Preliminary D (Dynamika)

Materiały robocze (maj21)

I. Równania różniczkowe

1. Klasyczna metoda rozwiązywania liniowego równania różniczkowego

I. Rozwiązanie swobodne (składowa swobodna, przejściowa) $x_s(t)$ – rozwiązanie równania różniczkowego jednorodnego (bez wymuszenia)

(1) Ustalić postać równania jednorodnego (wyzerować wymuszenie):

$$a_n x_s^{(n)}(t) + a_{n-1} x_s^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}_s(t) + a_0 x_s(t) = 0 \tag{1-1}$$

(2) Założyć rozwiązanie w postaci funkcji eksponencjalnej o parametrach A i λ:

$$x_s(t) = Ae^{\lambda t} \tag{1-2}$$

Uzasadnienie

(3) Podstawić założone rozwiązanie (1-2) do równania jednorodnego (1-1):

$$a_n \lambda^n Ae^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1} Ae^{\lambda t} + \ldots + a_1 \lambda Ae^{\lambda t} + a_0 Ae^{\lambda t} = 0 \tag{1-3}$$

(4) Równanie (1-3) podzielić obustronnie przez $Ae^{\lambda t}$, co prowadzi do równania algebraicznego, nazywanego **równaniem charakterystycznym**:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{1-4}$$

(5) Rozwiązać równanie charakterystyczne – wyznaczyć n pierwiastków $\lambda_1 \div \lambda_n$.

(6) Pierwiastki mogą być rzeczywiste i zespolone, jedno- i wielokrotne. Stąd wynika postać $x_s(t)$:

(1°) Jeśli wszystkie pierwiastki równania $\lambda_1 \div \lambda_n$ są rzeczywiste i różne, to

$$\boxed{x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t}} \tag{1-5}$$

(2°) W przypadku pierwiastków wielokrotnych, np. k-ty pierwiastek λ_k jest p-krotny ($\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+p-1}$), składowa $x_s(t)$ zawiera p składników postaci:

$$\boxed{(A_k + A_{k+1}t + A_{k+2}t^2 + \ldots + A_{k+p-1}t^{p-1})e^{\lambda_k t}} \tag{1-6}$$

(3°) Jeśli występują pierwiastki zespolone (para liczb sprzężonych), np. $\lambda_1 = \alpha + j\omega_r$ oraz $\lambda_2 = \alpha - j\omega_r$, to $x_s(t)$ zawiera składniki, które można zapisać na trzy równoważne sposoby:

(a) $$A_1 e^{(\alpha + j\omega_r)t} + A_2 e^{(\alpha - j\omega_r)t} = e^{\alpha t}\left(A_1 e^{j\omega_r t} + A_2 e^{-j\omega_r t}\right) \tag{1-7}$$

(b) $$e^{\alpha t}\left(B_1 \cos\omega_r t + B_2 \sin\omega_r t\right) \tag{1-8}$$

gdzie: $B_1 = A_1 + A_2$, $B_2 = j(A_1 - A_2)$.

(c) $$Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t + \varphi_1) = Ae^{\alpha t}\cos(\omega_r t - \varphi_2) \tag{1-9}$$

gdzie: $A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, $\varphi_1 = arc\,tg(B_1 / B_2)$, $\varphi_2 = arc\,tg(B_2 / B_1)$.

Współczynniki A_1 i A_2 (1-7) są liczbami zespolonymi, a współczynniki B_1 i B_2 (1-8), obliczone na ich podstawie, są liczbami rzeczywistymi (zapis: $B_1 = A_1 + A_2$, $B_2 = A_1 - A_2$ jest nieprecyzyjny).

II. Rozwiązanie wymuszone (składowa wymuszona, ustalona) $x_w(t)$ – rozwiązanie równania różniczkowego dla konkretnej funkcji wymuszającej $f(t)$ podawanej na wejście $u(t)$.

