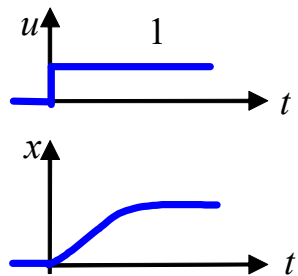
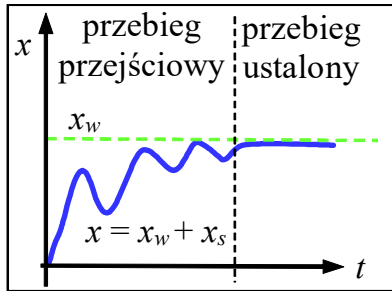


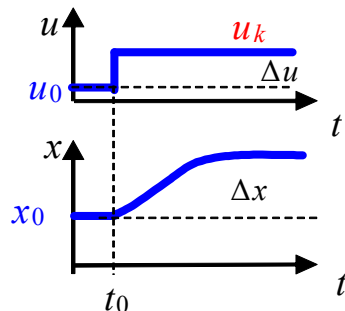
Stan równowagi (stan ustalony)

Punkt równowagi - stan równowagi przy stałym wymuszeniu:

- początkowy punkt równowagi (punkt pracy)
- końcowy punkt równowagi



Odpowiedź skokowa

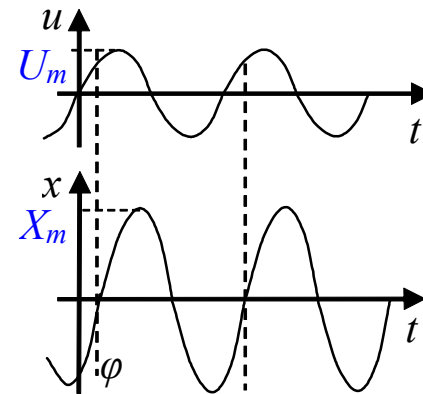
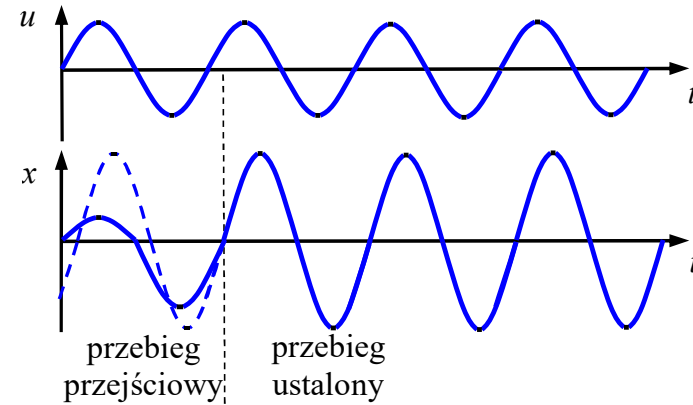


Odpowiedź na wymuszenie skokowe (ogólnie)

Graficzny opis własności dynamicznych układu

Wzmocnienie stałwartościowe: $k_u = \frac{\Delta x}{\Delta u}$

Stan równowagi przy wymuszeniu sinusoidalnym



Odpowiedź częstotliwościowa (dla danego ω)

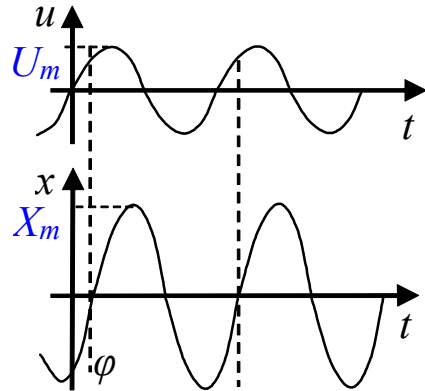
Wzmocnienie przebiegu sinusoidalnego: $M = X_m / U_m$

Charakterystyka częstotliwościowa (badania doświadczalne)



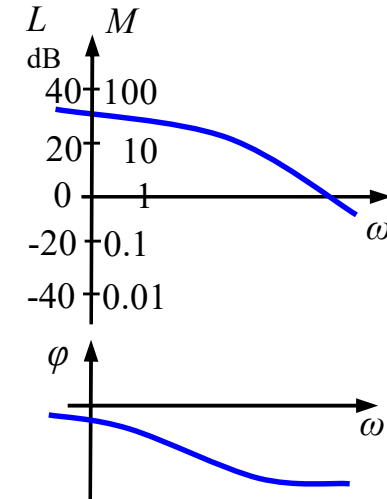
Doświadczenie

Odpowiedź częstotliwościowa (dla danego ω)



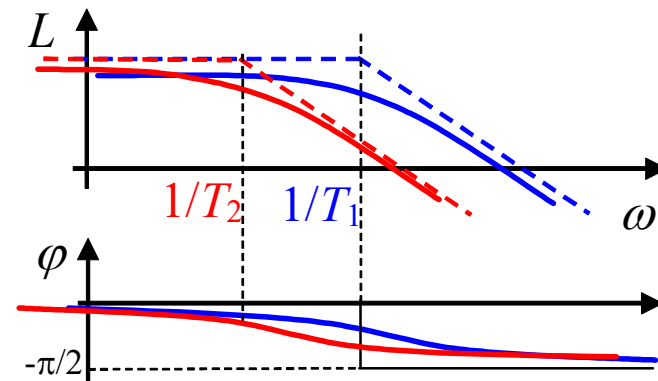
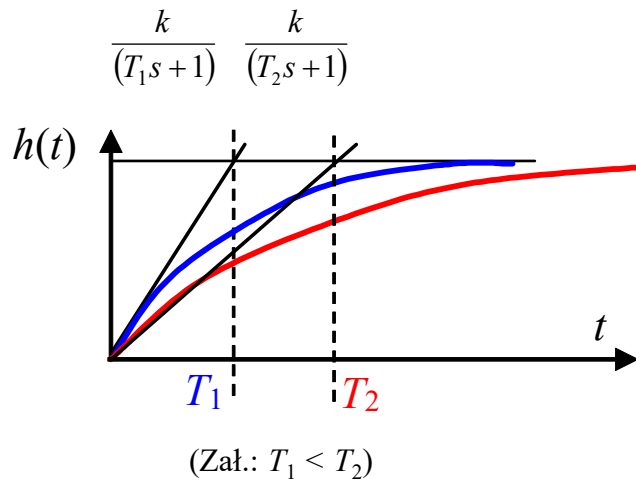
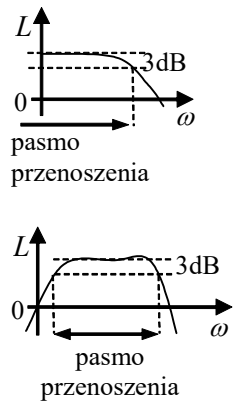
$$M(\omega) = X_m(\omega) / U_m(\omega)$$

$$L(\omega) = 20 \log(M(\omega))$$



Graficzny opis własności dynamicznych układu

Interpretacja (pasmo przenoszenia, szybkość działania)

