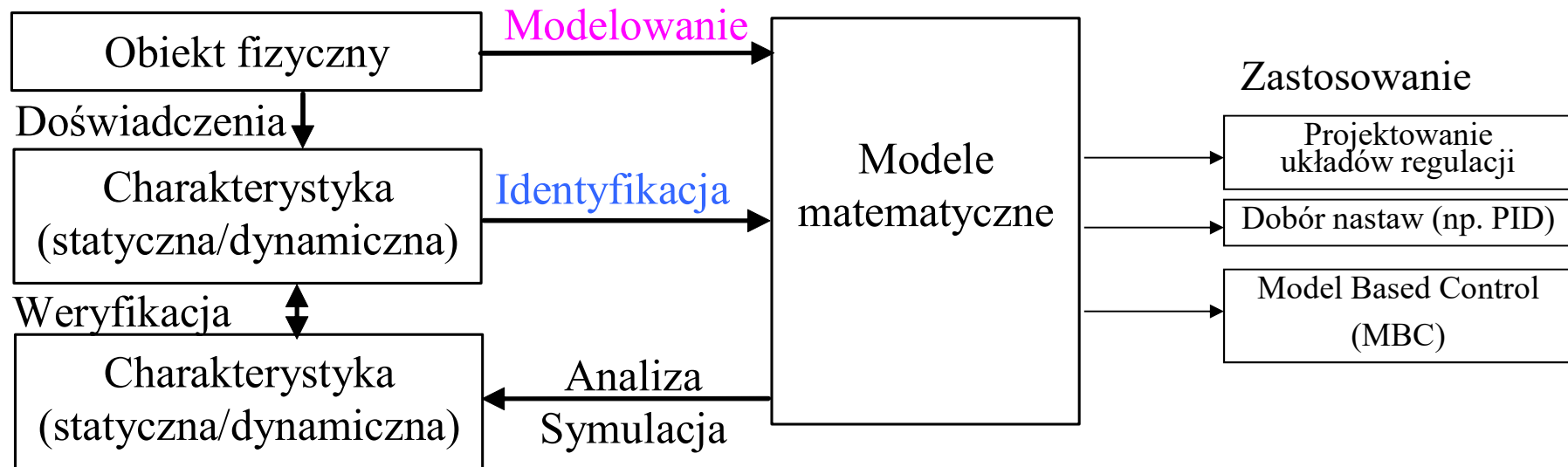
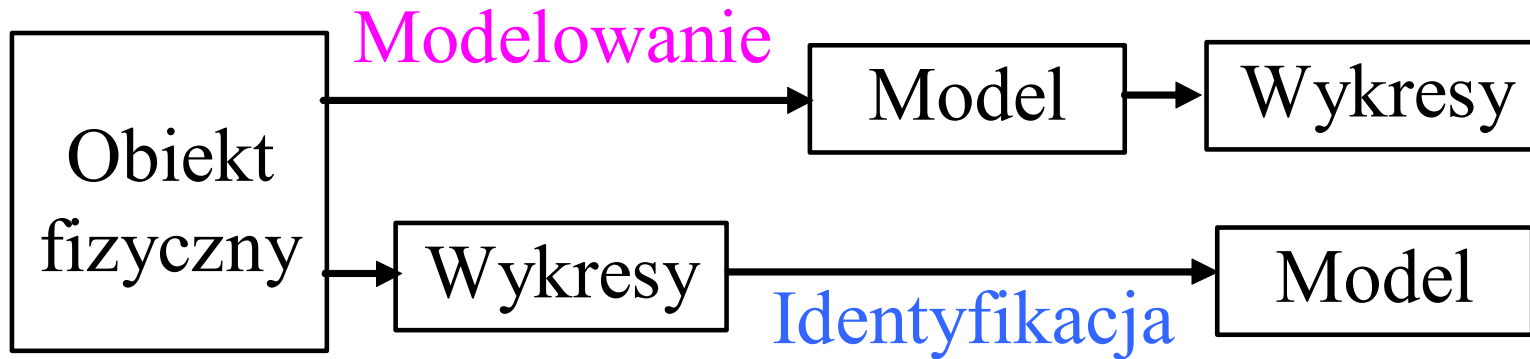


# Skąd model?

## Modelowanie i identyfikacja

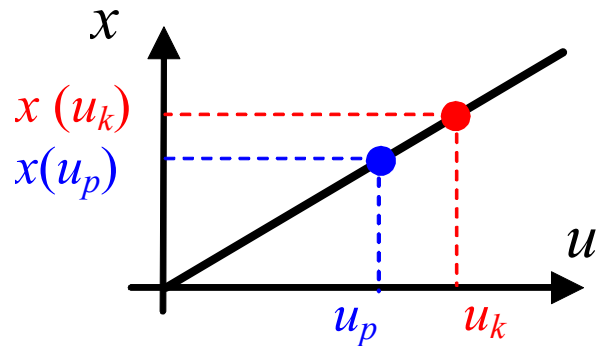


# Jaki model?

## Opis (model) statyczny i dynamiczny

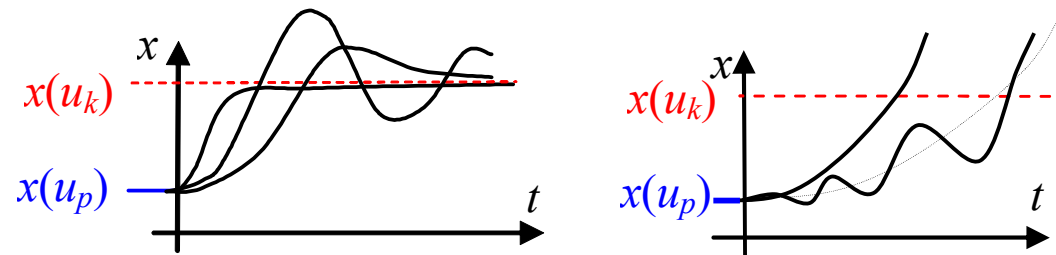
### Opis (model) „stacyjny”

Charakterystyki statyczne

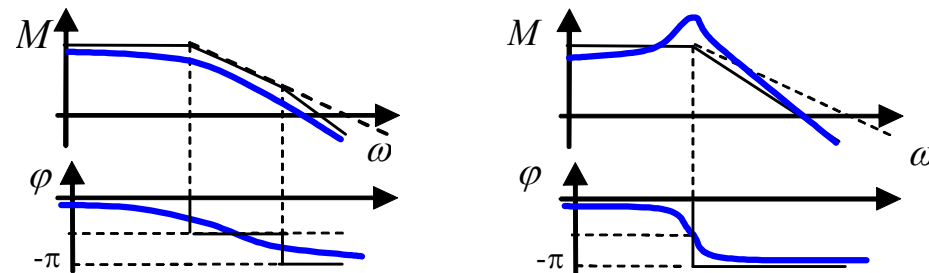


### Opis (model) „dynamiczny”

Odpowiedź skokowa (impulsowa)