(1) Wypisać funkcję wymuszającą $f(t)$ i jej kolejne pochodne:

$$f(t),\ \dot{f}(t),\ \ddot{f}(t), \ldots \tag{1-10}$$

Listę kończą wyrażenia równe zero lub funkcje, które zaczynają się powtarzać (np. w przypadku funkcji sin i cos). Jeśli wśród tych wyrażeń są takie, które występują także w składowej $x_s(t)$, to należy je pomnożyć przez t^k, gdzie k jest najmniejszym wykładnikiem, który zapewni, że wyrażenia będą się różnić od składników składowej swobodnej.

(2) Założyć, że rozwiązanie wymuszone $x_w(t)$ jest sumą składników postaci:

$$x_w(t) = C_1 f(t) + C_2 \dot{f}(t) + .. \tag{1-11}$$

gdzie C_i są parametrami rozwiązania.

(3) Podstawić wymuszenie $f(t)$ i założone rozwiązanie $x_w(t)$ do równania (1-10):

$$a_n x_w^{(n)}(t) + a_{n-1} x_w^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}_w(t) + a_0 x_w(t) = b_m f^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{f}(t) + b_0 f(t) \tag{1-12}$$

(4) Porównać współczynniki przy takich samych funkcjach w całym równaniu.

(5) Rozwiązać otrzymany układ równań względem stałych parametrów C_1, C_2, ...

III. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (całka ogólna), czyli suma rozwiązania swobodnego (z parametrami A_i) i rozwiązania wymuszonego:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t} + x_w(t) \tag{1-13}$$

IV. Rozwiązanie szczególne równania różniczkowego (całka szczególna) – rozwiązanie ogólne z określonymi parametrami $A_1 \div A_n$. Parametry A_i są obliczane na podstawie n warunków początkowych, czyli zbioru n wartości wybranych spośród n+1 możliwości:

$$x^{(n)}(t_0),...,\dot{x}(t_0),x(t_0)\,, \tag{1-14}$$

Uzasadnienia i dowody

Dowód równości (1-7) i (1-8), czyli

$$B_1 \cos b + B_2 \sin b = A_1 e^{+jb} + A_2 e^{-jb} \tag{1-15}$$

polega na zastosowaniu wzorów Eulera:

$$B_1 \cos b + B_2 \sin b = \frac{B_1}{2}(e^{jb}+e^{-jb}) + \frac{B_2}{2j}(e^{jb}-e^{-jb}) \tag{1-16}$$

i uporządkowaniu otrzymanego wyrażenia:

$$\left(\frac{B_1}{2}+\frac{B_2}{2j}\right)e^{jb} + \left(\frac{B_1}{2}-\frac{B_2}{2j}\right)e^{-jb} = \left(\frac{B_1}{2}-j\frac{B_2}{2}\right)e^{jb} + \left(\frac{B_1}{2}+j\frac{B_2}{2}\right)e^{-jb} \tag{1-17}$$

Stąd wynika zależność (1-15), która jest stosowana „w obu kierunkach":

$$B_1 \cos b + B_2 \sin b = A_1 e^{jb} + A_2 e^{-jb}, \tag{1-18}$$

gdzie: $A_1 = (B_1 - jB_2)/2, A_2 = (B_1 + jB_2)/2$ lub $B_1 = A_1 + A_2, B_2 = j(A_1 - A_2)$

Warto zwrócić uwagę, że współczynniki B_1 i B_2 są liczbami rzeczywistymi, a współczynniki A_1 i A_2 są liczbami zespolonymi.

Dowód równości (1-8) i (1-9), czyli

$$B_1 \cos b + B_2 \sin b = A \sin(b+\varphi_1) = A\cos(b-\varphi_2) \tag{1-19}$$

wykorzystuje przedstawienie wyrażeń $B_1 + jB_2$ i $B_1 - jB_2$ w postaci wykładniczej:

$B_1 + jB_2 = Ae^{+j\varphi_2}$, gdzie $A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ oraz $\varphi_2 = \mathrm{arctg}(B_2/\mathrm{B}_1)$.
$B_1 - jB_2 = Ae^{-j\varphi_2}$

