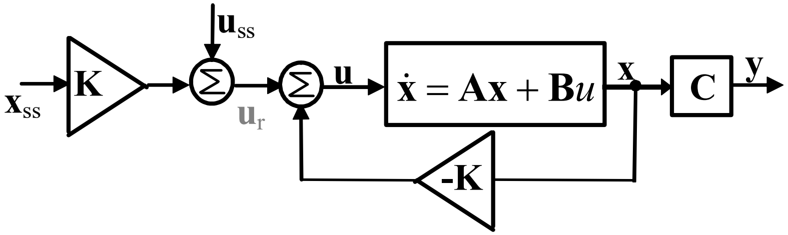
2) Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)



niezerowy uchyb e_{ss}







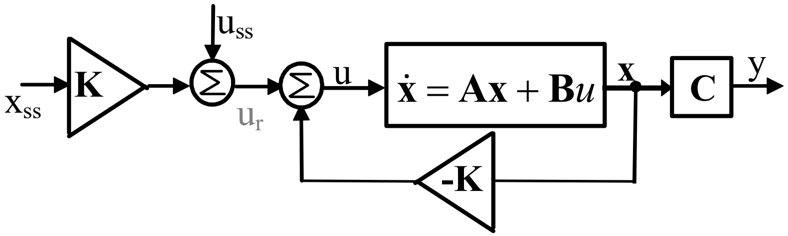
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss}\right)$$

gdy $e_{ss}=0$ ($\mathbf{x}=\mathbf{x}_{ss}$) to $\mathbf{u}=\mathbf{u}_{ss}$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{ss} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{ss} \qquad \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{u}_r$$

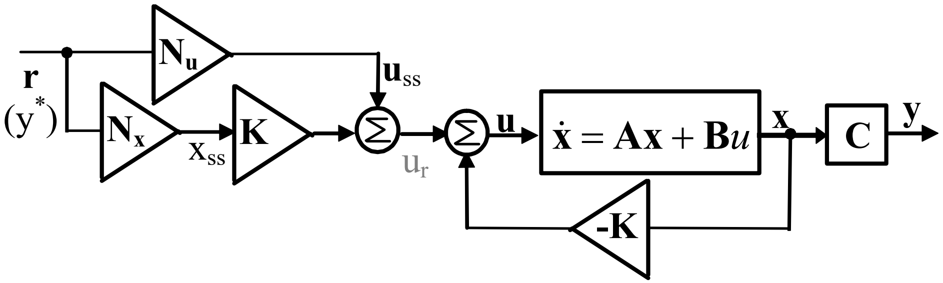
A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

2) Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)



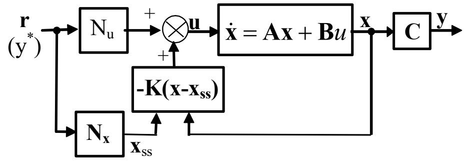
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss})$$

gdy $e_{ss}=0$ ($\mathbf{x}=\mathbf{x}_{ss}$) to $\mathbf{u}=\mathbf{u}_{ss}$

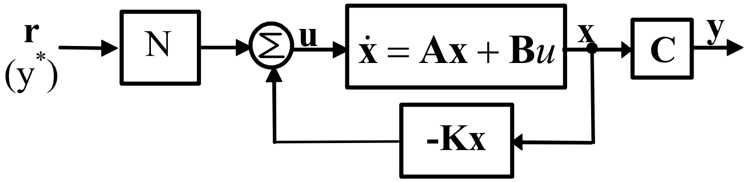


$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{ss}$$

$$\mathbf{u}_{ss} \downarrow \mathbf{N}_\mathrm{u}\mathbf{r} \qquad \mathbf{x}_{ss} \downarrow \mathbf{N}_\mathrm{x}\mathbf{r}$$



$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_\mathrm{u}\mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{N}_\mathrm{x}\mathbf{r}$$



$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + (\mathbf{N}_\mathrm{u} + \mathbf{K}\mathbf{N}_\mathrm{x})\mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{r}$$