Odpowiedź częstotliwościowa



Portrety fazowe

Równania algebraiczne

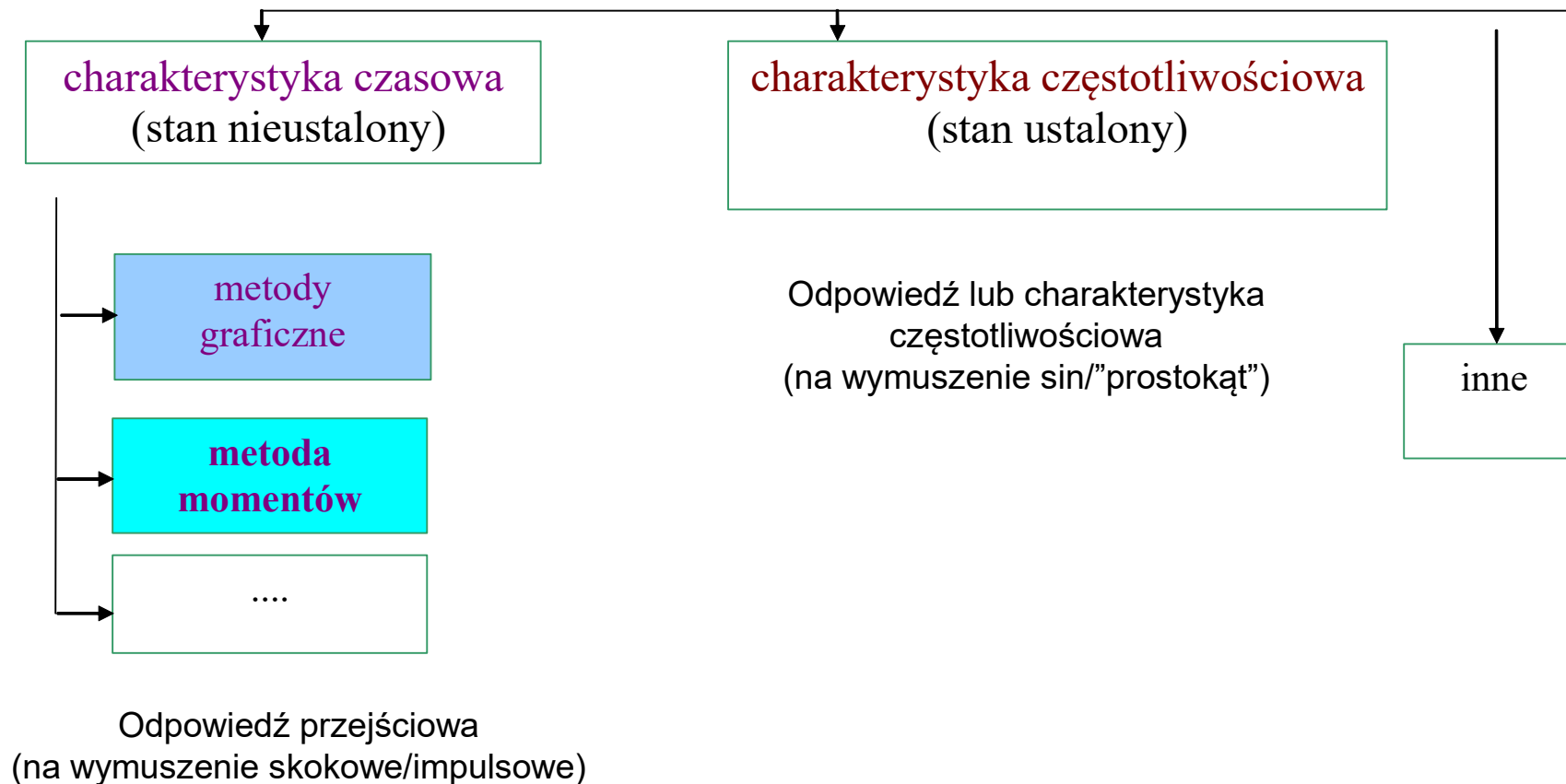
Równania różniczkowe

Transmitancje

## Identyfikacja (eksperymentalna)

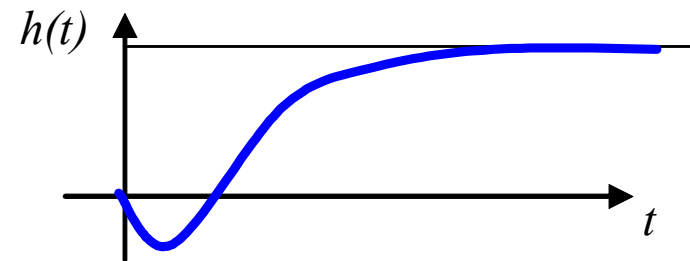
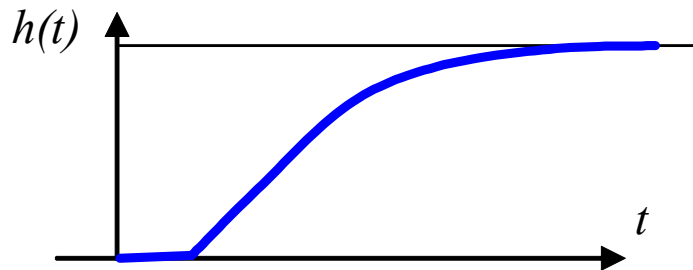
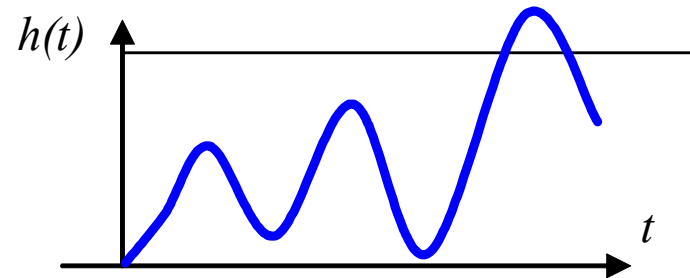
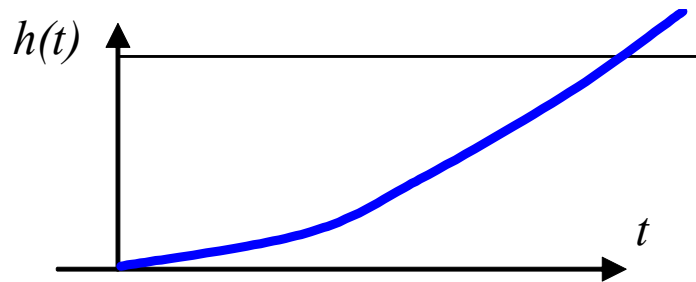
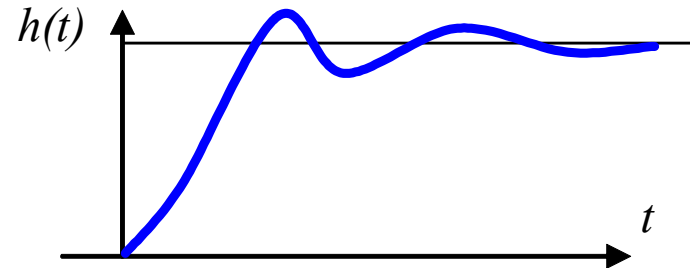
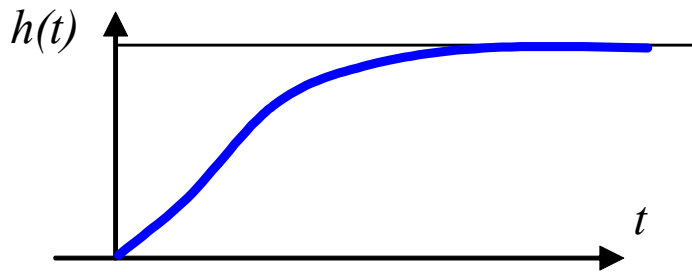
Identyfikacja (w automatyce):

- „rozpoznawanie” własności statycznych i dynamicznych obiektów/układów
- wyznaczenie zależności pomiędzy wejściem a wyjściem na podstawie danych doświadczalnych
- dobór parametrów modelu w taki sposób aby reakcje modelu pasowały do danych doświadczalnych



