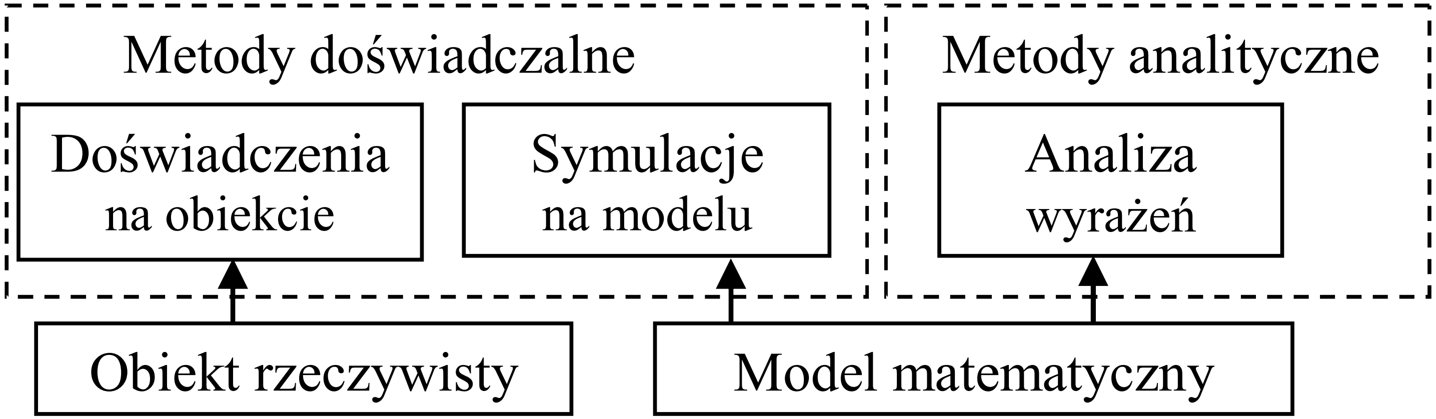
Własności układów dynamiki

Badania doświadczalne

- ❑ parametry statyczne
- ❑ **parametry dynamiczne**

Badania analityczne

- ❑ parametry statyczne
- ❑ **parametry dynamiczne**

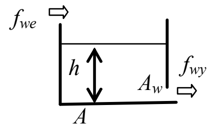


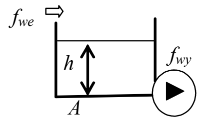
Parametry statyczne

Punkt równowagi (stan równowagi przy stałym wymuszeniu)

Układy liniowe mają jeden punkt równowagi

reguła i wyjątek (własności całkujące)



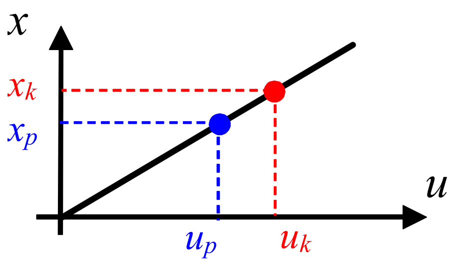


Stałowartościowe wzmocnienie układu (wzmocnienie układu)

$$a_0 x = b_0 u$$

$$x = \frac{b_0}{a_0} u = k_u u$$

$$k_u = \frac{\Delta x}{\Delta u} \quad \left(= \frac{x_p}{u_p} = \frac{x_k}{u_k} \right)$$



$$\Delta x = x_k - x_p$$

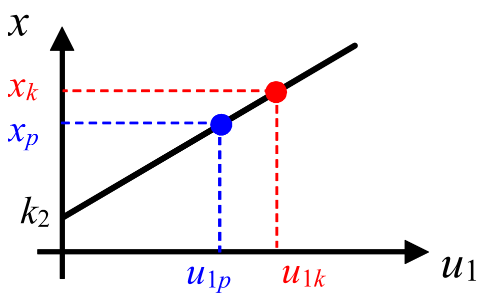
$$\Delta u = u_k - u_p$$

$$a_0 x = b_{01} u_1 + b_{02} u_2$$

$$x = \frac{b_{01}}{a_0} u_1 + \frac{b_{02}}{a_0} u_2 = k_u u_1 + k_2$$

$$k_u = \frac{\Delta x}{\Delta u}$$

(ogólna definicja)