(**N** - jak przeliczyć w.zadane **r** na wartości wektora $\mathbf{x}_{ss}$ i $\mathbf{u}_{ss}$)

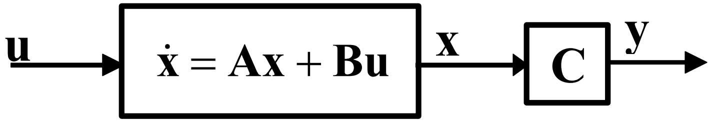
W stanie ustalonym, gdy $e_{ss} = 0$: $\mathbf{y} = \mathbf{r}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$,

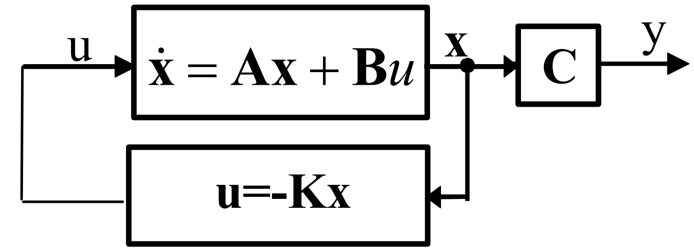
$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{y}_{ss} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{x}_{ss} = \mathbf{N}_\mathrm{x}\mathbf{r} \\ \mathbf{u}_{ss} = \mathbf{N}_\mathrm{u}\mathbf{r} \end{array}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{N}_x + \mathbf{B}\mathbf{N}_u = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{N}_x + \mathbf{D}\mathbf{N}_u = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\mathbf{N} = \mathbf{N}_\mathrm{u} + \mathbf{K}\mathbf{N}_\mathrm{x}}$$

A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

Przykład 1(cd.)





wahadło o pulsacji ω_0 i tłumieniu ξ=0

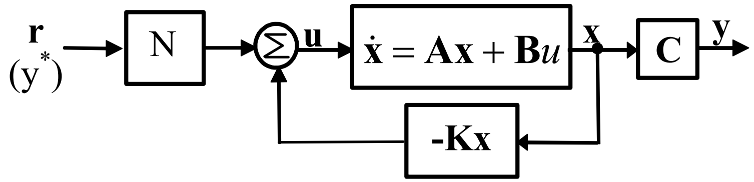
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

1a) Bieguny układu zamkniętego (lokowanie biegunów) - podwójny biegun= $-2\omega_0$

1b) Zasada sterowania (macierz sprzężeń): $\mathbf{K} = \begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\omega_0^2 & 4\omega_0\end{bmatrix}$

2) Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)

Na wyjściu obserwujemy zmienną $y=x_1$



$$\begin{bmatrix}y_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u$$

Zmienna y powinna osiągnąć w.zadaną r

Obliczenie macierzy do przeskalowania w.zadanej:

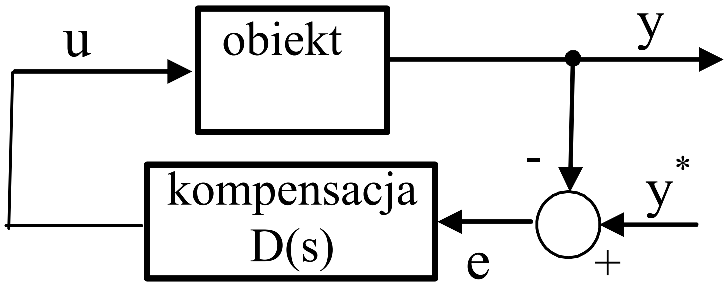
$$\begin{bmatrix}\mathbf{N}_x\\ \mathbf{N}_u\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{N}_x\\ \mathbf{N}_u\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\omega_0^2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\omega_0=1]{\text{Dla}} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