**Modele linowe, stabilne**

## Metody graficzne (reakcja na 1(t))

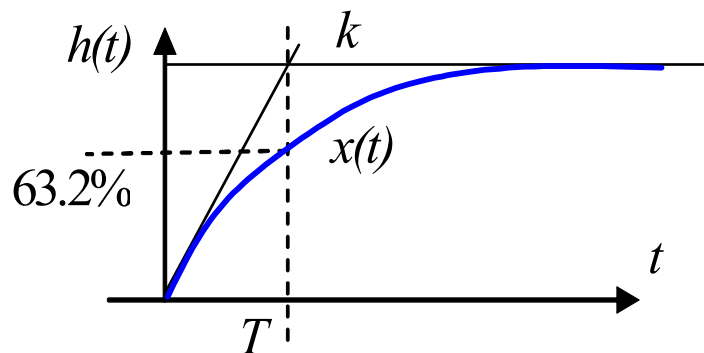


# Metody graficzne (reakcja na 1(t))

## Obiekty bez całkowania i oscylacji

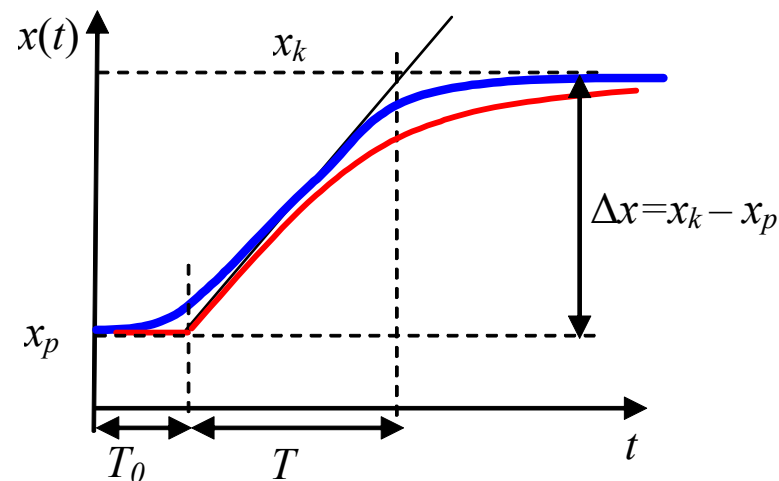
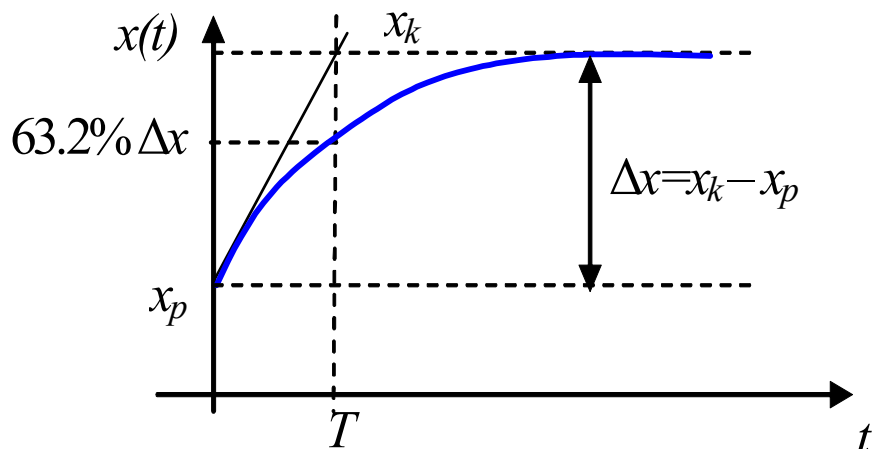
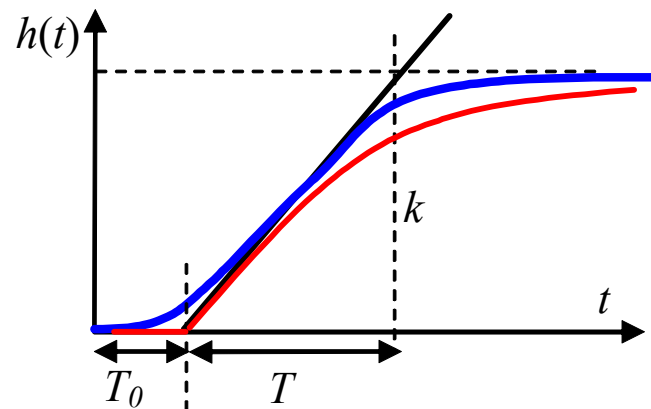
**obiekt 1. rzędu**

$$\frac{k}{Ts + 1}$$



**obiekt rzędu > 1**

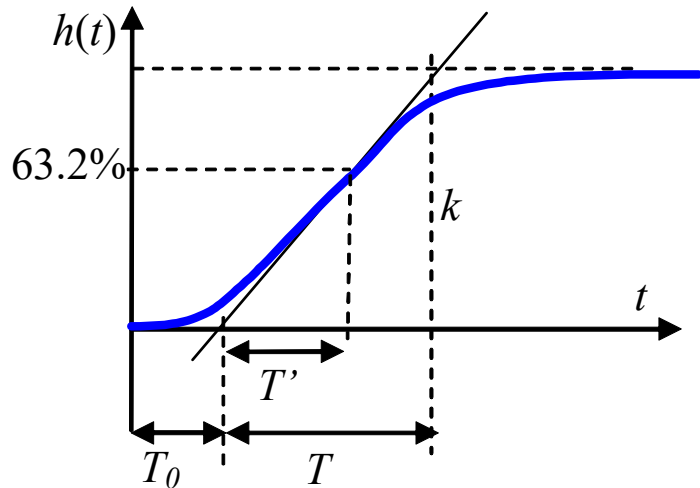
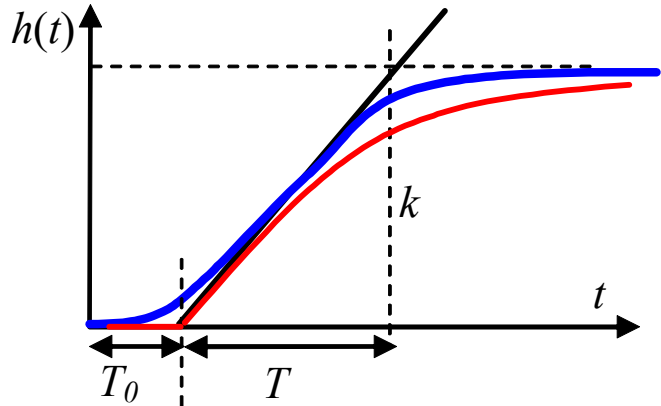
$$\frac{k}{Ts+1} e^{-sT_0}$$



$$k = \frac{\Delta x}{\Delta u}$$

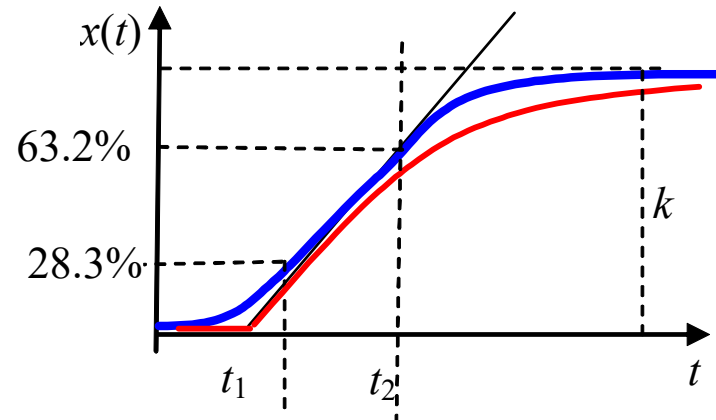
# Metody graficzne (reakcja na 1(t))

