# Równanie różniczkowe zwyczajne - klasyfikacja

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

| *Współczynniki $a_i$ i $b_i$* | *Równanie różniczkowe* |
|---|---|
| stałe | liniowe stacjonarne |
| stałe lub funkcje czasu | liniowe niestacjonarne |
| zależne od $x$, $u$ lub ich pochodnych | nieliniowe |

1) $a\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + bx(t) = \ddot{u}(t) + 2u(t)$
2) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + b\sqrt{x(t)} = u(t)$
3) $4\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + x^2(t) = u(t)$
4) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + ax^3(t) = u(t)$
5) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + ax(t) = u(t) + 2\dot{u}(t)$
6) $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t) + a\dot{u}(t)$
7) $a^2\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + u_1(t)x(t) = u_2(t)$
8) $2\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + a(t)x(t) = 2u_1(t) + 3u_2(t)$
9) $5\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + x(t)u_1(t) = u_2(t)$
10) $2\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + a^3x(t) = 2u_1(t) + 3u_2(t)$

11) $\ddot{x}^2(t) + 3\dot{x}(t) + ax(t) = u^2(t)$
12) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + ax(t) = u^2(t)$
13) $b^2\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = \sqrt{a}u(t) + \dot{u}(t)$
14) $3\dddot{x}(t) + 2\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = 2u_1(t) + \dot{u}_1(t)$
15) $a\,\dot{x}(t) + 2ab\,x(t) = 2\ddot{u}(t) + \dot{u}(t)$
16) $a\,\dot{x}(t) - 2ab\,x(t) = 2u(t) + \dot{u}(t)$
17) $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\,\dot{x}(t) + \omega_n^2\,x(t) = b_0u(t)$

# Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- znana postać rozwiązania swobodnego
- jeden punkt równowagi
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  $u(t)=1(t)$ $x(t)$ $u(t)=\delta(t)$ $dx(t)/dt$
- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

# Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe - rozwiązanie

zasada superpozycji

$$x(t) = \qquad x_s(t) \qquad + \qquad x_w(t)$$

rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa) | rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona)

Znane algorytmy rozwiązywania

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone

*Zastosowanie: wyznaczanie rozwiązań analitycznych*

## Metoda klasyczna $b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$ ✵

### I. Rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa)

$u(t)=u_0$

1) równanie jednorodne: $b\dot{x}_s(t)+cx_s(t)=0$

2) zakładana postać $x_s(t)$: $x_s(t)=Ae^{\lambda t}$ $\quad \dot{x}_s(t)=\lambda A e^{\lambda t}$

3) podstawienie $x_s(t)$: $b\lambda A e^{\lambda t}+cAe^{\lambda t}=0 \quad /: Ae^{\lambda t}$

4) równanie charakterystyczne: $b\lambda+c=0$

5) pierwiastki równania charakterystyczne: $\lambda_1=-c/b$

rozwiązanie swobodne: $x_s(t)=A_1 e^{-(c/b)t}$ $\quad A_1=-\dfrac{u_0}{c}$

### II. Rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona)

1) równanie niejednorodne: $b\dot{x}_w(t)+cx_w(t)=u_0$

2) wymuszenie i pochodne: $u_0,\ 0$

3) postać $x_w(t)$: $x_w(t)=C_1u_0$ $\quad \dot{x}_w(t)=0$

4) podstawienie $x_w(t)$: $b\cdot 0+c\cdot C_1u_0=u_0$

5) stąd $C_1=1/c$

rozwiązanie wymuszone: $x_w(t)=u_0/c$

$\dot{x}(t)=0$

$0+cx(t)=u(t)$

$0+cx=u$

$x=u/c$

$x_0=u_0/c$

Rozwiązanie ogólne: $x(t)=A_1 e^{-(c/b)t}+u_0/c$

Rozwiązanie szczególne: $x(0)=0$

$$x(t)=-\frac{u_0}{c}e^{-(c/b)t}+\frac{u_0}{c}$$

# Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone

- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- znana postać rozwiązania swobodnego
- jeden punkt równowagi
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  $u(t)=1(t)$ $x(t)$ $u(t)=\delta(t)$ $dx(t)/dt$
- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