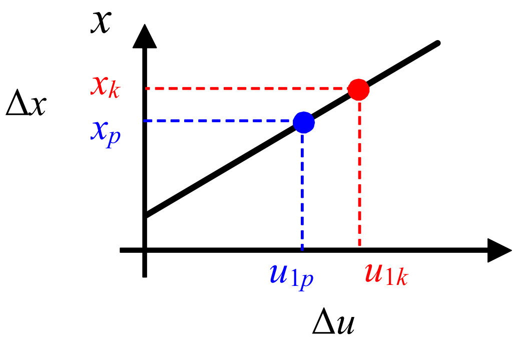


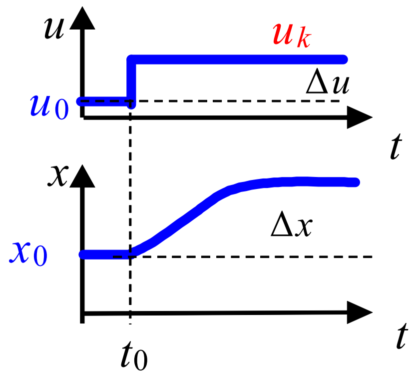
$$\Delta x = x_k - x_p$$

$$\Delta u = u_{1k} - u_{1p}$$

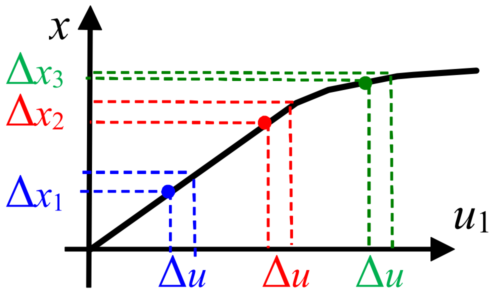
Parametry statyczne

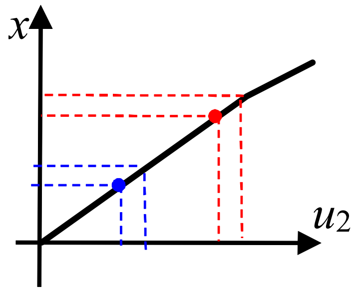
Stałowartościowe wzmocnienie układu (wzmocnienie układu): $k_u = \frac{\Delta x}{\Delta u}$