## Obiekty bez całkowania i oscylacji



alternatywna wartość stałej czasowej ( $T'$ )

## obiekt rzędu > 1



$$T = 1.5 \cdot (t_2 - t_1), \quad T_o = t_2 - T$$

Dobre wyniki dla:  $0.15 < \frac{T_o}{T} < 0.6$

## FOTD (First-Order System with Time Delay)

Idea Kűpfműllera (1928r.)

$$\frac{k}{Ts+1} e^{-sT_o}$$

aproxymacja Padé

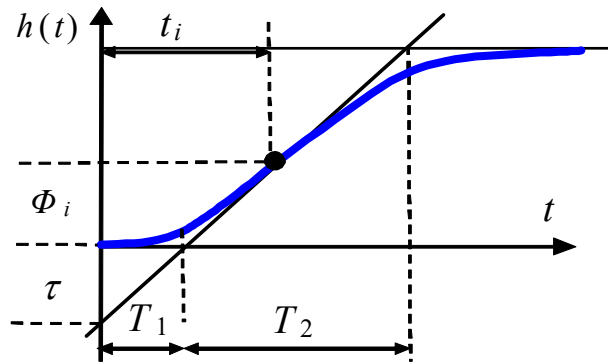
$$e^{-sT_o} \approx \frac{1 - sT_o / 2}{1 + sT_o / 2}$$

transmitancje wymierne

## Metody graficzne (reakcja na 1(t))

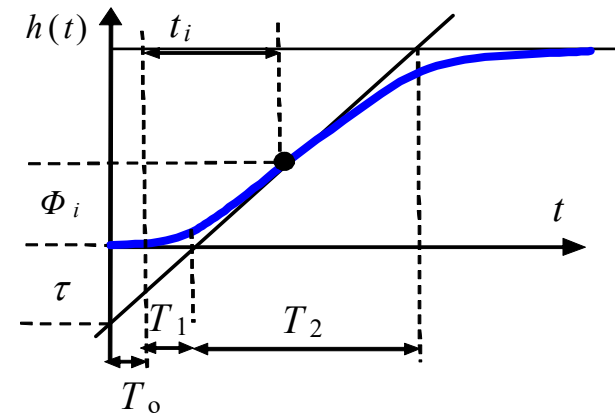
### Obiekty n-tego rzędu (bez całkowania i oscylacji)

### model Strejca (1)



$$\frac{k}{(1+sT)^n}$$

$$\frac{k}{(1+sT)^n} e^{-sT_0}$$



1. wyznacz punkt przegięcia Q
2. znajdź  $\tau = T_1 / T_2$
3. wyznacz rząd  $n$  z tablicy
  - jeśli  $\tau$  pomiędzy - wprowadź  $T_0$
4. wyznacz  $T$  na podstawie  $t_i / T$
5. sprawdź wg  $T_1 / T, T_2 / T$

n	T2/T	T1/T	T1/T2	t <sub>i</sub> /T	Φ <sub>i</sub>
1	1	0	0	0	0
2	2,718	0,282	0,104	1	0,264
3	3,695	0,805	0,218	2	0,323
4	4,463	1,425	0,319	3	0,353
5	5,119	2,100	0,410	4	0,371
6	5,699	2,811	0,493	5	0,384
7	6,226	3,549	0,570	6	0,394
8	6,711	4,307	0,642	7	0,401
9	7,164	5,081	0,709	8	0,407
10	7,590	5,869	0,773	9	0,413

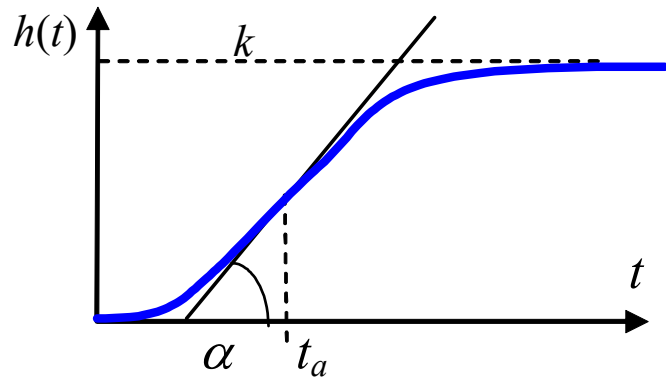
## Metody graficzne (reakcja na 1(t))

Obiekty n-tego rzędu (bez całkowania i oscylacji)

model Strejca (2)

$h(t)$  – odpowiedź skokowa

$g(t)$  – odpowiedź impulsowa



$$G(s) = \frac{k}{(1+sT)^n}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{k}{(n-1)!T} \left(\frac{t}{T}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{T}}$$

punkt przegięcia  $h(t)$ :

$$\frac{d^2 h(t_a)}{dt^2} = \frac{dg(t_a)}{dt} = 0$$

$$t_a = T(n-1)$$

nachylenie  $h(t)$ :

$\text{tg } \alpha$

$$g(t_a) = \frac{k}{T} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-n}$$

wzór Stirlinga  $n! \cong n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

$$n = 1 + 2\pi \frac{t_a^2 g^2(t_a)}{k^2}$$

$$t_a, k, \text{tg } \alpha = g(t_a) \rightarrow n, k, T$$



# Metody graficzne (reakcja na 1(t))

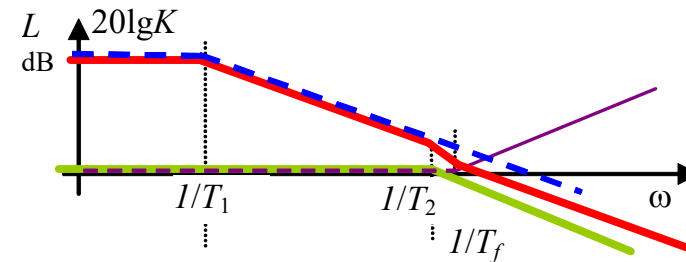
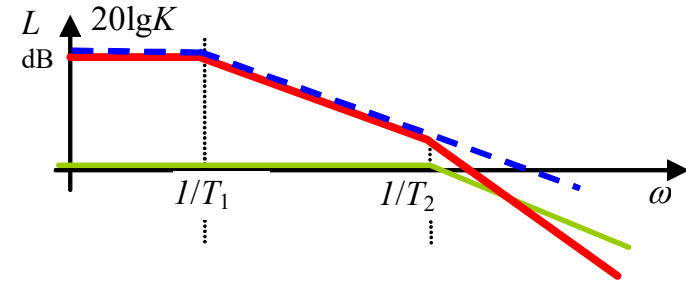
## Obiekty z ujemnym „zerem”

Przykładowy układ nieunilateralny („kaskada współdziałająca”)

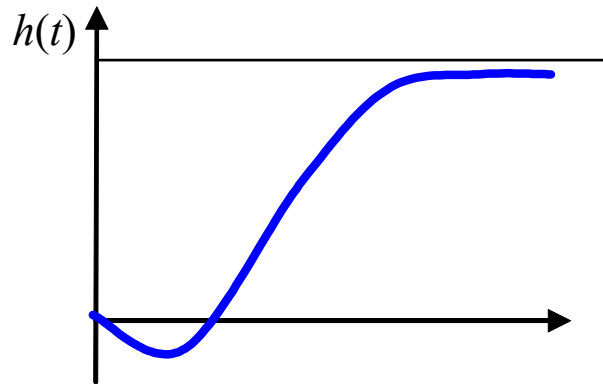
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

$$x_1(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+2)-1} u_1(s) + \frac{1}{(s+1)(s+2)-1} u_2(s)$$

$$x_2(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)-1} u_1(s) + \frac{s+1}{(s+1)(s+2)-1} u_2(s)$$