## Równanie charakterystyczne

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

równanie charakterystyczne

---

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

równanie charakterystyczne

---

- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego (bieguny układu)

*Zastosowanie: Badanie własności układu na podstawie biegunów*

# Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego

- znana postać rozwiązania swobodnego
- jeden punkt równowagi
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  $u(t)=1(t) \quad x(t) \qquad\qquad u(t)=\delta(t) \quad dx(t)/dt$

- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

## Postać rozwiązania swobodnego

$$a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

*a) pierwiastki jednokrotne rzeczywiste* $\lambda_i$

$$x_s(t) = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_ne^{\lambda_n t}$$

*b) pierwiastek m*-krotny $\lambda_k$

$$\left(A_{k1} + A_{k2}t + \ldots + A_{km}t^{m-1}\right)e^{\lambda_k t}$$

c) para pierwiastków zespolonych $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$

$$A_1e^{(\alpha+j\omega)t} + A_2e^{(\alpha-j\omega)t}$$

$$B_1 = A_1 + A_2 \qquad B_2 = A_1 - A_2$$

$$e^{\alpha t}\left(B_1\cos\omega t + jB_2\sin\omega t\right)$$

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

$$Ae^{\alpha t}\cos(\omega t - \varphi) = Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\varphi = arc\,tg\,\frac{B_2}{B_1} \qquad \varphi_1 = arc\,ctg\,\frac{B_2}{B_1}$$

---

- znana postać rozwiązania swobodnego

*Zastosowanie: Określenie i projektowanie własności układu na podstawie biegunów*

# Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- znana postać rozwiązania swobodnego

- jeden punkt równowagi
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  $u(t)=1(t) \quad x(t) \qquad\qquad u(t)=\delta(t) \quad dx(t)/dt$

- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

## Jeden punkt równowagi (postać rozwiązania wymuszonego)

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Wymuszenie: $u(t) = u_0$

R.statyczne: $a_0 x = b_0 u \longrightarrow x = \dfrac{b_0}{a_0} u = k_{ukł} u$ (punkt równowagi)

---

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Wymuszenie: $u_1(t) = u_{10}, u_2(t) = u_{20}$

R.statyczne:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

(punkt równowagi)

$x_1 = f_1(u_1, u_2)$

$x_2 = f_2(u_1, u_2)$

$x_3 = f_3(u_1, u_2)$

$0 = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \longrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}$

---

- jeden punkt równowagi

*Zastosowanie: Punkt równowagi przy stałym wymuszeniu - stan początkowy (punkt pracy), stan końcowy*
*Uproszczenie badań (analitycznych, symulacyjnych)*

# Własności układów liniowych

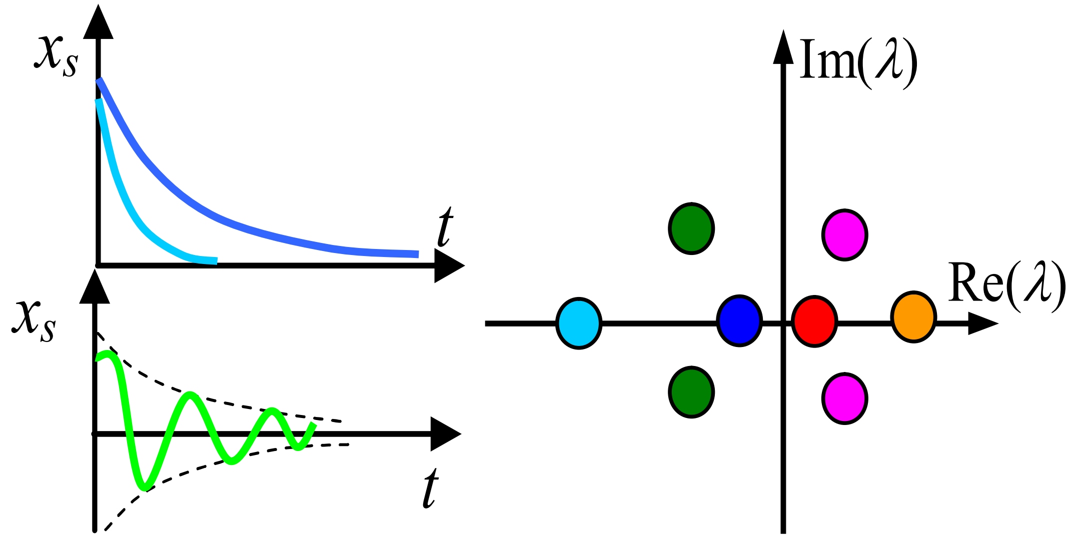
- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- znana postać rozwiązania swobodnego
- jeden punkt równowagi

- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

$u(t)=1(t) \quad x(t) \qquad\qquad u(t)=\delta(t) \quad dx(t)/dt$

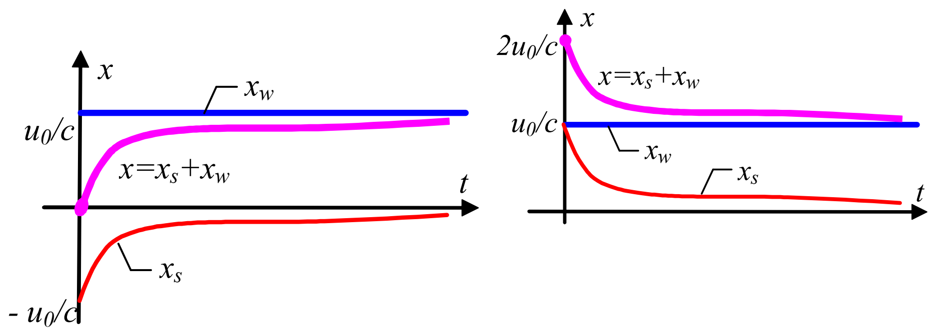
- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

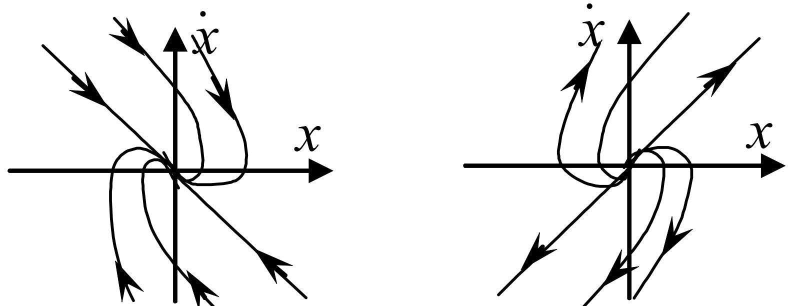
# Stabilność układu




$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$A e^{\alpha t} \cos(\omega t - \varphi)$$




węzeł stabilny węzeł niestabilny

- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna

*Zastosowanie: Określenie i projektowanie własności układu na podstawie biegunów*
*Proste badanie stabilności*

# Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- znana postać rozwiązania swobodnego
- jeden punkt równowagi
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna

- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

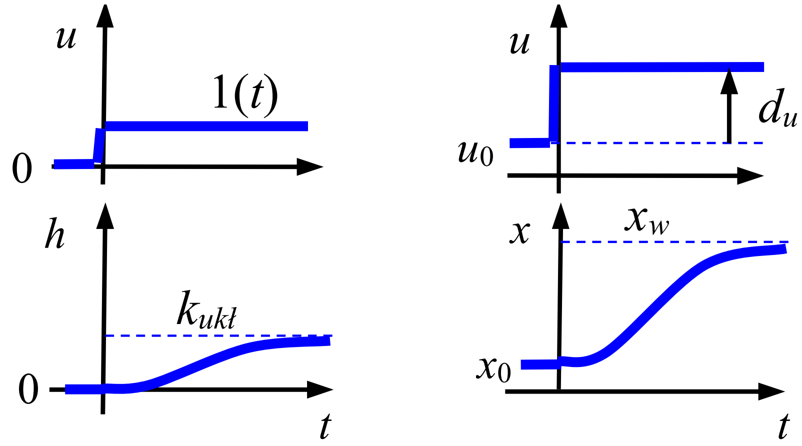
$u(t)=1(t) \quad x(t) \qquad\qquad u(t)=\delta(t) \quad dx(t)/dt$

- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

# Przesuwanie i skalowanie układu liniowego

$u(t) = 1(t)$

$x(t) = h(t)$



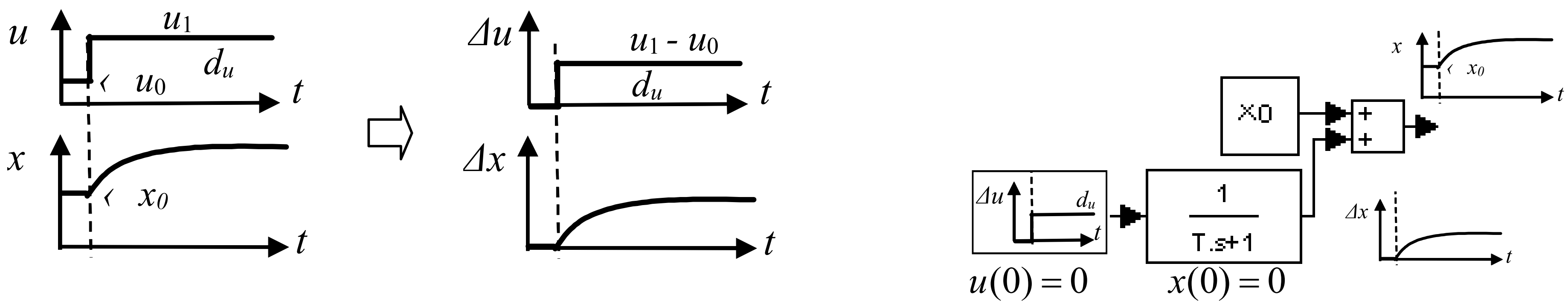

$$u(t) = u_0 + d_u \cdot 1(t)$$

$$x(t) = x_0 + d_u \cdot h(t)$$

$$h(t) = (x(t) - x_0) / d_u$$ normalizacja

---

Zastosowanie w badaniach




---

- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)

# Własności układów liniowych

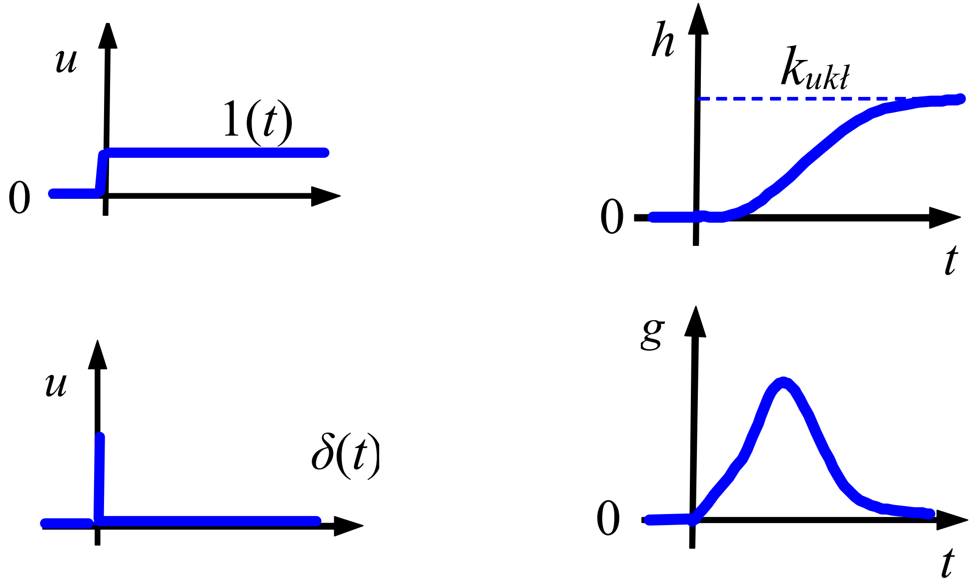
- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- znana postać rozwiązania swobodnego
- jeden punkt równowagi
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)

- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

$u(t)=1(t)$  $x(t)$  $u(t)=\delta(t)$  $dx(t)/dt$

- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

## Różniczkowanie i całkowanie




$u(t) = 1(t)$ $\qquad\qquad$ $h(t)$

$u(t) = \delta(t) = \dfrac{1(t)}{dt}$ $\qquad\qquad$ $g(t) = \dfrac{dh(t)}{dt}$

- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  $u(t)=1(t) \quad x(t)$ $\qquad\qquad$ $u(t)=\delta(t) \quad dx(t)/dt$

*Zastosowanie: Badania doświadczalne*

# Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- znana postać rozwiązania swobodnego
- jeden punkt równowagi
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

$u(t)=1(t) \quad x(t) \qquad\qquad u(t)=\delta(t) \quad dx(t)/dt$

- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

# Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- znana postać rozwiązania swobodnego
- jeden punkt równowagi
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  $u(t)=1(t) \quad x(t) \qquad\qquad u(t)=\delta(t) \quad dx(t)/dt$
- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

## Transmitancje (przekształcenia operatorowe)

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$a_n s^n X(s) + \ldots + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_m s^m U(s) + \ldots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \boxed{\frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = G(s)}$$

Operatorowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych

Badania analityczne:

- równanie charakterystyczne (bieguny) – badanie stabilności
- obliczenie stanu równowagi

Transmitancje układów złożonych

---

- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

*Zastosowanie: Przekształcenie równania różniczkowe na równania operatorowe (algebraiczne)*

# Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- parametry rozwiązania swobodnego = pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- znana postać rozwiązania swobodnego
- jeden punkt równowagi
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakterystycznego
- stabilność / niestabilność globalna
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- reakcje układu można przesuwać i skalować (nie zależą od punktu pracy)
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  $u(t)=1(t) \quad x(t) \qquad\qquad u(t)=\delta(t) \quad dx(t)/dt$
- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

# Charakterystyki

Charakterystyki statyczne

Charakterystyki skokowe

Charakterystyki częstotliwościowe

Położenie biegunów i zer

Badanie na obiekcie

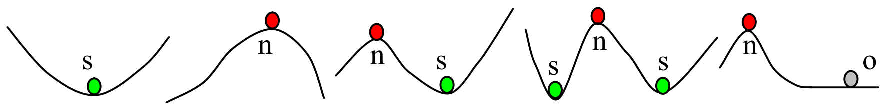
Symulacje Matlab (też Scilab)

- Schemat graficzny

  (bloki Integrator, State-space, Transfer function)

- Tryb tekstowy (funkcje tf, ss, zpk)

## Stabilność układów nieliniowych



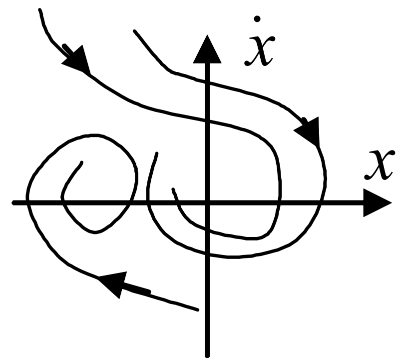

Stabilność/niestabilność globalna/lokalna – równowaga trwała (s), nietrwała (n), obojętna (o)

Stabilność układu oznacza, że dąży on zawsze do któregoś ze stanów równowagi trwałej (s), nawet jeśli posiada stany równowagi nietrwałej (n).

**Pośrednia metoda badania stabilności układu nieliniowego** (pierwsza metoda Lapunowa):

- Stabilność może zależeć od warunków początkowych i wielkości wymuszenia
- Układ nieliniowy może mieć wiele punktów równowagi
  - wiele rozwiązań statycznych dla określonego $u_0$,
  - można zbadać lokalną stabilność/niestabilność poszczególnych punktów równowagi
- Wnioski na temat stabilności dotyczą tylko pewnego obszaru wokół punktu pracy

**Badania symulacyjne**




ukł.nieliniowy