Stąd $B_1 = A\left(e^{+j\varphi_2} + e^{-j\varphi_2}\right)/2$, $B_2 = A\left(e^{+j\varphi_2} - e^{-j\varphi_2}\right)/(2j)$, a po zastosowaniu wzorów Eulera jest $B_1 = A\cos\varphi_2$, $B_2 = A\sin\varphi_2$

Po podstawieniu B_1 i B_2 w zależności (1-19) i wykorzystaniu wzorów trygonometrycznych otrzymujemy:

$$B_1 \cos b + B_2 \sin b = A\cos\varphi_2 \cos b + A\sin\varphi_2 \sin b = A\cos(\varphi_2 - b) = A\cos(b-\varphi_2) \tag{1-20}$$

co odpowiada zależności (1-19)

$$B_1 \cos b + B_2 \sin b = A\cos(b-\varphi_2) \tag{1-21}$$

Stosując wzory redukcyjne, otrzymujemy:

$$A\cos(b-\varphi_2) = A\sin(90^\circ + (b-\varphi_2)) = A\sin(b + (90^\circ - \varphi_2)) = A\sin(b+\varphi_1)\,, \tag{1-22}$$

gdzie $\varphi_1 = 90^\circ - \varphi_2$.

Skoro $\varphi_2 = \mathrm{arc\,tg}(B_2/B_1)$, to $B_2/B_1 = \mathrm{tg}(\varphi_2) = \mathrm{tg}(90^\circ - \varphi_1) = \mathrm{ctg}(\varphi_1) = 1/\mathrm{tg}(\varphi_1)$. Więc $\varphi_1 = \mathrm{arc\,tg}(B_1/B_2)$.

2. Rozwiązania równania pierwszego rzędu

2.1. Odpowiedź skokowa i impulsowa równania 1.rzędu

Analizowane równanie ma postać:

$$a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=b_0u(t)\ ,\ a_1\neq 0 \qquad (2\text{-}1)$$

Rozwiązanie dla ...

Odpowiedź skokowa, tzn. $u(t)=1(t)$	**Odpowiedź na skok od u_0 do u_k, ($d_u= u_k - u_0$)**
I. Rozwiązanie swobodne:	
$a_1\lambda+a_0=0 \;\rightarrow\; \lambda=-a_0/a_1$	
$x_s(t)=Ae^{\lambda t}$	
II. Rozwiązanie wymuszone ($a_0\neq 0$)	
Dla $u(t)=1(t)\rightarrow u_k=1$	Po skoku $\rightarrow u_k$
$a_0x_k=b_0 \;\rightarrow\; x_w(t)=x_k=b_0/a_0=k_{ukl}$	$a_0x_k=b_0u_k \;\rightarrow\; x_w(t)=x_k=u_kb_0/a_0=k_{ukl}u_k$
III. Rozwiązanie ogólne	
$x(t)=Ae^{\lambda t}+x_k$, gdzie: $\lambda=-a_0/a_1$, $x_k=b_0/a_0=k_{ukl}$	$x(t)=Ae^{\lambda t}+x_k$, gdzie: $\lambda=-a_0/a_1$, $x_k=u_kb_0/a_0=k_{ukl}u_k$
IV. Rozwiązanie szczególne	
Dla $u(t)=1(t)\rightarrow u(0)=u_p=0 \;\rightarrow\; x_p=0$	Przed skokiem $u(0)=u_p \;\rightarrow\; x_p=u_pb_0/a_0=k_{ukl}\,u_p$
$0=A\cdot 1+x_k\rightarrow A=-x_k$	$x_p=A\cdot 1+x_k\rightarrow A=x_p-x_k=-d_x$
$h(t)=-x_ke^{\lambda t}+x_k=x_k\left(1-e^{\lambda t}\right)=k_{ukl}\left(1-e^{\lambda t}\right)$	$x(t)=(x_p-x_k)e^{\lambda t}+x_k=x_k-d_xe^{\lambda t}$
gdzie: $\lambda=-a_0/a_1$, $x_k=b_0/a_0=k_{ukl}$	gdzie: $\lambda=-a_0/a_1$, $x_k=u_kb_0/a_0$, $x_p=u_pb_0/a_0$, $d_x=k_{ukl}\,(u_k-u_p)$
$\dot{h}(t)=-\lambda x_ke^{\lambda t}=-\dfrac{-a_0}{a_1}\dfrac{b_0}{a_0}e^{\lambda t}=\dfrac{b_0}{a_1}e^{\lambda t}$	$\dot{x}(t)=-\lambda d_xe^{\lambda t}=\dfrac{a_0d_x}{a_1}e^{\lambda t}$
Odpowiedź impulsowa, tzn. $u(t)=\delta(t)$	**Odpowiedź na impuls na poziomie u_0**
$g(t)=\dot{h}(t)=\dfrac{b_0}{a_1}e^{\lambda t}=ke^{\lambda t}$	$x(t)=x_p-\lambda d_xe^{\lambda t}=x_p+\dfrac{a_0d_x}{a_1}e^{\lambda t}$