## Obiekty z dodatnim „zerem”

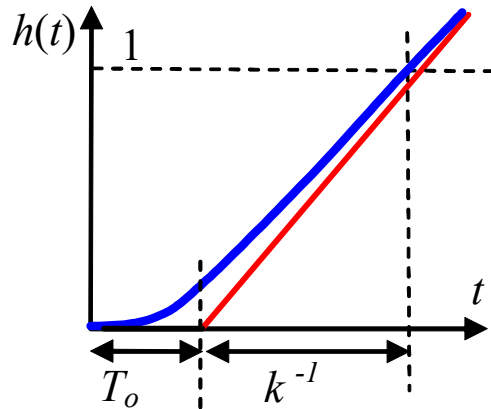


$$\frac{k}{Ts+1} e^{-sT_0}$$

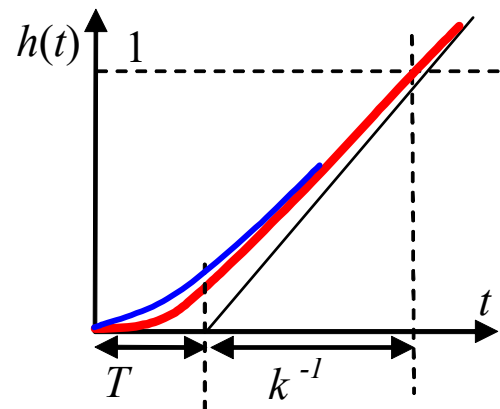
$$e^{-sT_0} \approx \frac{1-sT_0/2}{1+sT_0/2}$$

## Metody graficzne (reakcja na 1(t))

### Obiekty astatyczne z całkowaniem



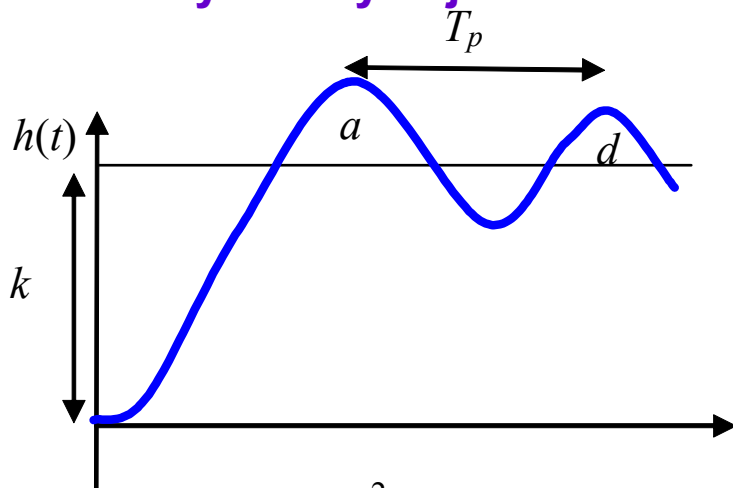
$$\frac{k}{s} e^{-sT_o}$$



$$\frac{k}{s(Ts + 1)}$$

PID Control, Astrom/2.4 (s.21)

### Obiekty z oscylacjami



$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$d = e^{-2\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

↓

$$\xi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + (2\pi / \log d)^2}}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_p \sqrt{1-\xi^2}}$$

PID Control, Astrom/2.4 (s.23)

# Identyfikacja na podstawie odpowiedzi impulsowej (reakcja na $\delta(t)$ )

## Metoda momentów

**podstawy**

**Moment funkcji** - interpretacja graficzna

- moment zerowy  $m_0 = \int_0^{\infty} x(t) dt$   
powierzchnia pod krzywą  $x(t)$

- moment pierwszy  $m_1 = \int_0^{\infty} tx(t) dt$   
powierzchnia pod krzywą  $tx(t)$

**Odpowiedź impulsowa  $g(t)$  a transmitancja  $G(s)$**

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

$$x(s) = G(s) * u(s), \quad \text{gdzie } u(t) = \delta(t), \Rightarrow x(s) = G(s) * 1$$

**Rozwinięcie  $x(s)$  w szereg Taylora w otoczeniu  $s=0$**

$$x(s)|_{s=0} \approx x(0) + \frac{1}{1!} s x^{(1)}(0) + \frac{1}{2!} s^2 x^{(2)}(0) + \dots$$

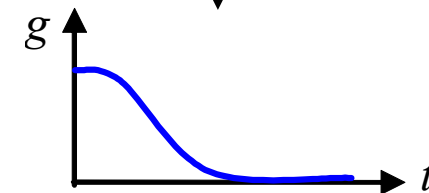
$$m_i = (-1)^i x^{(i)}(s=0)$$

$m_i = i$ -ty moment funkcji  $x(t)$

$x^{(i)}(s) =$  pochodna transformaty funkcji  $x(t)$

$$m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \frac{1}{3!} m_3 s^3 + \dots$$

pomiary momentów ( $m_0, m_1, \dots$ )



gdy  $u(t) = \delta(t)$

$$G(s) = x(s)$$

# Identyfikacja na podstawie odpowiedzi impulsowej (reakcja na $\delta(t)$ )

## Metoda momentów

**podstawy**

$$x(s)|_{s=0} \approx x(0) + \frac{1}{1!} s x^{(1)}(0) + \frac{1}{2!} s^2 x^{(2)}(0) + \dots = m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \frac{1}{3!} m_3 s^3 + \dots$$

↓ gdy  $u(t) = \delta(t)$

$$x(s) = G(s)$$

Zakładamy, np.:

$$G_{m,n}(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1} = (m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \dots)$$

$$(m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \dots)(1 + a_1 s + \dots + a_n s^n) = b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m$$

Wymnożyć i porównać współczynniki przy  $s$

Gdy  $u(t) = \delta(t)$

$$x(s) = G(s) \cdot 1 \Rightarrow G(s) = x(s)$$

Gdy  $u(t) = 100 \cdot \delta(t)$

$$x(s) = G(s) \cdot 100 \Rightarrow G(s) = x(s)/100$$

$$\frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1} : 100$$

# Identyfikacja na podstawie odpowiedzi impulsowej (reakcja na $\delta(t)$ )

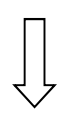
## Metoda momentów

**przykład**

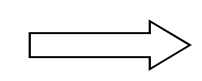
$$G_{2,3}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} = \left( m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \dots \right)$$

$$\left( m_0 - \frac{1}{1} m_1 s + \frac{1}{2} m_2 s^2 - \frac{1}{6} m_3 s^3 \dots \right) (1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2$$

$$\begin{array}{r|l}
 m_0 & + m_0 a_1 s + m_0 a_2 s^2 + m_0 a_3 s^3 + \\
 -m_1 s & - m_1 a_1 s^2 - m_1 a_2 s^3 - m_1 a_3 s^4 + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 s^2 + \frac{1}{2} m_2 a_1 s^3 + \frac{1}{2} m_2 a_2 s^4 + \frac{1}{2} m_2 a_3 s^5 + \\
 & - \frac{1}{6} m_3 s^3 - \frac{1}{6} m_3 a_1 s^4 - \frac{1}{6} m_3 a_2 s^5 - \frac{1}{6} m_3 a_3 s^6 + \\
 & \dots\dots\dots \\
 -b_0 & -b_1 s -b_2 s^2 = 0
 \end{array}$$