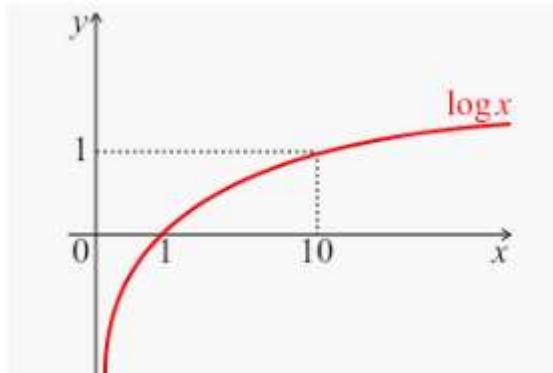


Logarytmy

Definicja:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,$$

$$a, b > 0, a \neq 1$$



Wybrane własności:

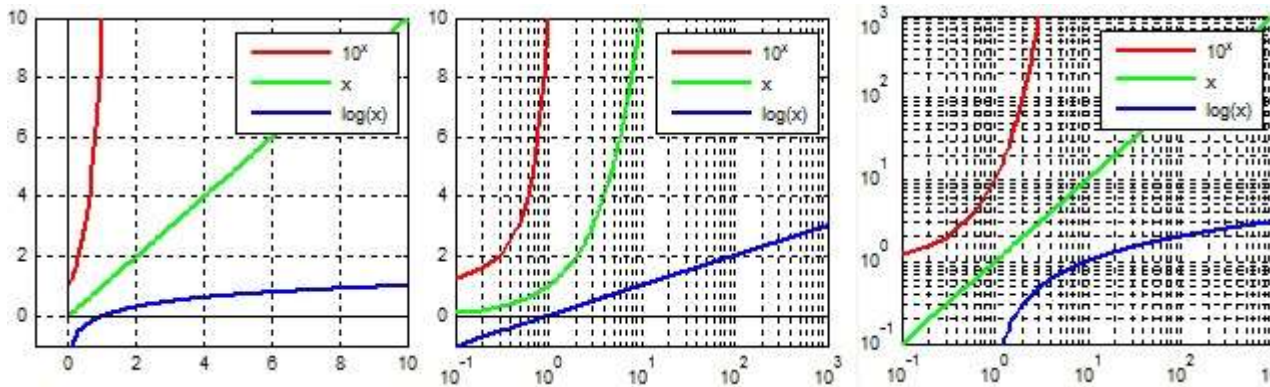
$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

Zastosowanie na skali logarytmicznej (na przykładzie: $y_1(x)=10^x$, $y_2(x)=x$, $y_3(x)=\lg(x)$)



$$P_B = \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

bel (zwiększenie mocy P
względem mocy P_0)

$$1 \text{ dB} = \frac{1}{10} \text{ B}$$

decybel

$$P_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

$$L [\text{dB}] = 10 \log_{10} \left(\frac{A^2}{A_0^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)$$

Amplituda sygnału jest proporcjonalna do kwadratu mocy

Przykład: Moc sygnału wyjściowego jest 10^6 większa od sygnału wejściowego:

$$\log_{10} \left(\frac{1.000.000 \cdot P_{\text{prg}}}{P_{\text{prg}}} \right) = \log_{10} \left(10^6 \cdot \frac{P_{\text{prg}}}{P_{\text{prg}}} \right) = \log_{10} (10^6) = 6 \text{ B} = 60 \text{ dB}$$

Transmitancja widmowa

$$G(s) = G(j\omega),$$

$$G(j\omega) = \frac{P_1(\omega) + jQ_1(\omega)}{P_2(\omega) + jQ_2(\omega)} = \frac{[P_1(\omega) + jQ_1(\omega)][P_2(\omega) - jQ_2(\omega)]}{P_2^2(\omega) + Q_2^2(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Postać algebraiczna

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$P(\omega) = M(\omega) \cos[\varphi(\omega)]$$

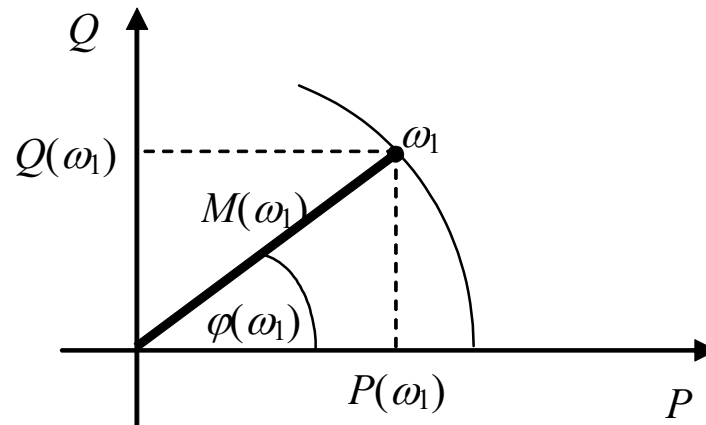
$$Q(\omega) = M(\omega) \sin[\varphi(\omega)]$$

Postać wykładnicza

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)] = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



Charakterystyki częstotliwościowe (badania analityczne)

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

ch-ka rzeczywista

$$- P(\omega) = \operatorname{Re}(G(j\omega))$$

ch-ka urojona

$$- Q(\omega) = \operatorname{Im}(G(j\omega))$$

ch. amplitudowo-fazowa

- $Q(P)$ (ch.Nyquista - dla ukł. otwartych)

ch. amplitudowa

$$- M(\omega) = |G(j\omega)|$$

ch. fazowa

$$- \varphi(\omega)$$

logarytmiczna ch. modułu

$$- L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$$

logarytmiczna ch. fazy

$$- \varphi(\omega) = \arctg(Q/P)$$

log.ch.amplitudowo-fazowa

$$- L(\varphi)$$

Charakterystyki członów połączonych szeregowo

$$G(j\omega) = \prod_{i=1}^n G_i(j\omega) = \prod [M_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}]$$