Uwaga: Gdy równanie znormalizowane ($k_{ukl}=1 \rightarrow b_0=a_0$), to $h(t)=1-e^{\lambda t}$, $g(t)=-\lambda e^{\lambda t}$

Odpowiedź skokowa i impulsowa dla $a_1\neq 0$ i $a_0=0$, czyli rozwiązanie $a_1\dot{x}(t)=b_0u(t)$ dla $u(t)=1(t)$ i dla $u(t)=\delta(t)$

$$h(t)=\frac{b_0}{a_1}\int 1(t)dt=\frac{b_0}{a_1}t\ ,\ g(t)=\dot{h}(t)=\frac{b_0}{a_1}$$

2.2. Odpowiedź układu 1.rzędu na wymuszenie sinusoidalne

I. Rozwiązanie swobodne: $x_s(t)=Ae^{\lambda t}$, gdzie $\lambda=-a_0/a_1$, ($a_1\neq 0$)

II. Rozwiązanie wymuszone dla $u(t)=U_m\sin(\omega_0t)$ (odpowiedź częstotliwościowa)

$$a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=b_0U_m\sin(\omega_0t)$$

1° Elementy rozwiązania $x_w(t)$: $\sin(\omega_0t)$, $\omega_0\cos(\omega_0t)$. Rozwiązanie $x_w(t)$ skonstruowano w dwóch wariantach: a) stała C_2 zawiera pulsację ω_0; b) stała C_2 zawiera pulsacji ω_0 – ostateczna postać rozwiązania $x_w(t)$ jest identyczna.

	wariant a	wariant b
Postać rozwiązania	$x_w(t)=C_1\sin(\omega_0t)+C_2\cos(\omega_0t)$ $\dot{x}_w(t)=C_1\omega_0\cos(\omega_0t)-C_2\omega_0\sin(\omega_0t)$	$x_w(t)=C_1\sin(\omega_0t)+C_2\omega_0\cos(\omega_0t)$ $\dot{x}_w(t)=C_1\omega_0\cos(\omega_0t)-C_2\omega_0^2\sin(\omega_0t)$
Podstawienie	$a_1\left(C_1\omega_0\cos(\omega_0t)-C_2\omega_0\sin(\omega_0t)\right)+$ $+a_0\left(C_1\sin(\omega_0t)+C_2\cos(\omega_0t)\right)=b_0U_m\sin(\omega_0t)$	$a_1\left(C_1\omega_0\cos(\omega_0t)-C_2\omega_0^2\sin(\omega_0t)\right)+$ $+a_0\left(C_1\sin(\omega_0t)+C_2\omega_0\cos(\omega_0t)\right)=b_0U_m\sin(\omega_0t)$
Uporządkowanie	$(a_1C_1\omega_0+a_0C_2)\cos(\omega_0t)+(a_0C_1-a_1C_2\omega_0)\sin(\omega_0t)=$ $=b_0U_m\sin(\omega_0t)$	$(a_1C_1+a_0C_2)\omega_0\cos(\omega_0t)+(a_0C_1-a_1C_2\omega_0^2)\sin(\omega_0t)=$ $=b_0U_m\sin(\omega_0t)$
Układ równań	$\begin{cases}a_1C_1\omega_0+a_0C_2=0\\ a_0C_1-a_1C_2\omega_0=b_0U_m\end{cases}$	$\begin{cases}a_1C_1+a_0C_2=0\\ a_0C_1-a_1C_2\omega_0^2=b_0U_m\end{cases}$
Rozwiązanie C_1, C_2	$C_1=\dfrac{b_0U_m}{a_0^2+(a_1\omega_0)^2}$, $C_2=\dfrac{-a_1\omega_0b_0U_m}{a_0^2+(a_1\omega_0)^2}$	$C_1=\dfrac{a_0b_0U_m}{a_0^2+(a_1\omega_0)^2}$, $C_2=\dfrac{-a_1b_0U_m}{a_0^2+(a_1\omega_0)^2}$
Rozwiązanie $x_w(t)$	$x_w(t)=\dfrac{b_0U_m}{a_0^2+(a_1\omega_0)^2}\left(a_0\sin(\omega_0t)-a_1\omega_0\cos(\omega_0t)\right)$	