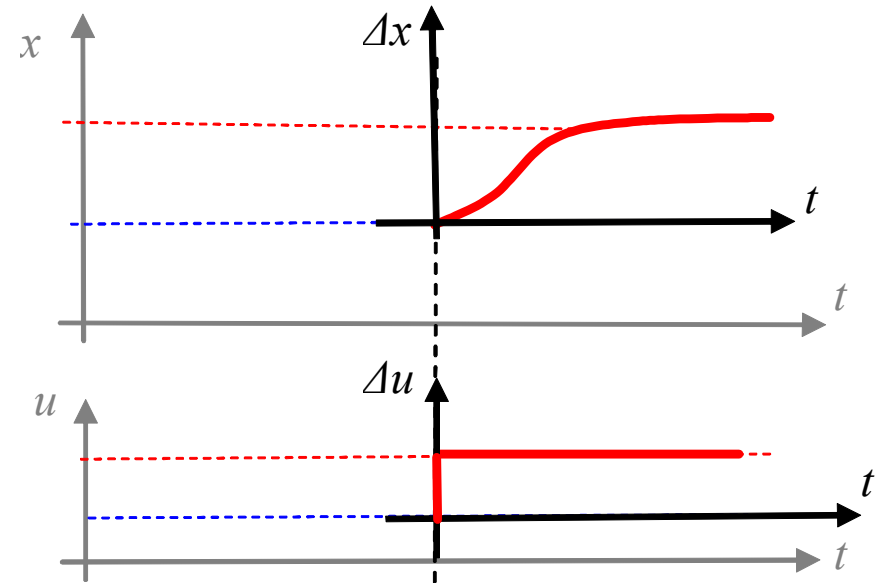
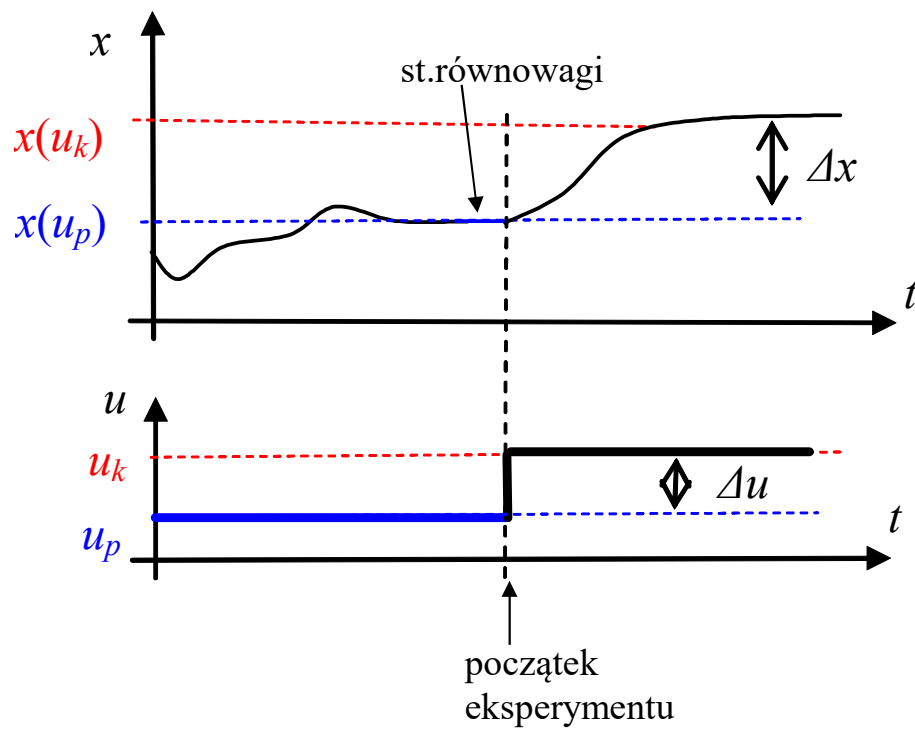
$$\begin{aligned}
 b_0 &= m_0 \\
 m_0 a_1 - b_1 &= m_1 \\
 m_0 a_2 - m_1 a_1 - b_2 &= \frac{1}{2} m_2 \\
 \dots\dots
 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 m_0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 m_1 & -m_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \frac{1}{2} m_2 & -m_1 & m_0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{6} m_3 & -\frac{1}{2} m_2 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{24} m_4 & -\frac{1}{6} m_3 & \frac{1}{2} m_2 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3 \\
 b_0 \\
 b_1 \\
 b_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 m_0 \\
 m_1 \\
 \frac{1}{2} m_2 \\
 \frac{1}{6} m_3 \\
 \frac{1}{24} m_4 \\
 \frac{1}{120} m_5
 \end{bmatrix}
 \quad 13$$

# Identyfikacja na podstawie reakcji na wymuszenie skokowe/impulsowe

## Eksperyment na rzeczywistym obiekcie



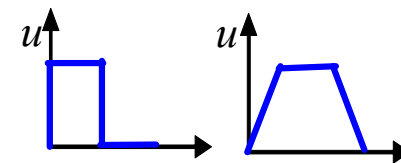
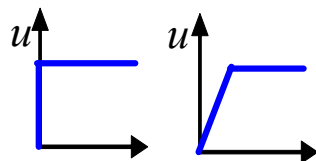
wzmocnienie układu:  $k = \frac{\Delta x}{\Delta u}$

Dodać weryfikację modelu i porównanie jakości różnych metod na ch-kach czasowych i częstotliwościowych