- ch. amplitudowa

$$M(\omega) = \prod M_i(\omega)$$

- ch. fazowa

$$\varphi(\omega) = \sum \varphi_i(\omega)$$

- logarytmiczna ch.amplitudowa

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\prod M_i(\omega) \right) = \sum L_i(\omega)$$

- logarytmiczna ch. fazy

$$\varphi(\omega) = \sum \varphi_i(\omega)$$

cz. proporcjonalny:

$$G(s) = K$$

$$G(j\omega) = K$$

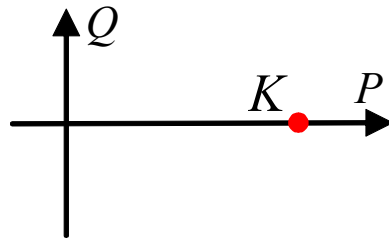
$$P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$L(\omega) = 20\lg M(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(Q/P)$$

$$P(\omega) = K$$

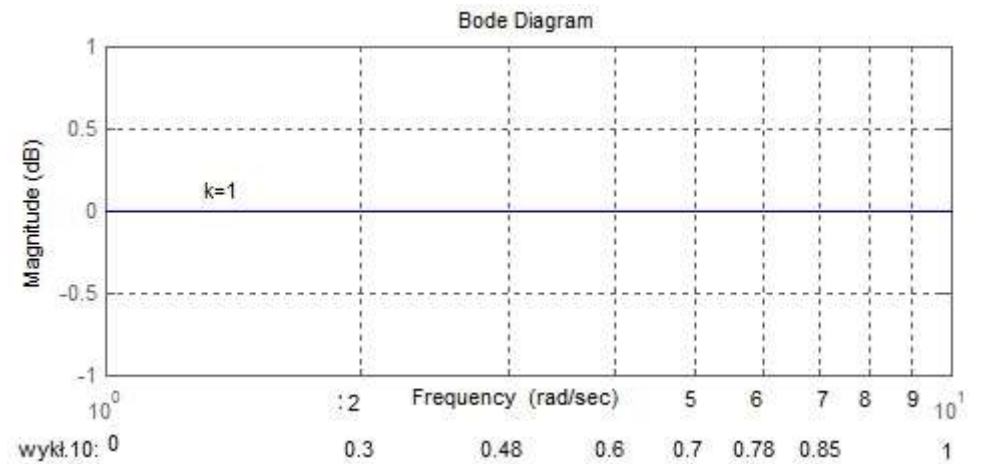
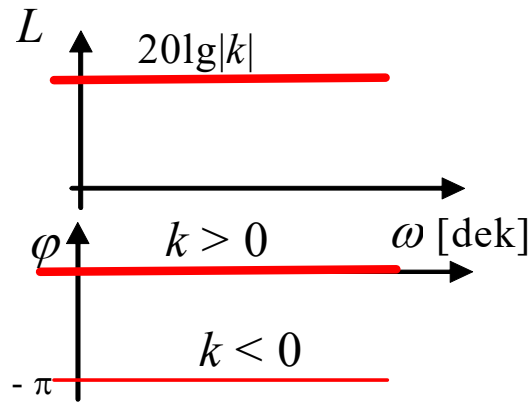
$$Q(\omega) = 0$$



$$M(\omega) = |K|$$

$$\varphi(\omega) = 0$$

$$L(\omega) = 20\lg|K|$$



cz. różniczkowy:

$$G(s) = sT_d$$

$$G(j\omega) = j\omega T_d$$

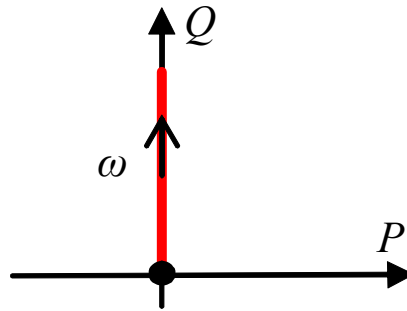
$$P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$L(\omega) = 20\lg M(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(Q/P)$$

$$P(\omega) = 0$$

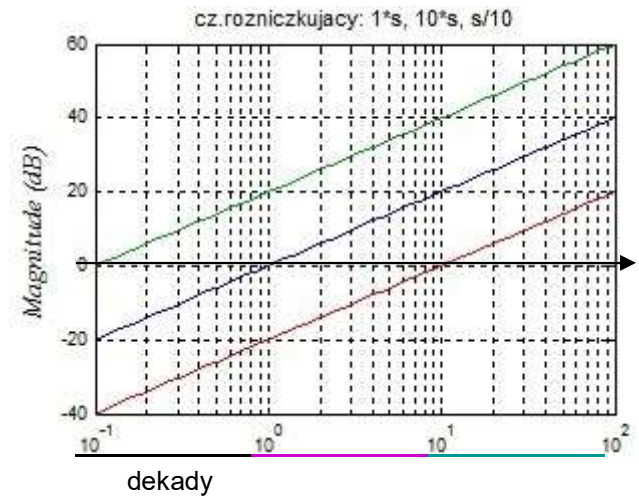
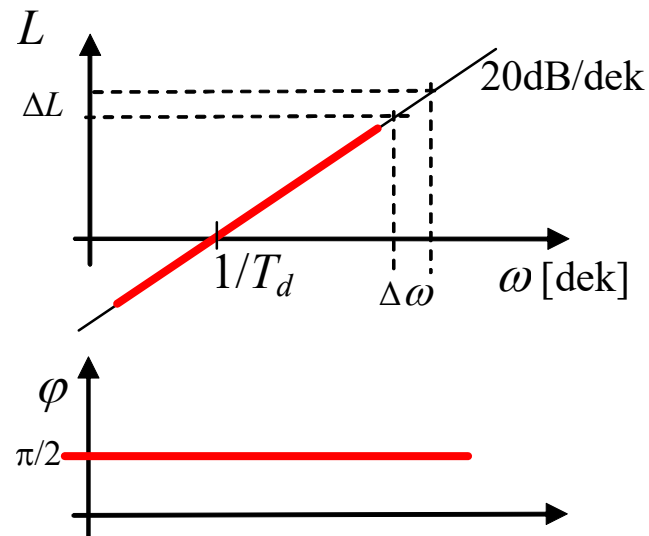
$$Q(\omega) = \omega T_d$$



$$M(\omega) = |j\omega T_d| = \omega T_d$$

$$\varphi(\omega) = \pi/2$$

$$L(\omega) = 20\lg|\omega T_d|$$



Legenda ???