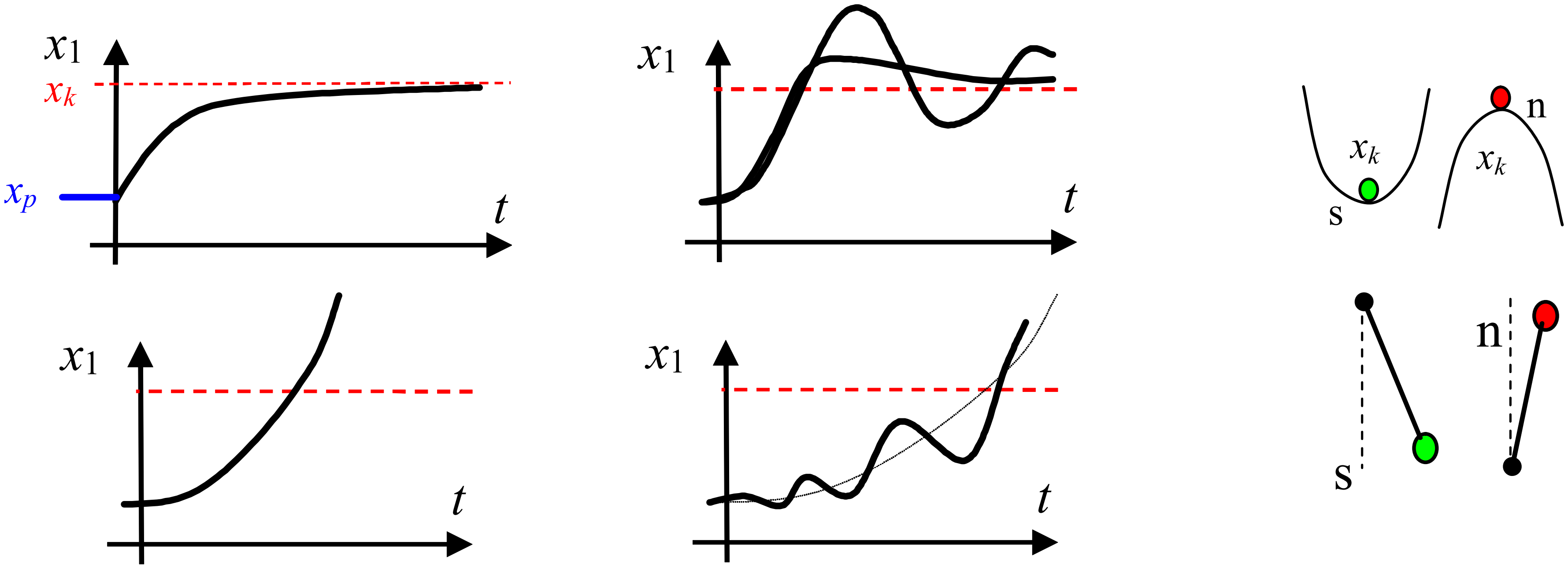


Wzmocnienie układów liniowych i nieliniowych





Stabilność i niestabilność układu



Układ stabilny przy stałym wymuszeniu (u_k) dąży do punktu równowagi (x_k)
Układ niestabilny trwa w punkcie równowagi, gdy jest to jego stan początkowy, ale najmniejsze zakłócenie powoduje trwałe oddalenie od tego punktu.

Stabilność – zdolność układu do osiągnięcia stanu równowagi.

Stabilność układu oznacza, że:
• końcowym stanem w tych badaniach jest stan równowagi (potocznie stabilizacja układu),
• po ustaniu zakłóceń układ samoistnie wraca do stanu równowagi.

Stabilność i niestabilność układu

Stabilność/niestabilność globalna
– nie zależy ani od wymuszenia, ani od warunków początkowych

Układy liniowe są stabilne (niestabilne) globalnie
Układy nieliniowe mogą być stabilne (niestabilne) globalnie,
ale mogą być stabilne (niestabilne) lokalnie.

Zastosowanie:
Doświadczalne badanie stabilności układów liniowych można ograniczyć do wyznaczenia reakcji na dowolne wymuszenie skokowe (impulsowe) w dowolnym punkcie pracy.

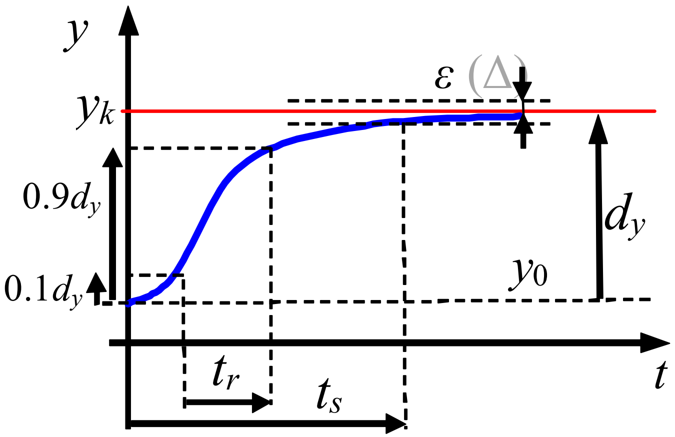
Różne definicje stabilności nie są sobie równoważne (❈):

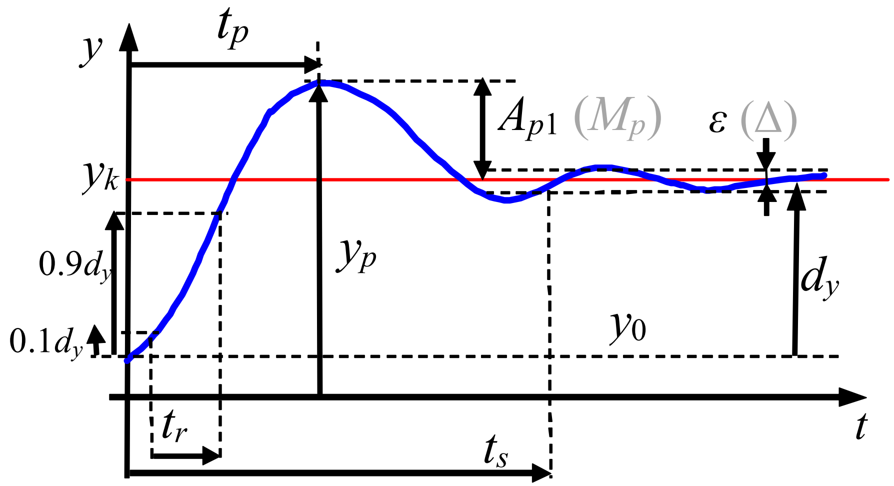
- **stabilność asymptotyczna** oznacza, że rozwiązanie $x(t)$ dąży do stanu równowagi
 (można uznać, że praktycznie osiąga ono stan równowagi)

- **stabilność sensie Lapunowa** oznacza, że rozwiązanie $x(t)$, które rozpoczyna się dostatecznie blisko stanu równowagi, pozostanie na zawsze dostatecznie blisko tego stanu
 (może nie osiągnąć stanu równowagi)