Równoważna postać $x_w(t)$ na podstawie (1-7)÷(1-9):

$$B_1\cos(\omega_0t)+B_2\sin(\omega_0t)=B\sin(\omega_0t+\varphi),\ \text{gdzie: } B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}\ ,\ \varphi=\mathrm{arctg}(B_1/B_2)$$

$$x_w(t)=\frac{b_0U_m}{a_0^2+(a_1\omega_0)^2}\sqrt{a_0^2+(a_1\omega_0)^2}\sin(\omega_0t+\varphi),\ \varphi=\mathrm{arctg}\frac{-a_1\omega_0}{a_0}$$

Odpowiedź częstotliwościowa

$$\boxed{x_w(t) = \frac{b_0 U_m}{\sqrt{a_0^2 + (a_1\omega_0)^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

2° Alternatywny sposób rozwiązania ....

III. Rozwiązanie ogólne

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + \frac{b_0 U_m}{\sqrt{a_0^2 + (a_1\omega)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

IV. Rozwiązanie szczególne (wyznaczyć *A* dla wybranych warunków początkowych)

3. Rozwiązania równania drugiego rzędu

3.1. Odpowiedzi skokowe i impulsowe równania 2.rzędu

$$a_2\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=b_0u(t)\text{, gdzie } a_2\neq 0,\ a_0\neq 0 \qquad (3\text{-}1)$$