$$L = 0 \rightarrow M = 1 \rightarrow \omega T_d = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{T_d}$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta \omega} = 20\lg(10\omega_1) - 20\lg(\omega_1) = 20\lg\frac{10\omega_1}{\omega_1} = 20 \frac{dB}{dek}$$

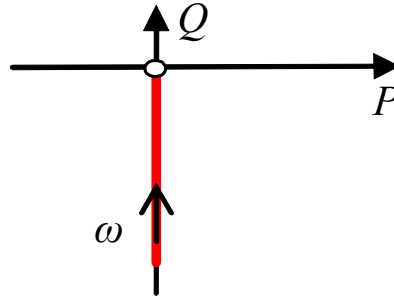
cz. całkujący:

$$G(s) = \frac{K}{sT_i}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T_i} = -j \frac{K}{\omega T_i}$$

$$P(\omega) = 0$$

$$Q(\omega) = -\frac{K}{\omega T_i}$$



$$P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega)$$

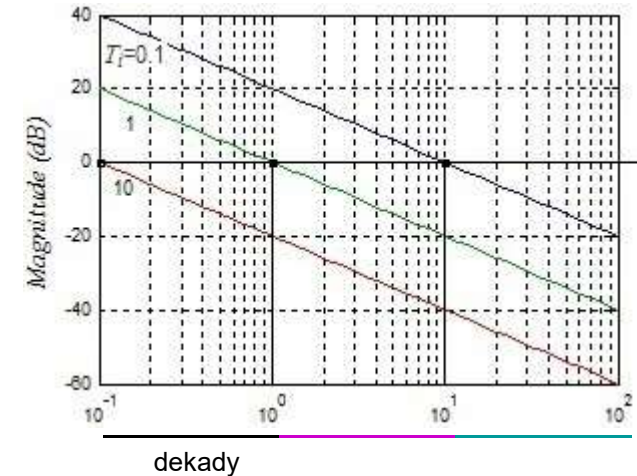
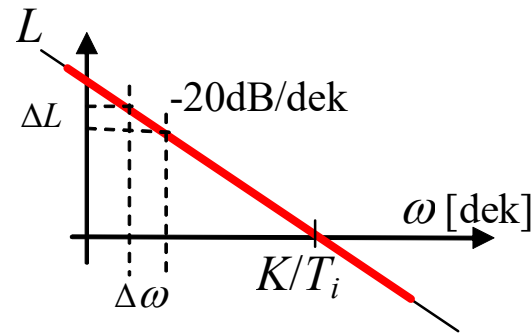
$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(Q/P)$$

$$A(\omega) = \left| \frac{K}{j\omega T_i} \right| = \frac{K}{\omega T_i}$$

$$\varphi(\omega) = -\pi/2$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{K}{\omega T_i} \right| =$$

$$= 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg T_i$$

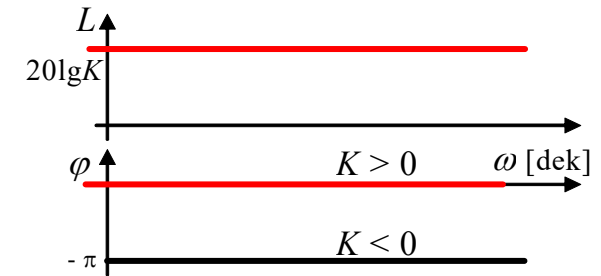


$$L = 0 \rightarrow M = 1 \rightarrow \frac{K}{\omega T_i} = 1 \rightarrow \omega = \frac{K}{T_i}$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta \omega} = -20 \lg(10\omega_1) + 20 \lg(\omega_1) = 20 \lg \frac{\omega_1}{10\omega_1} = -20 \frac{dB}{dek}$$

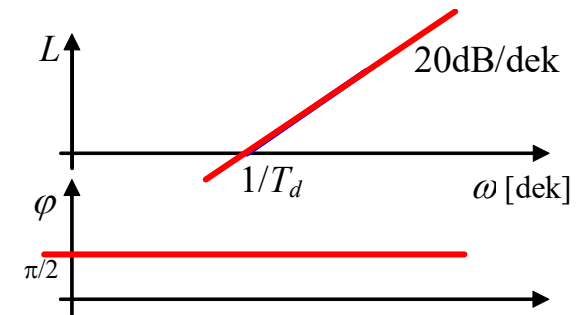
cz. proporcjonalny:

$$G(s) = K \qquad G(j\omega) = K$$
$$L(\omega) = 20\lg|K|$$



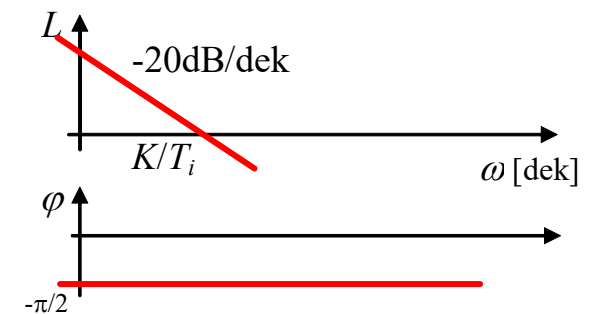
cz. różniczkowy:

$$G(s) = sT_d \qquad G(j\omega) = j\omega T_d$$
$$L(\omega) = 20\lg|\omega T_d|$$



cz. całkujący:

$$G(s) = \frac{K}{sT_i} \qquad G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T_i} = -j \frac{K}{\omega T_i}$$
$$L(\omega) = 20\lg\left|\frac{K}{\omega T_i}\right|$$