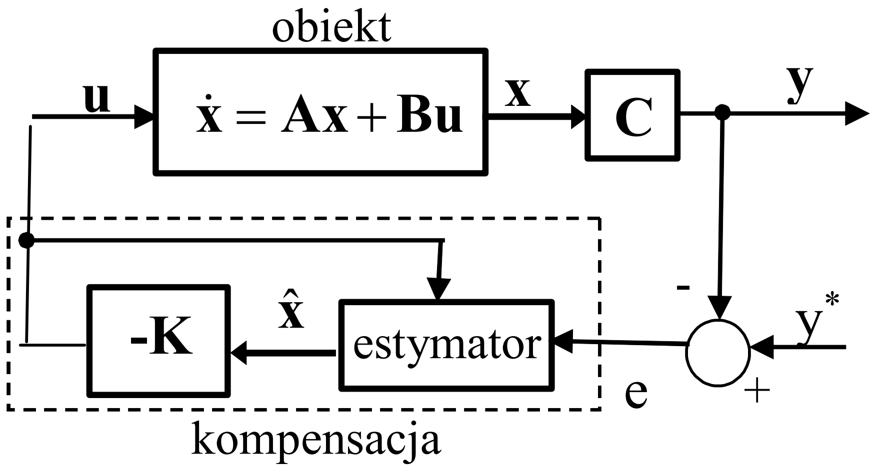
$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ \mathbf{N}_u = 1$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x = 4$$

[Franklin/471]

B. Dostępna część zmiennych stanu





Cztery niezależne etapy:

Etap 1: Określenie położenie biegunów i opracowanie zasady sterowania, które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego

Etap 2: Opracowanie estymatora (gdy nie wszystkie *x* są dostępne)

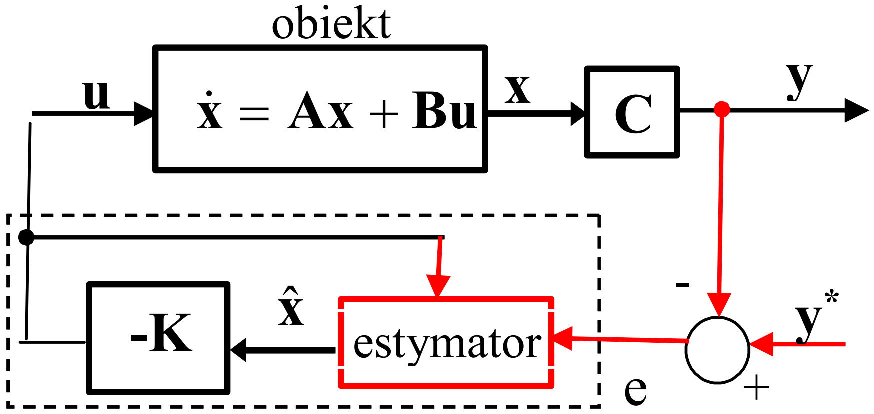
Etap 3: Połączenie zasady sterowania i estymatora

Etap 4: Wprowadzenie wejścia odniesienia

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu}$ -> oznaczenia wg [Franklin] $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Gu}$

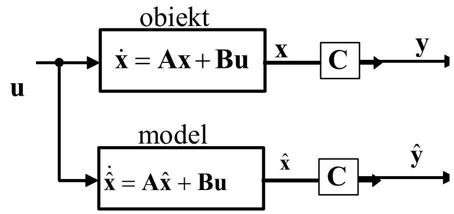
[Franklin/461]

Obserwator (estymator)



1° Konstrukcja estymatora ($\hat{\mathbf{x}}$) na podstawie modelu obiektu

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu}$, gdzie macierze **A**, **B** i wejścia **u** są znane



- Odtwarzamy estymaty w układzie otwartym
- Jednak nie znamy poprawnych w.początkowych **x**(0)

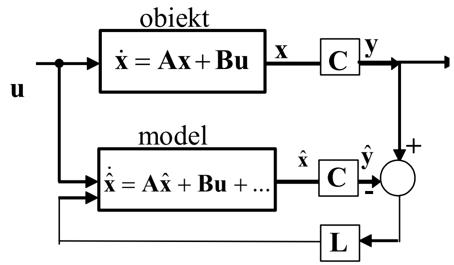
Niedokładne oszacowanie x(0) -> błąd oszacowania stale rośnie lub zbyt wolno zanika (nie mamy wpływu na szybkość tego zanikania)