- **stabilność BIBO** (ang. Bounded Input Bounded Output) oznacza ograniczone rozwiązanie $x(t)$ przy ograniczonym wymuszeniu $u(t)$.
 Układ stabilny w sensie BIBO nie musi być stabilny w sensie Lapunowa
 BIBO - „słabsza" wersja stabilności (obejmuje przypadki graniczne)

Parametry dynamiki



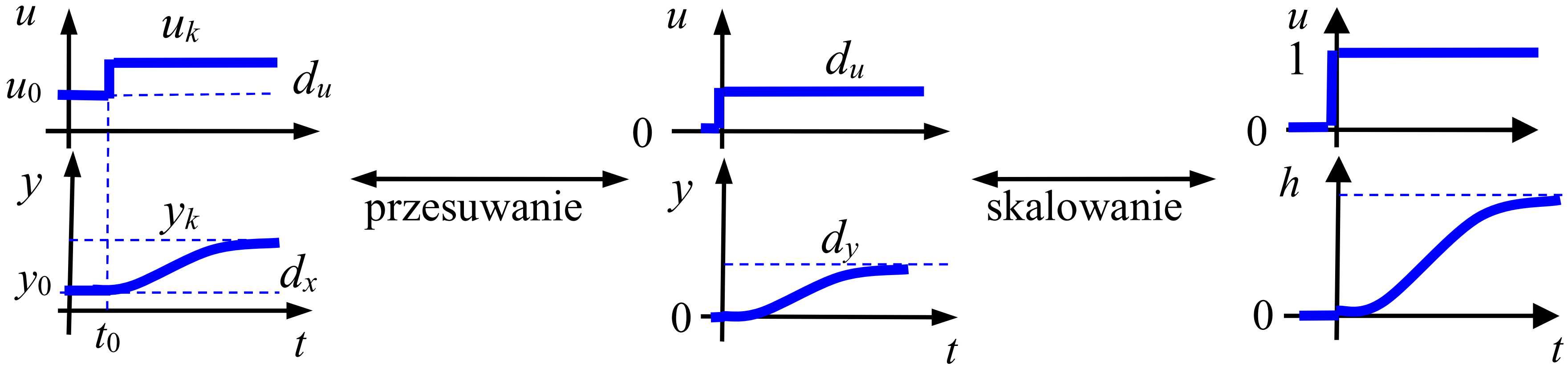


- y_0 – wartość początkowa, punkt pracy
- y_k – wartość końcowa, stan ustalony (ang. *steady state, final value*, y_s)
- ε – zakładana dokładność (tolerancja pomiarowa)
- t_s – czas stabilizacji odpowiedzi (ang. *settling time*)
- t_r – czas narostu (ang. *rise time*)
- t_p – czas pierwszego przeregulowania (ang. *peak time*)
- y_p – wartość szczytowa, maksymalna (ang. *peak amplitude*)
- A_{pi} – przeregulowanie (ang. *overshoot*, M_p) – wartość bezwzględna (A_{p1}) i względna (A_{p1} / d_y)

Parametry dynamiki

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & \text{dla } t < t_0 \\ u_0 + d_u & \text{dla } t \geq t_0 \end{cases}$$

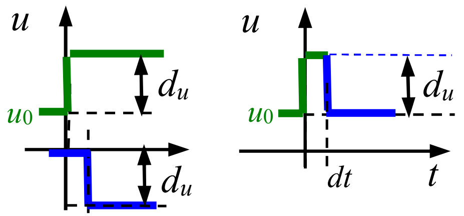
$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$



$$h(t) = (y(t) - y_0)/d_u$$

normalizacja

$$y(t) = d_u h(t) + y_0$$



$$g(t) = dh(t)/dt$$

$$h(t) = \int g(t)dt$$

Badania analityczne

Punkt równowagi – rozwiązanie układu równań statycznych

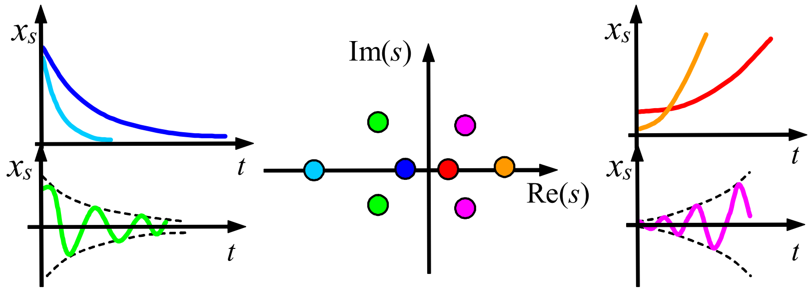
Stabilność – położenie biegunów układu

Model układu

1) $a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$

2) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$

3) $G(s) = \dfrac{L(s)}{M(s)} = \dfrac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0}$