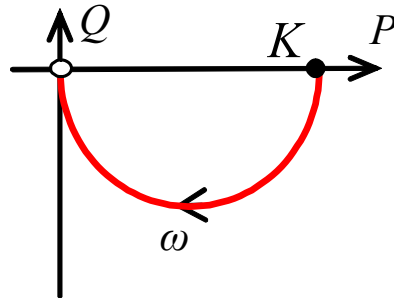
cz. inercyjny:

| |
|---|
| $P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ $L(\omega) = 20 \lg M(\omega)$ $\varphi(\omega) = \text{arctg}(Q/P)$ |
|---|

$$G(s) = \frac{K}{1+sT} \quad G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} = \frac{K}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{K\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

$$P(\omega) = \frac{K}{1+\omega^2 T^2}$$

$$Q(\omega) = -\frac{K\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

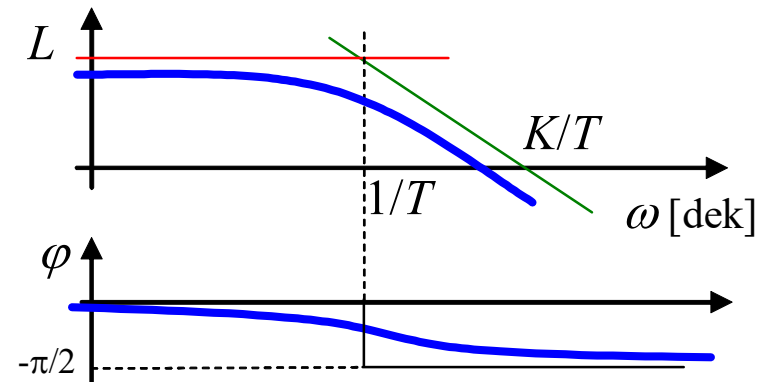


$$M(\omega) = \left| \frac{K}{1+j\omega T} \right|$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(-\omega T)$$

dla $\omega \ll 1/T$ $G(j\omega) \approx \underline{K}$

dla $\omega \gg 1/T$ $G(j\omega) \approx \underline{\frac{K}{j\omega T}}$



cz. forsujacy:

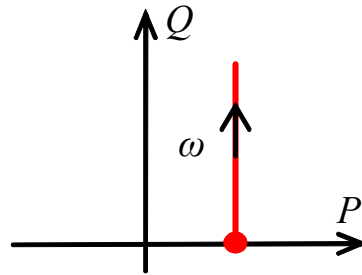
$$G(s) = 1 + sT$$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

$$P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$
$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega)$$
$$\varphi(\omega) = \arctg(Q/P)$$

$$P(\omega) = 1$$

$$Q(\omega) = \omega T$$



$$M(\omega) = |1 + j\omega T|$$

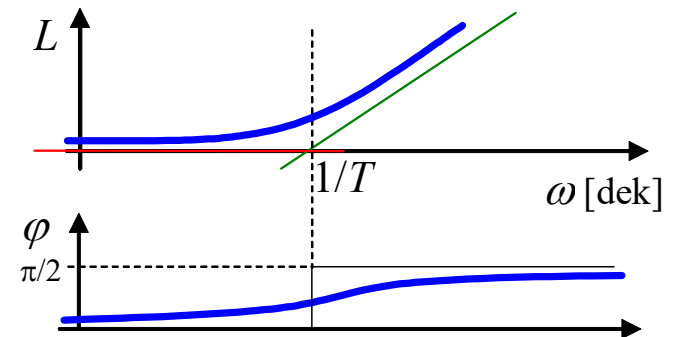
$$\varphi(\omega) = \arctg(\omega T)$$

dla $\omega \ll 1/T$

$$G(j\omega) \approx 1$$

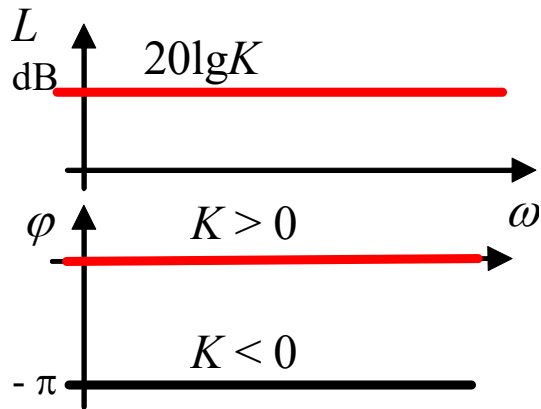
dla $\omega \gg 1/T$

$$G(j\omega) \approx j\omega T$$

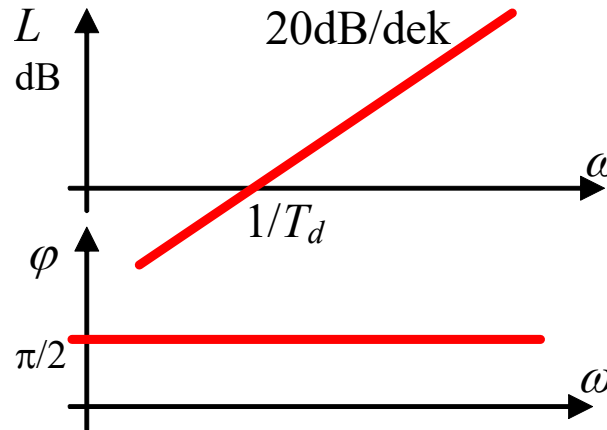


Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe (podstawowe)