Rozwiązanie problemu – użyć sprzężenia zwrotnego

2° jw. + sprzężenie zwrotne (obserwator Luenbergera)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

gdzie **L**=[l_1, …, l_n]^T wektor współczynników

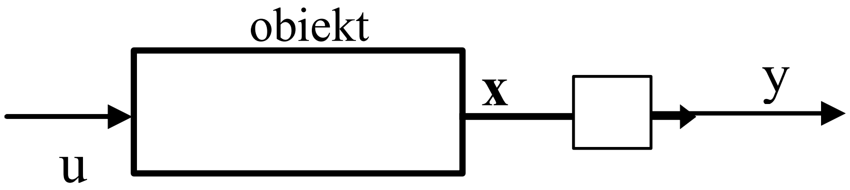


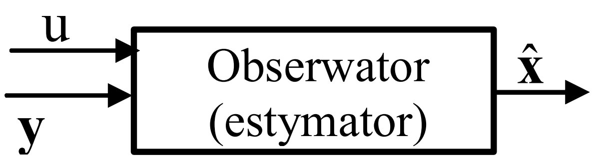
Obserwator (estymator) stanu – model, który na podstawie pomiaru we (**u**) i wy (**y**) dostarcza estymaty ($\hat{\mathbf{x}}$) wewnętrznego stanu układu (**x**)

[Franklin/484]

Obserwator (estymator) - obserwator Luenbergera

Wersja dyskretna





Typowy estymator

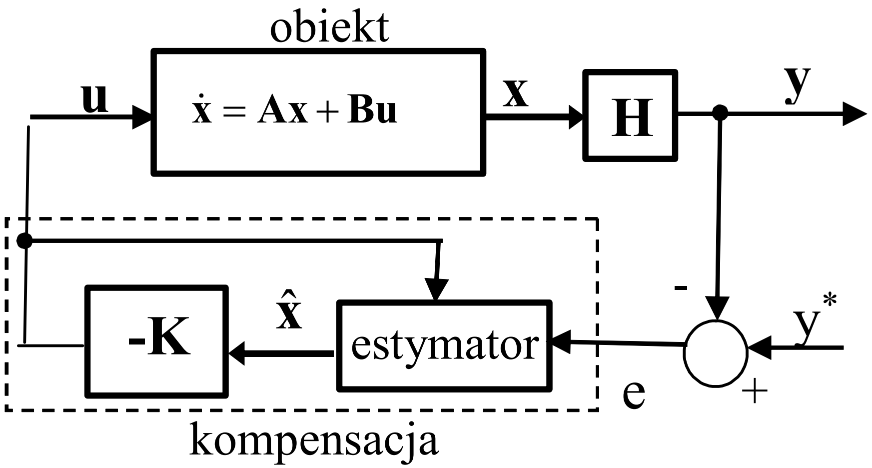
$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Obserwator Luenbergera

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + L\left|\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)\right| + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Część korekcyjna L (poprawa zbieżność)

L - macierz wzmocnienia błędu zbieżności.



$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + L\left|\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)\right| + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

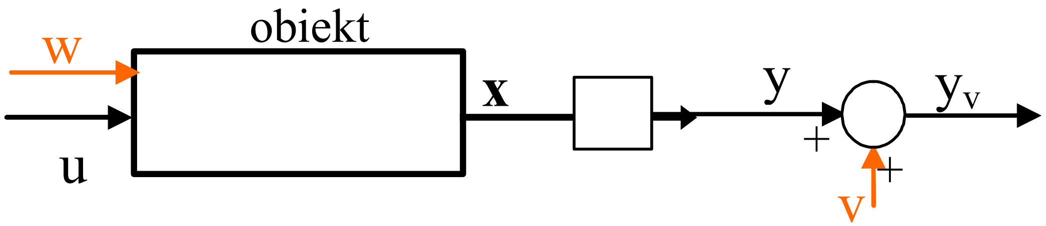
$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + L\left|\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)\right| + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