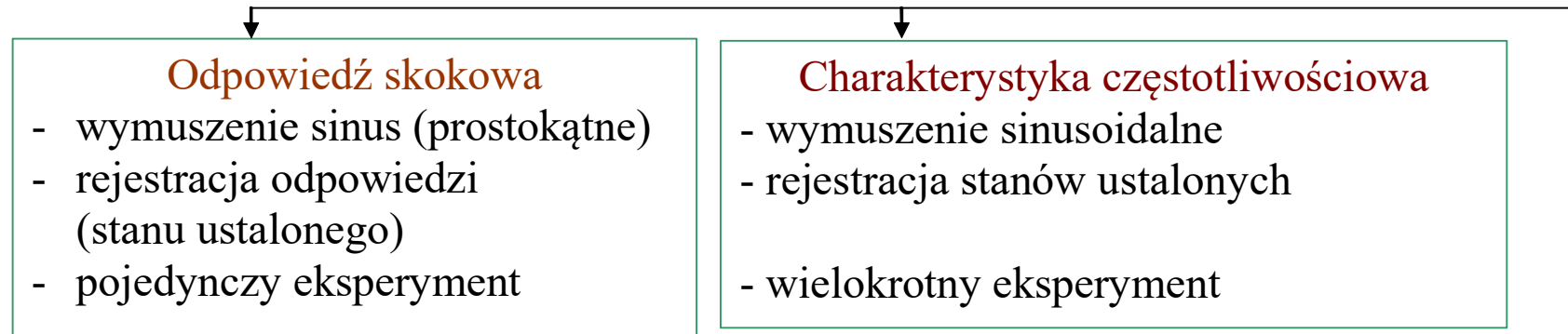
odpowiedź na wymuszenie skokowe

$\xrightarrow{\text{różn.}}$   
 $\xleftarrow{\text{całk.}}$

odpowiedź na wymuszenie impulsowe

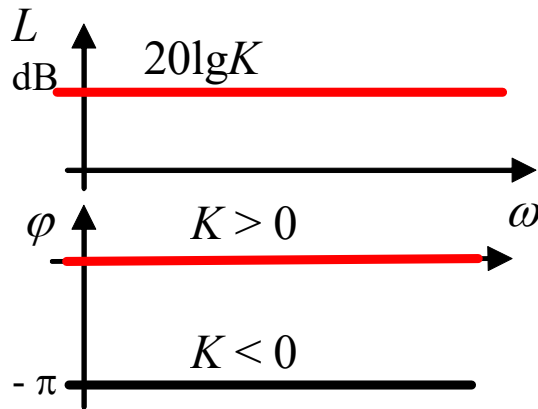


## Identyfikacja na podstawie odpowiedzi/charakterystyk częstotliwościowych

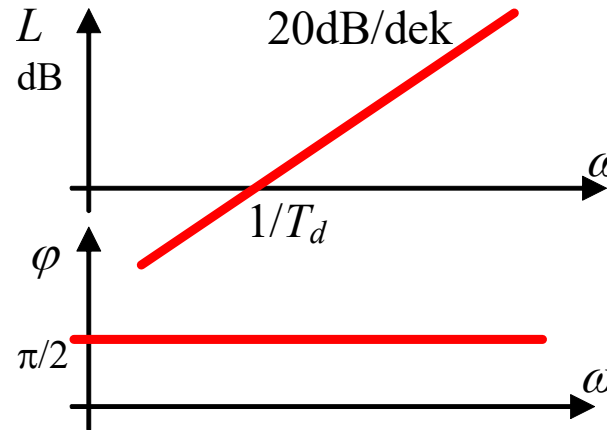


## Identyfikacja na podstawie charakterystyk częstotliwościowych

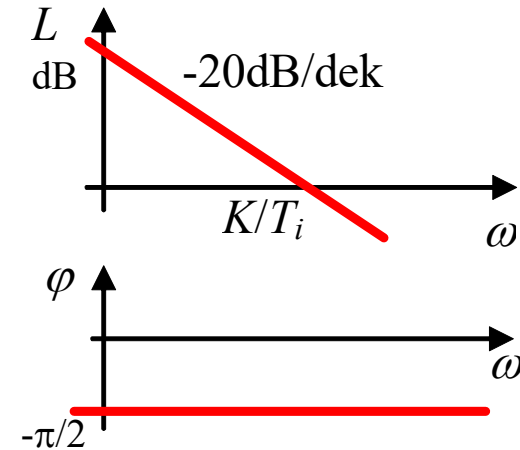
$$G(j\omega) = K$$



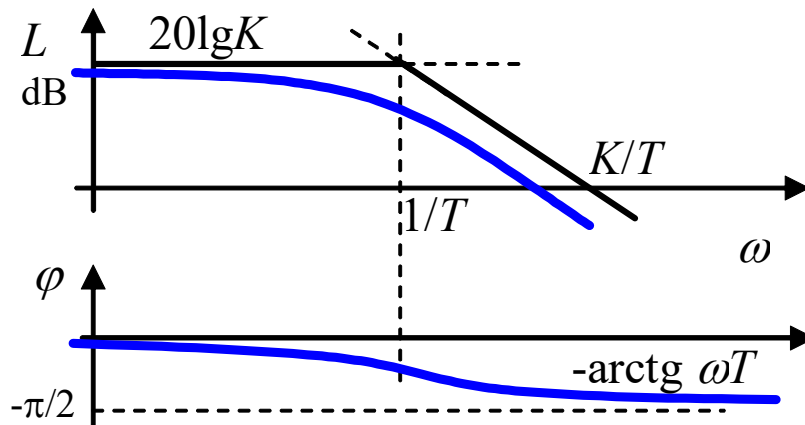
$$G(j\omega) = j\omega T_d$$



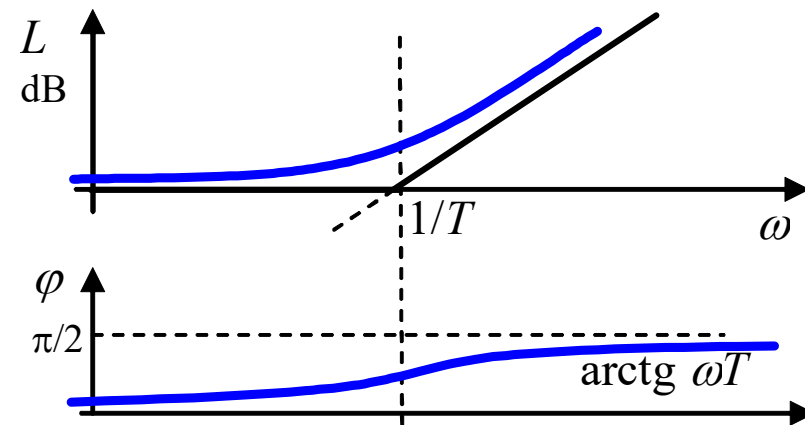
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T_i} = -j \frac{K}{\omega T_i}$$



$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$



$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

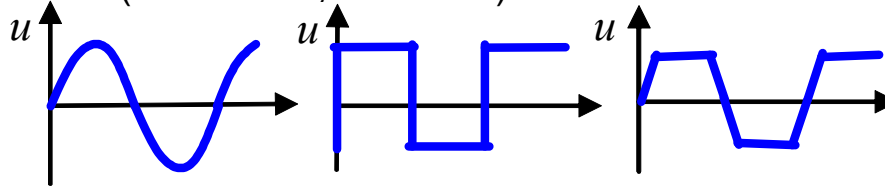




## Identyfikacja na podstawie charakterystyk częstotliwościowych

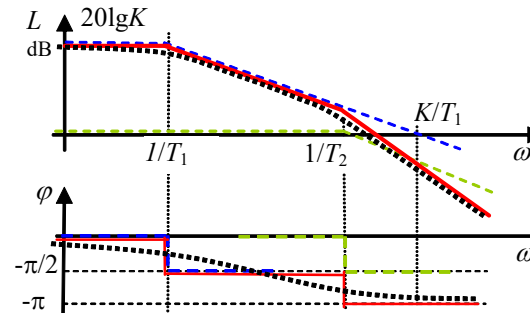
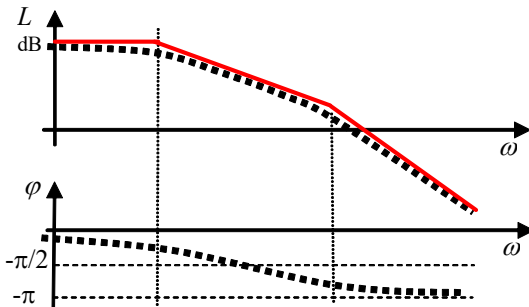
1. Zarejestruj stany ustalone odpowiedzi układu na wymuszenia harmoniczne w odpowiednim zakresie częstotliwości i amplitud. W układach liniowych:

- $\sin$  na wejściu  $\rightarrow$   $\sin$  na wyjściu (ta sama częstotliwość)
- przybliżenia



2. Przedstaw wyniki w postaci logarytmicznych wykresów modułu  $L(\omega)$  i fazy  $\varphi(\omega)$ .

3. Na podstawie wykresu modułu odtwórz przebieg charakterystyki asymptotycznej, tzn. krzywą łamaną o nachyleniach, które są wielokrotnościami  $\pm 20\text{dB/dek}$ .