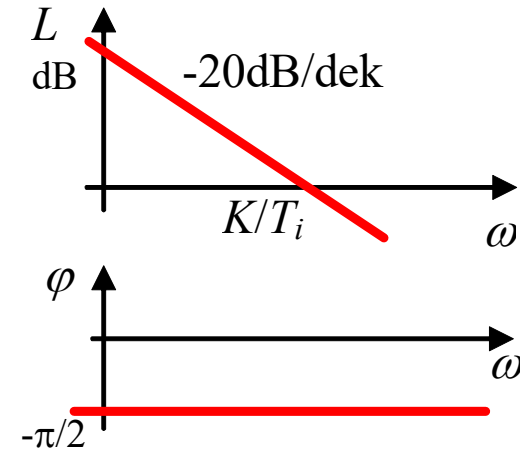
$$G(j\omega) = K$$



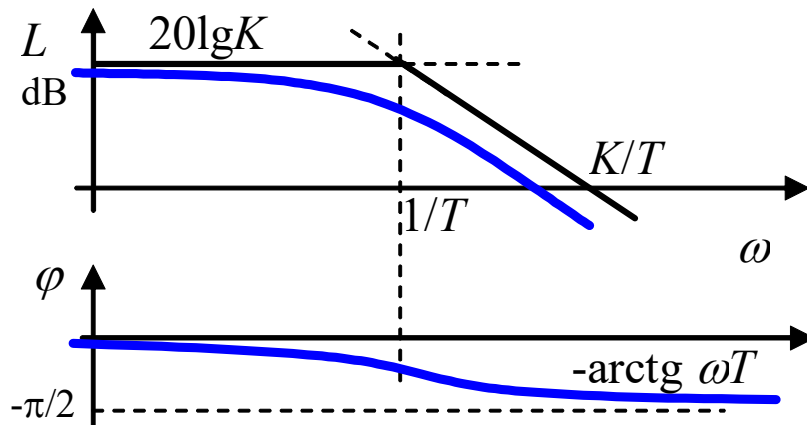
$$G(j\omega) = j\omega T_d$$



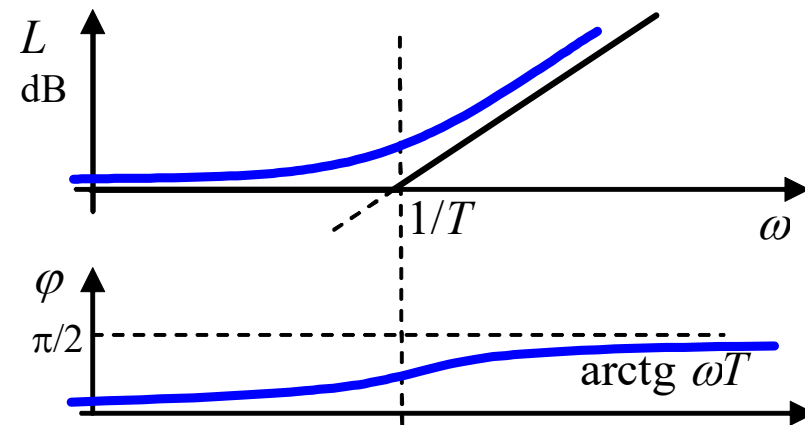
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T_i} = -j \frac{K}{\omega T_i}$$



$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

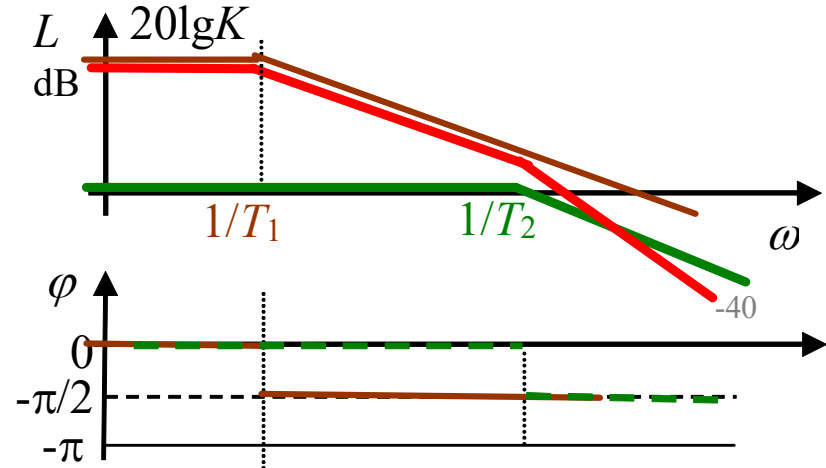
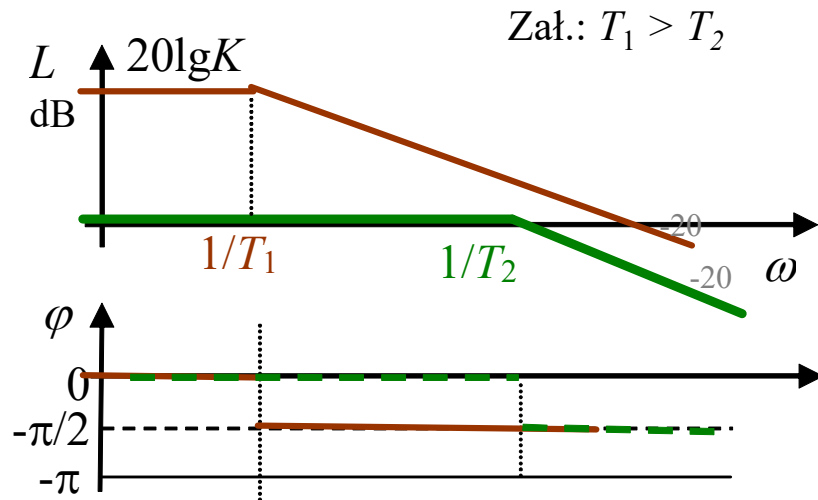


$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

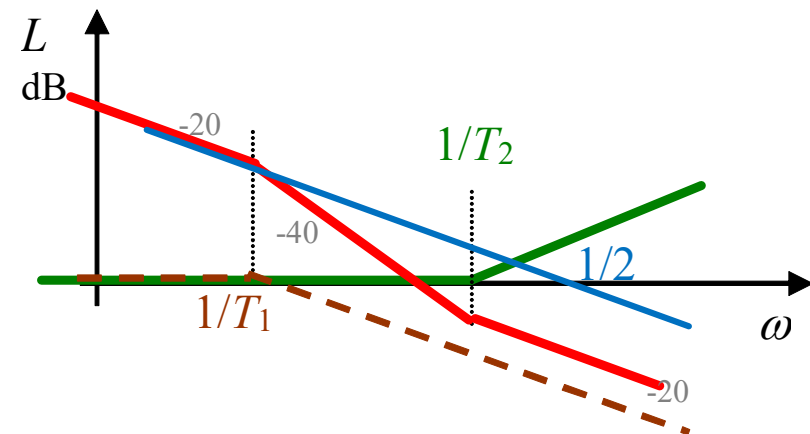
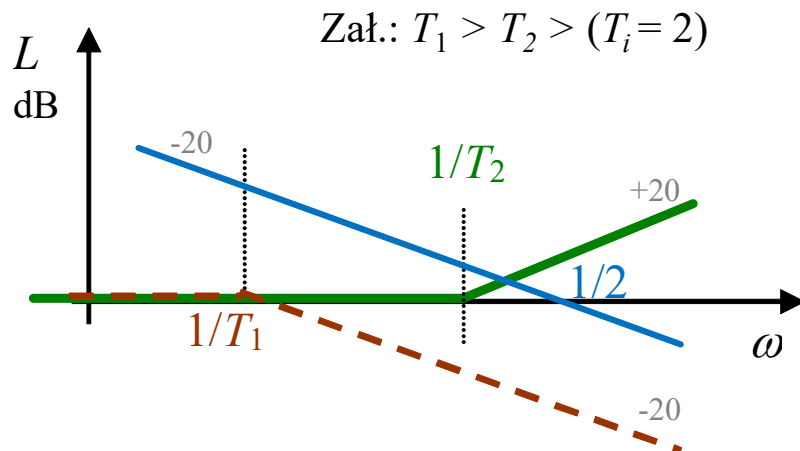


Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe (złożone)

$$\frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = \frac{K}{1 + j\omega T_1} \frac{1}{1 + j\omega T_2}$$

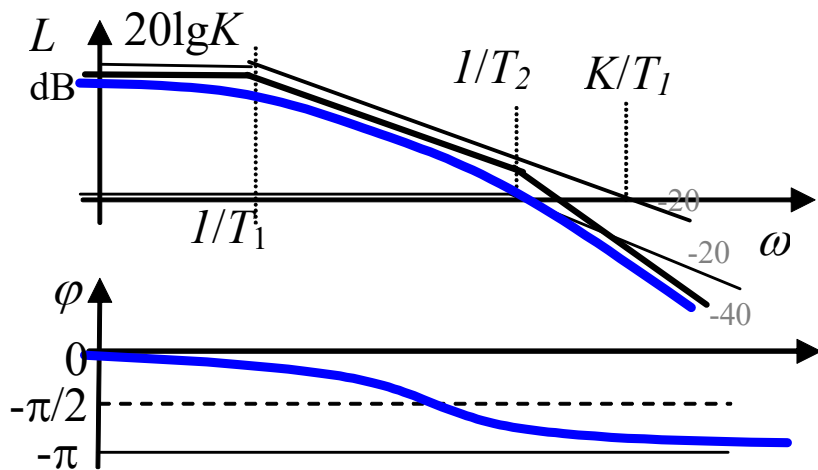


$$\frac{(1 + j\omega T_2)}{2s(1 + j\omega T_1)} = \frac{1}{2s} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega T_1)} \cdot (1 + j\omega T_2)$$

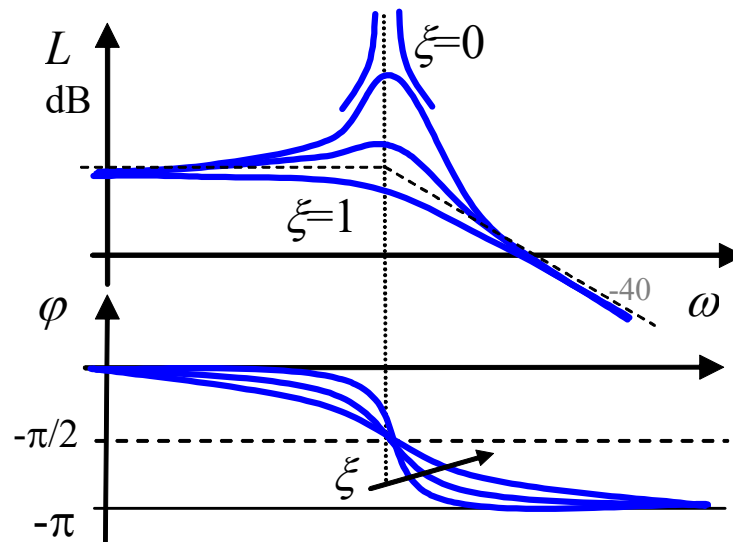


Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe (szczególne)

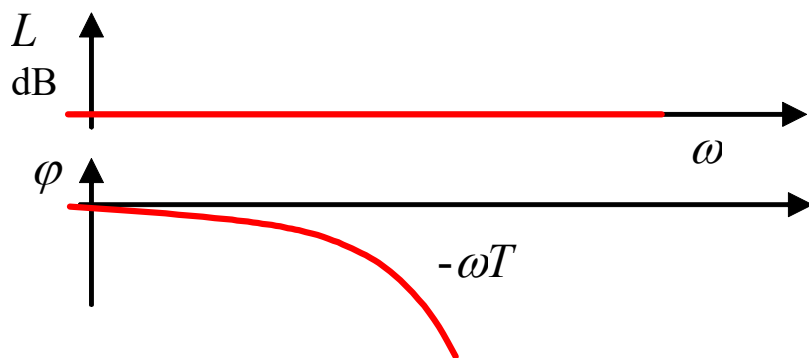
$$\frac{K}{1 + j2\xi T\omega + (j\omega T)^2} = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}, \xi > 1$$



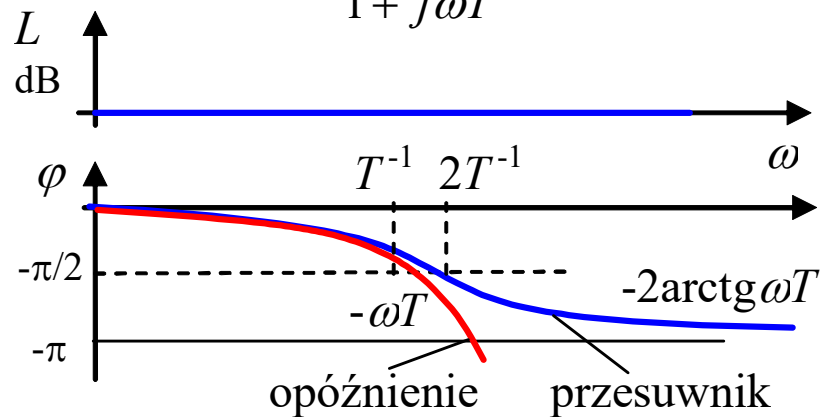
$$\frac{K}{1 + j2\xi T\omega + (j\omega T)^2}, \xi < 1$$



$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_0}$$



$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$



Własności logarytmicznych charakterystyk częstotliwościowych

- sumowanie charakterystyk dla członów połączonych szeregowo
- asymptoty charakterystyki amplitudowej – nachylenie +/- 20 dB/dek
- każdy biegun objawia się załamaniem asymptoty o -20 dB/dek
- każde zero objawia się załamaniem asymptoty o +20 dB/dek
- określony maksymalny błąd charakterystyk asymptotycznych członu inercyjnego i forsującego
 - dla częstości załamania popełnia się błąd 3dB
 - w odległości oktawy od częstości załamania – błąd 1 dB
- dla układów minimalnofazowych można otworzyć ch. fazową