Równanie charakterystyczne

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\det(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) = 0$$

$$M(s) = 0$$

Pierwiastki równania charakterystycznego
(bieguny układu)

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t)$$

Kryteria stabilności układu liniowego – alternatywne warunki asymptotycznej stabilności układu:

1° wszystkie bieguny układu leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej (mają ujemną część rzeczywistą),

2° każdy ze składników rozwiązania swobodnego $x_s(t)$ zanika z czasem (do zera),

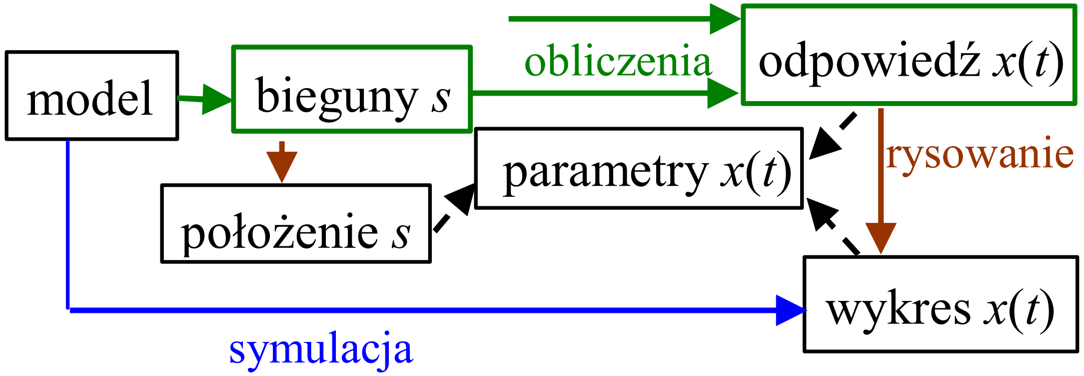
3° rozwiązanie swobodne $x_s(t)$ zanika z czasem – zostaje rozwiązanie wymuszone,

4° przy braku wymuszenia układ samoistnie wraca do stanu równowagi,

5° odpowiedź impulsowa zanika z czasem do zera.

Kryteriów tych nie spełniają bieguny, które leżą na osi Im, ponieważ powodują, że składowa swobodna nie zanika do zera. Mówimy o układach na granicy stabilności

Badania analityczne



zasada superpozycji

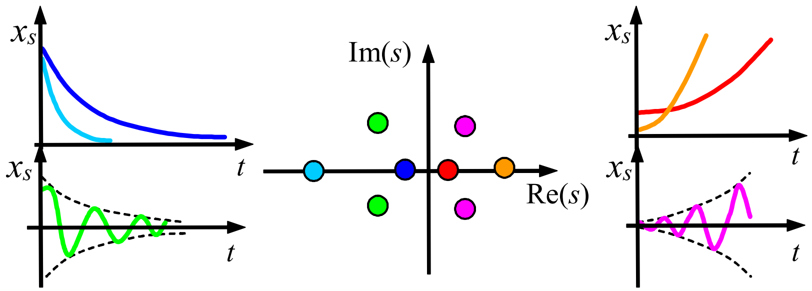
$$x(t) = x_s(t) + x_w(t)$$

$x_s(t)$: rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa)

$x_w(t)$: rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona)

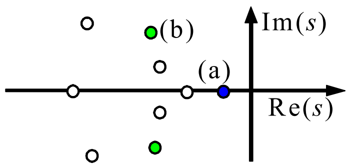
$$x_s(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \ldots + A_n e^{s_n t}$$

$$A_1 e^{(\alpha + j\omega)t} + A_2 e^{(\alpha - j\omega)t} = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_1)$$



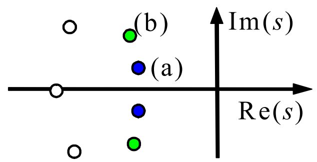
Przykłady najbardziej znaczących biegunów układu ze względu na:

(a) t_s



$$t_s \approx 4/\left|\mathrm{Re}(s_i)\right|_{\min}$$

(b) μ



$$\mu = \left|\mathrm{Im}(s_i)/\mathrm{Re}(s_i)\right|_{\max}$$