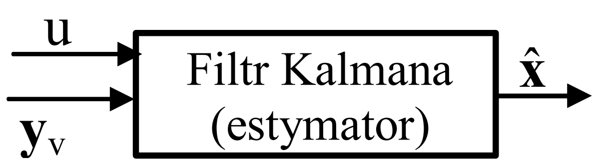
Obserwator (estymator) - filtr Kalmana

3° Rekurencyjne wyznaczanie estymaty (filtr Kalmana)

Odtworzenie zmiennych stanu w warunkach występowania zakłóceń

Założenie: pomiar i proces przetwarzania obarczone błędem o rozkładzie gaussowskim





$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{G}\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}_v = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}\mathbf{w}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases}$$

Macierze kowariancji zakłóceń:

$E(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) = \mathbf{Q}_n$ — $\mathbf{Q}_n$ - miara poziomu zakłóceń działających na obiekt (miara niepewności obiektu)

$E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \mathbf{R}_n$ — $\mathbf{R}_n$ - miara poziomu zakłóceń działających na czujniki pomiarowe

$E(\mathbf{w}\mathbf{v}^T) = \mathbf{N}_n$

Dla zadanych macierzy kowariancji zakłóceń ($\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{R}_n$, $\mathbf{N}_n$)
filtr Kalmana minimalizuje kowariancję błędów estymacji w stanie ustalonym

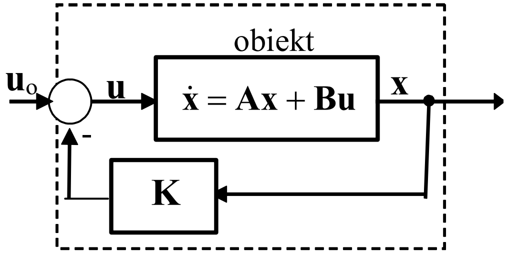
$$\lim_{t\to\infty} E\left((x-\hat{x})(x-\hat{x})^T\right)$$

(estymator optymalny)

A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

LQR **Regulator liniowo-kwadratowy** (LQR - Linear-Quadratic-Regulator)

1. Model układu: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$



2. Cel - minimalizowanie funkcji kosztów J:

Minimalizowana funkcja kosztów (miara jakości) ma postać funkcjonału kwadratowego:

ze skończonym horyzontem czasowym	z nieskończonym horyzontem czasowym
$J = x^T(t_1)F(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u)\, dt$	$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\, dt$

gdzie: Q i R - macierze wag (parametry funkcji kosztów podane przez inżyniera)

3. Opracowanie zasady sterowania - sterowanie minimalizujące koszt: $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$

- macierz sterowań $\mathbf{K}$ jest dana równaniem:

$K = R^{-1}B^T P(t)$	$K = R^{-1}B^T P$
P(t) wynika z rozwiązania równania różniczkowego Riccatiego	
$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = -\dot{P}(t)$ z warunkiem brzegowym $P(t_1) = F(t_1)$	$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$

Algorytm LQR - zautomatyzowana metoda znajdowania nastaw, które minimalizują funkcję kosztów.

Zaleta: zautomatyzowana metoda doboru nastaw - zapewnia stabilność i optymalność
Wada: wymaga podania wag i sprawdzenia efektów (iteracyjnie)
(alternatywna metoda lokalizacji biegunów bardziej intuicyjnie pokazuje związek z własnościami dynamiki układu regulacji)

[Franklin/475]

A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

LQR Wersja dyskretna

1. Model układu: $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$

2. Cel - minimalizowanie funkcji kosztów J:

Minimalizowana funkcja kosztów:

ze skończonym horyzontem czasowym	z nieskończonym horyzontem czasowym
$J = \sum_{k=0}^{N} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k\right)$	$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k\right)$

w notacji zwyczajowej zapisywana jako

$J = \sum_{k=0}^{N} \left(\lVert \mathbf{x_k} \rVert_Q^2 + \lVert \mathbf{u_k} \rVert_R^2\right)$	

gdzie : $\lVert \mathbf{x_k} \rVert_Q^2 = x_k^T Q x_k$ $\lVert \mathbf{u_k} \rVert_R^2 = u_k^T R u_k$

3. Opracowanie zasady sterowania – sekwencja sterująca minimalizująca koszt: $\mathbf{u}_k = -\mathbf{F}_k\ \mathbf{x}_{k-1}$ gdzie:

$F_k = (R + B^T P_k B)^{-1} B^T P_k A,$	$F = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$

P(t) można znaleźć poprzez iterację wstecz w czasie z wykorzystaniem dynamicznego równania Riccatiego

$P_{k-1} = Q + A^T \left(P_k - P_k B (R + B^T P_k B)^{-1} B^T P_k\right) A$ z warunkiem początkowym $P_N = Q$	$P = Q + A^T \left(P - PB(R + B^T P B)^{-1} B^T P\right) A$

LQR

LQR a lokowanie biegunów - przykład

Najprostsza wersja LQR

1. Minimalizowany system: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ z = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} \end{cases}$

2. Funkcja kosztów postaci: $J = \int_0^{\infty} \left[\rho\, z^2(t) + u^2(t) \right] dt$

gdzie ρ współczynnik wagowy wybierany przez projektanta

3. Opracowanie zasady sterowania – sterowanie minimalizujące koszt: $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$
Optymalne rozwiązanie = macierz sterowań **K**, która zapewnia
symetryczne położenie pierwiastków równania: (SRL – Symmetric Root Locus)

$$1 + \rho G_o(-s) G_o(s) = 0$$

gdzie G_o to transmitancja układu otwartego: $G_o(s) = \dfrac{z(s)}{u(s)} = \mathbf{C}_1 \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B} = \dfrac{L(s)}{M(s)}$

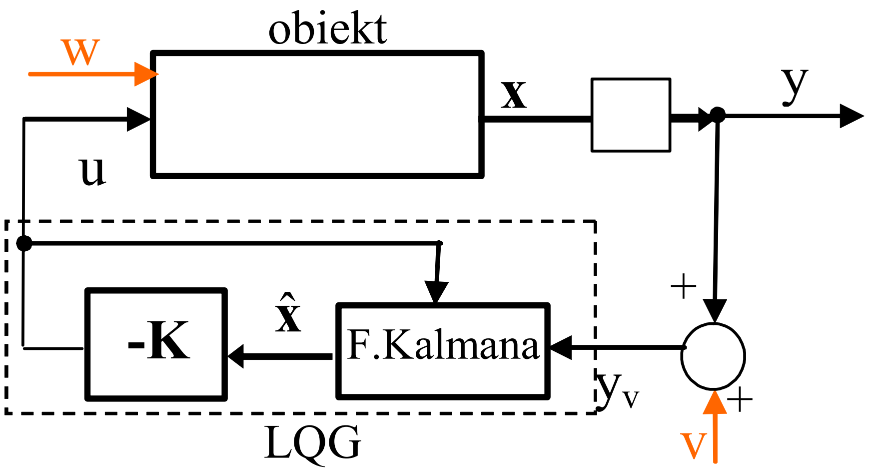
cd [Franklin/475n]

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ -> oznaczenia wg [Franklin] $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{u}$

B. Dostępna część zmiennych stanu

LQG

Regulator liniowo-kwadratowy-Gaussa (LQG - Linear-Quadratic-Gaussian)



w – biały szum działający na wejściu obiektu
v – biały szum działający na wyjściu procesu

LQG dotyczy:

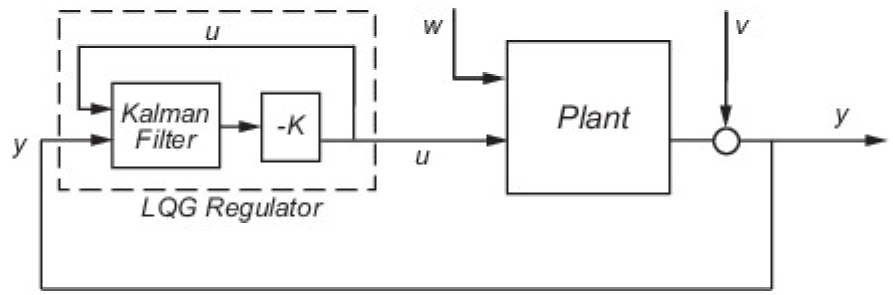
- systemów liniowych
- działających w warunkach niepewności, narażonych na zakłócenia addytywnym białym szumem Gaussa,
- posiadających niekompletne informacje o stanie (nie wszystkie zmienne stanu są dostępne)
- poddanych optymalizacji z wykorzystaniem kwadratowej funkcji kosztów:
  - najczęściej suma pomierzonych odchyłek od wartości zadanych (minimalizacja niepożądanych odchyłek pomiarów)
  - czasami też wielkości związane z działaniem sterującym - minimalizacja zużytej energii