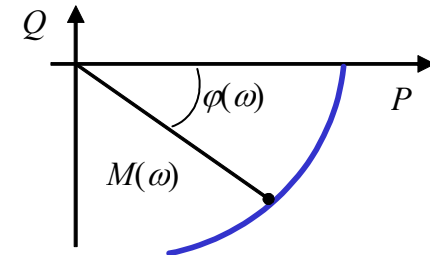
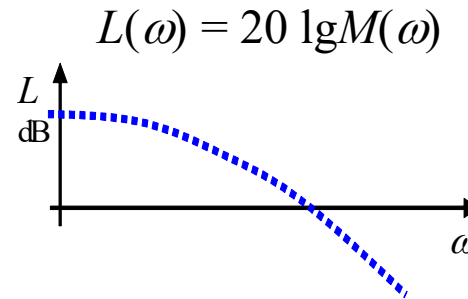
Wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych

Doświadczalnie na obiekcie

Wymuszenie: $u(t) = \sin \omega t$

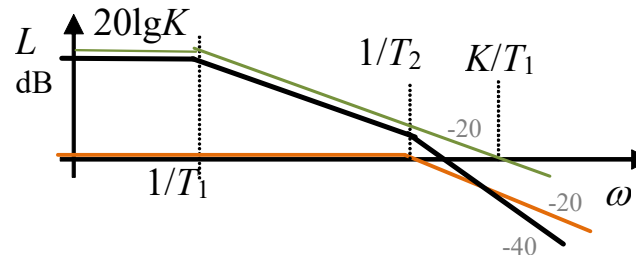
Stan ustalony: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega))$

Wzmocnienie: $M(\omega) = \frac{A(\omega)}{1}$



Analitycznie (charakterystyki asymptotyczne)

$$\frac{K}{(1 + j\omega T_1)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega T_2)}$$

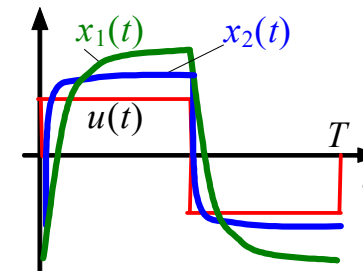
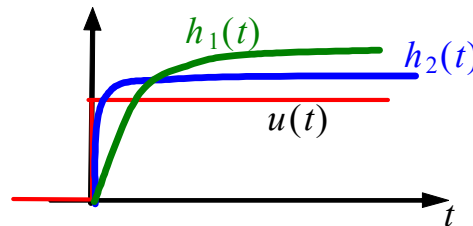
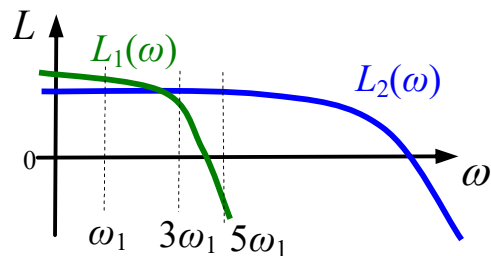


Symulacyjnie

$$\frac{K}{(1 + j\omega T_1)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega T_2)}$$

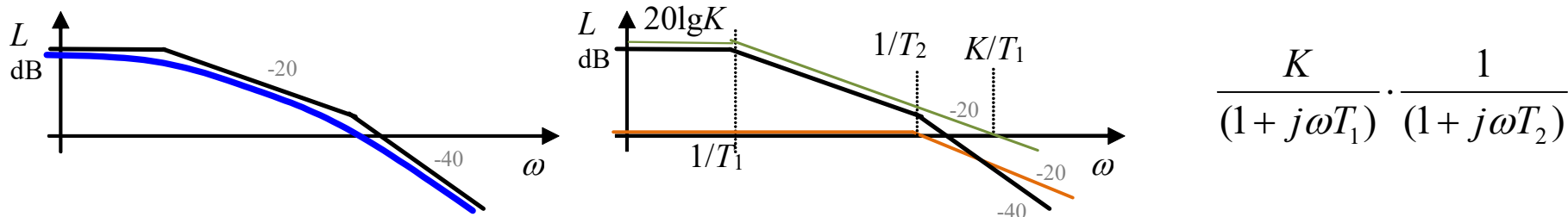
```
Skrypt: s = tf('s');
G = K / ((T1*s + 1) * (T2*s + 1));
bode(G);
nyquist(G);
```

Interpretacja

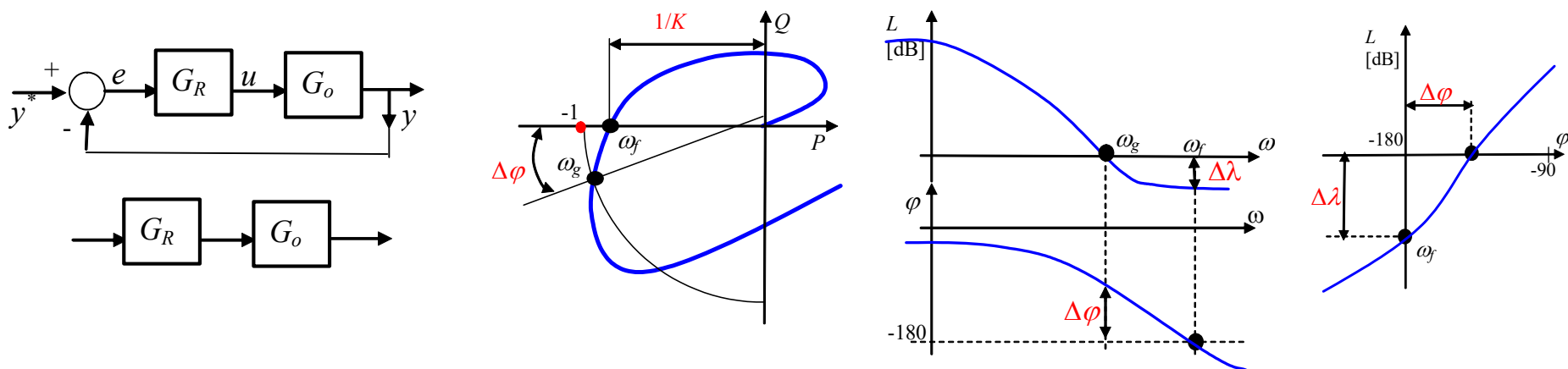


Zastosowanie charakterystyk częstotliwościowych

- Dokładny opis własności dynamicznych
- Identyfikacja modelu na podstawie charakterystyk częstotliwościowych



- Kryterium stabilności układu regulacji (✳)



- Projektowanie filtrów (✳)
- Korekcja własności dynamicznych (✳)
 - pasmo przenoszenia
 - kompensacja biegunów