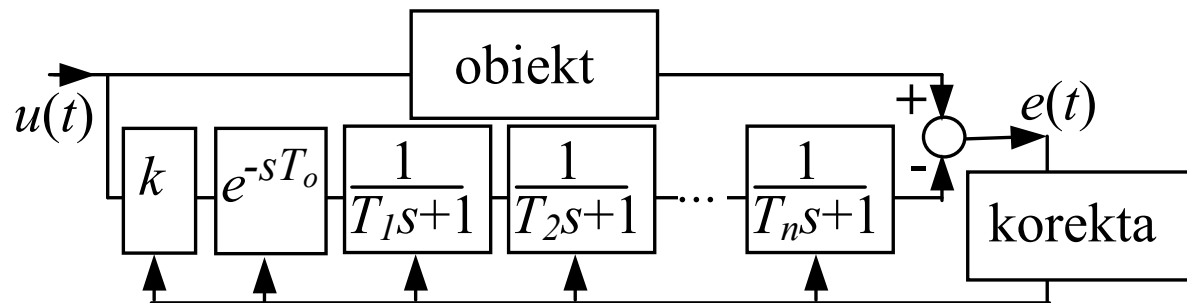
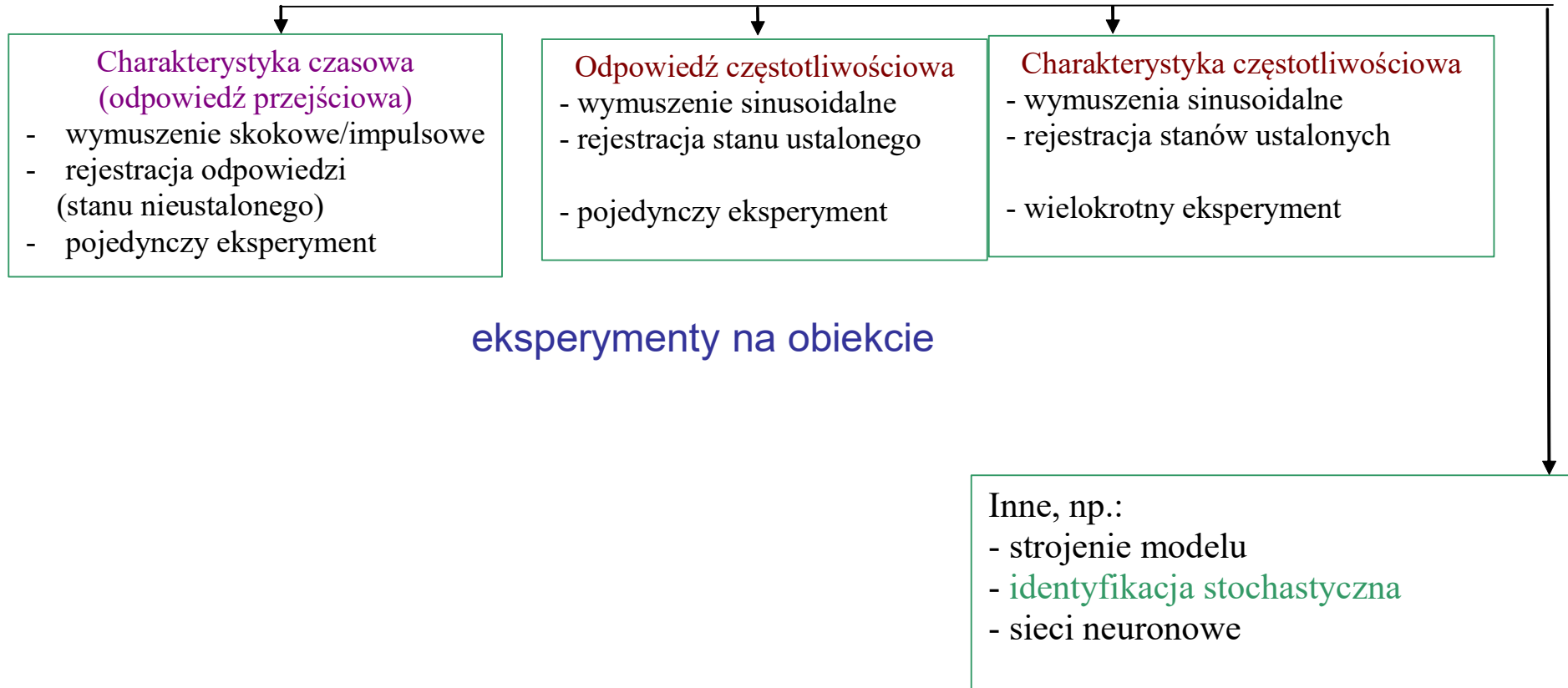
4. Na podstawie charakterystyki asymptotycznej odtwórz się charakterystykę fazową części minimalnofazowej -  $\varphi^*(\omega)$ .

5. Porównując charakterystykę  $\varphi^*(\omega)$  z wykresem doświadczalnym  $\varphi(\omega)$ , zidentyfikuj człony nieminimalnofazowe (opóźnienie, przesuwnik fazowy) lub stwierdź ich brak.

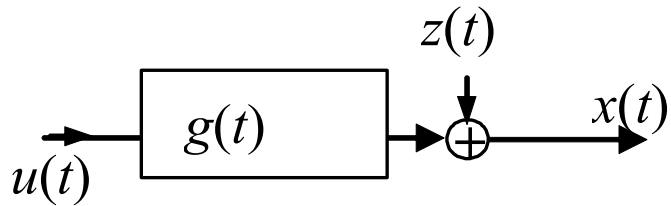
6. Porównanie wykresów  $\varphi^*(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$  pozwala też na korektę asymptotycznego wykresu modułu, szczególnie w przypadku występowania członów oscylacyjnych.

7. Na podstawie charakterystyki asymptotycznej zidentyfikuj człony minimalnofazowe.

# Porównanie metod identyfikacji



## Identyfikacja stochastyczna (estymacja parametrów)



Odpowiedź impulsowa  $g(t)$  a transmitancja  $G(s)$

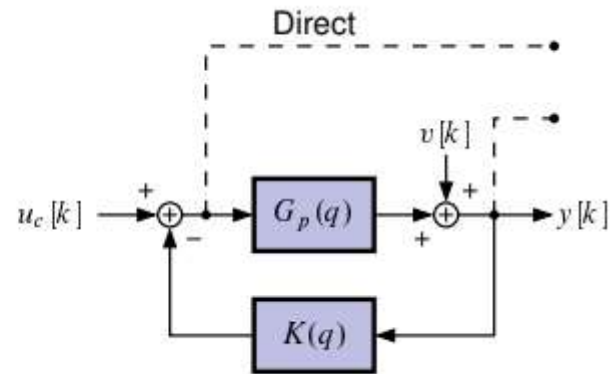
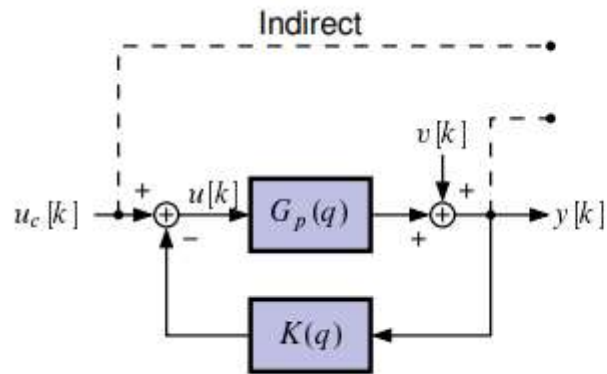
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

$$x(s) = G(s) * u(s), \quad \text{gdzie } :u(t) = \delta(t), \Rightarrow x(s) = G(s) * 1$$

## Identyfikacja obiektów niestabilnych

„closed-loop identification of transfer function model for unstable systems”

Metody pośrednie i bezpośrednie



## Identyfikacja na potrzeby projektowania