LQG = Filtr Kalmana + Regulator liniowo-kwadratowy (LQR)

B. Dostępna część zmiennych stanu

LQG

Przykład (Matlab)



- ***w*** – zakłócenia działające na obiekt (Plant)
- ***u*** – sterowanie
- ***y*** – pomiar
- ***v*** – szumy pomiarowe

Równania stanu i zmiennych wyjściowych (pomiarowych):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Gw}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + \mathbf{Hw} + \mathbf{v}$$

Definicja modelu za pomocą funkcji ss()
Wejścia ***w*** i ***v*** – biały szum

Funkcja kosztów

Etap 1. Opracowanie zasady sterowania – sterowanie minimalizujące koszt (LQ-optimal gain)
Etap 2. Opracowanie estymatora – konstrukcja filtru Kalmana
Etap 3. Połączenie zasady sterowania i estymatora – regulator LQG

Technika projektowania

szybka, jednoetapowa, gdy:
- optymalny regulator LQG oraz niezerowe E(wv') i H
- wszystkie wejścia są sterujące,
- wszystkie wyjścia są mierzone
- stany integratora są ważone niezależnie od stanu obiektu i zmiennych sterujących

Rozwiązanie – funkcja **lqg**

bardziej elastyczna, 3-etapowa, gdy:
- arbitralne G i H
- są wejścia, które nie są sterowaniem,
- są wyjścia, które nie są mierzone,
- elastyczny system wag dla integratora, zmiennych stanu i sterowań

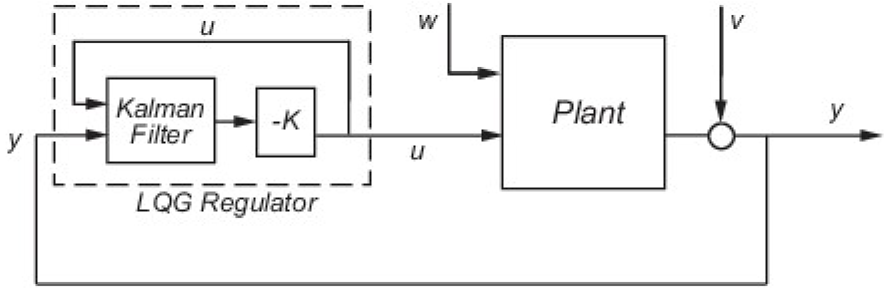
Rozwiązanie – funkcje **lqr**, **kalman**, **lqgreg**

https://www.mathworks.com/help/control/getstart/linear-quadratic-gaussian-lqg-design.html

B. Dostępna część zmiennych stanu

Przykład (Matlab)

LQG



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Gw}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + \mathbf{Hw} + \mathbf{v}$$

- ***w*** – zakłócenia działające na obiekt (Plant)
- ***u*** – sterowanie
- ***y*** – pomiar
- ***v*** – szumy pomiarowe

Etap 1. Opracowanie zasady sterowania – sterowanie minimalizujące koszt (LQ-optimal gain)

Funkcja kosztu $J = \int_0^\infty \left[x^T Q x + 2x^T N u + u^T R u\right] dt$

gdzie: Q, R, N – macierze wag – definiują kompromis między wydajnością regulacji (jak szybko x(t) spada do zera) a „wysiłkiem" sterowania

K = lqr(A, B, Q, R, N), gdzie: A, B – macierze równań stanu, Q, R, N – macierze wag

Etap 2. Opracowanie estymatora – konstrukcja filtru Kalmana

[kest, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)

gdzie: sys = ss(A, B,C,D)

Qn, Rn, Nn – macierze kowariancji zakłóceń (s.11)

$$E(\mathbf{ww}^T) = \mathbf{Q}_n, \quad E(\mathbf{vv}^T) = \mathbf{R}_n, \quad E(\mathbf{wv}^T) = \mathbf{N}_n$$

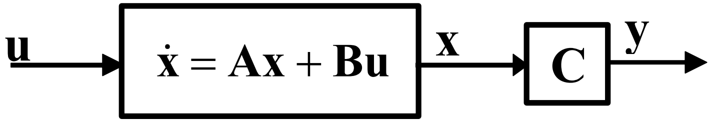
Etap 3. Połączenie zasady sterowania i estymatora – regulator LQG

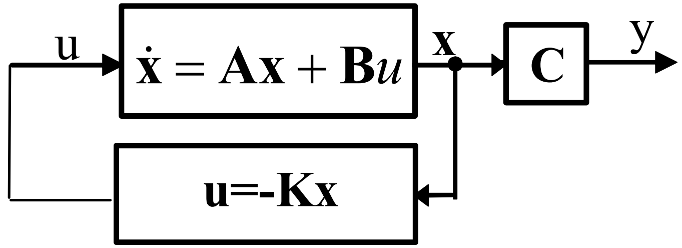
regulator = lqgreg(kest, K)

https://www.mathworks.com/help/control/getstart/linear-quadratic-gaussian-lqg-design.html

Warunek zastosowania sterowania od stanu

System musi spełniać warunek sterowalności





System jest sterowalny ⇔ rząd macierzy sterowalności **S** jest równy rzędowi systemu n

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

Przykład 1(cd.)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad \mathbf{S}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ \mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}\end{array}$$

Przykład 2 (niesterowalny)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad \mathbf{S}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ \mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}\end{array}$$

Jeżeli system jest sterowalny, to stosując sprzężenie od stanu można ulokować bieguny w dowolnym miejscu na płaszczyźnie zespolonej

Warunek realizacji obserwatora (estymatora)

System musi spełniać warunek obserwowalności

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

Obserwator Luenbergera

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

gdzie $\mathbf{L}=[l_1, \ldots, l_n]^T$ wektor współczynników

Błąd obserwatora $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$

Równanie błędu odtworzenia stanu $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \longrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}$

Błąd obserwatora ma dążyć do zera przy dowolnych warunkach początkowych

System jest obserwowalny $\Leftrightarrow$ rząd macierzy obserwowalności **O** jest równy rzędowi systemu n

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \ldots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Jeżeli system jest obserwowalny, to dobierając odpowiednio macierz **L** można ulokować wartości własne macierzy **A-LC** w dowolnym miejscu na płaszczyźnie zespolonej

Optymalizacja

Optymalizacja matematyczna

Optymalizacja statyczna

Poszukiwanie lokalnego/globalnego extremum funkcji celu

- Programowanie liniowe
  Funkcja celu liniowa, ograniczenia liniowe
- Programowanie nieliniowe
  Funkcja celu dowolna, ograniczenia dowolne

Optymalizacja dynamiczna

Poszukiwanie extremum funkcjonału
(ciągu decyzji, które zapewni ekstremum wskaźnika jakości)

- Sterowanie optymalne
  Poszukiwanie sterowania, które zapewnia optymalizację funkcjonału kosztów
  Funkcjonał kosztów = funkcja stanu i zmiennych sterujących
- Rachunek wariacyjny
- Programowanie dynamiczne
- ….

Metody sterowania optymalnego gwarantujące stabilność układów zamkniętych:
– sterowanie liniowo-kwadratowe-Gaussa (LQG)
– sterowanie predykcyjne (MPC) – sterowanie optymalne jest środkiem do uzyskania sterowania optymalnego (nie jest optymalizacją kryterium sterowania układu zamkniętego)
– sterowanie odporne z normą H-nieskończoność

Wyprowadzenie sterowania optymalnego na podstawie:
- zasady maksimum Pontragina
- rozwinięcia równania HJB (Hamiltona-Jacobiego-Bellmana)