Rozwiązanie

Odpowiedź skokowa, $u(t)=1(t)$	**Odpowiedź skokowa, $u(t)=1(t)$**
I. Rozwiązanie swobodne:	
$a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0 \ \rightarrow\ \Delta=a_1^2-4a_2a_0$	
1) gdy $\Delta \geq 0$ (bieguny rzeczywiste)	**2) gdy $\Delta<0$ (bieguny zespolone)**
$\lambda_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2},\ \lambda_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{\Delta}}{2a_2}$ $\quad(a_2\neq 0)$ $\lambda_{1,2}=\alpha_{1,2}\pm j0$, gdzie $\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}\\ \alpha_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{\Delta}}{2a_2}\end{cases}$	$\lambda_{21}=\dfrac{-a_1}{2a_2}\pm j\dfrac{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a_2}$ $\quad(a_2\neq 0)$ $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\omega_r$,gdzie $\alpha=\dfrac{-a_1}{2a_2},\ \omega_r=\dfrac{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a_2}$ $\lambda_{1,2}=-\sigma\pm j\omega_r$,gdzie $\sigma=\dfrac{a_1}{2a_2},\ \omega_r=\dfrac{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a_2}$ (alternatywne)
a) $x_s(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t},\ \alpha_1\neq\alpha_2,$ $\quad(\Delta>0)$ b) $x_s(t)=A_1e^{\alpha t}+A_2te^{\alpha t},\ \alpha=\alpha_1=\alpha_2,$ $\quad(\Delta=0)$	a) $x_s(t)=A_1e^{(\alpha+j\omega_r)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega_r)t}$ b) $x_s(t)=e^{\alpha t}\left(B_1\cos\omega_r t+B_2\sin\omega_r t\right)$ c) $x_s(t)=Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1),\ \varphi_1=arc\,tg\left(B_1/B_2\right)$ $x_s(t)=Ae^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2),\ \varphi_2=arc\,tg\left(B_2/B_1\right)$
II. Rozwiązanie wymuszone dla skoku jednostkowego $u(t)=1(t)$ $\rightarrow$ gdy $t>0$ to $u_k=1$	
$a_0x_k=b_0u_k \ \rightarrow\ x_w(t)=x_k=\dfrac{b_0u_k}{a_0}=k_{ukl}$ $\quad(a_0\neq 0)$	
III. Rozwiązanie ogólne	
a) $x(t)=x_k+A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$ b) $x_s(t)=x_k+A_1e^{\alpha t}+A_2te^{\alpha t}$, gdzie: $x_k=\dfrac{b_0}{a_0}=k_{ukl},\ \begin{cases}\alpha_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}\\ \alpha_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{\Delta}}{2a_2}\end{cases},\ \alpha=\dfrac{-a_1}{2a_2}$	a) $x(t)=x_k+A_1e^{(\alpha+j\omega_r)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega_r)t}$ b) $x(t)=x_k+e^{\alpha t}\left(B_1\cos\omega_r t+B_2\sin\omega_r t\right)$ c) $x(t)=x_k+Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1),\ \varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{-\omega_r}{\alpha}\right)$ $x(t)=x_k+Ae^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2),\ \varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\alpha}{-\omega_r}\right)$ gdzie: $x_k=\dfrac{b_0}{a_0}=k_{ukl},\ \alpha=\dfrac{-a_1}{2a_2},\ \omega_r=\dfrac{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a_2}$
IV. Rozwiązanie szczególne - warunki początkowe dla odpowiedzi skokowej: $u(0)=0$, $\ddot{x}(0)=0,\ \dot{x}(0)=0$ $(\rightarrow x(0)=0)$	
Rozwiązanie 1a: $h(t)=$ $k_{ukl}\left(1+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_1 t}-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_2 t}\right)$ Rozwiązanie obejmuje człon oscylacyjny ($+\omega_n^2$) i komplementarny ($-\omega_n^2$) (r.3.2) Rozwiązanie 1b: $h(t)=$ $k_{ukl}\left(1-e^{\alpha t}+\alpha te^{\alpha t}\right)$	Rozwiązanie 2a: $h(t)=$ $k_{ukl}\left(1+\dfrac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha+j\omega_r)t}-\dfrac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha-j\omega_r)t}\right)$ Rozwiązanie 2b: $h(t)=$ $k_{ukl}\left(1-e^{\alpha t}\left(\cos\omega_r t-\dfrac{\alpha}{\omega_r}\sin\omega_r t\right)\right)$ Rozwiązanie 2c: $h(t)=$ $k_{ukl}\left(1-\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)\right),\ \varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{-\omega_r}{\alpha}\right)$ $k_{ukl}\left(1-\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)\right),\ \varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\alpha}{-\omega_r}\right)$

Odpowiedź impulsowa, $u(t)=\delta(t)$	**Odpowiedź impulsowa, $u(t)=\delta(t)$**
Rozwiązanie 1a: $g(t)=$ $k_{ukl}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\left(e^{\alpha_1 t}-e^{\alpha_2 t}\right)$ **Rozwiązanie 1b:** $g(t)=$ $k_{ukl}\alpha\left(-e^{\alpha t}+\alpha t e^{\alpha t}\right)$	**Rozwiązanie 2a:** $g(t)=$ $k_{ukl}\frac{\alpha^2+\omega_r^2}{2j\omega_r}\left(e^{(\alpha+j\omega_r)t}-e^{(\alpha-j\omega_r)t}\right)$ **Rozwiązanie 2b:** $g(t)=$ $k_{ukl}e^{\alpha t}\frac{\alpha^2+\omega_r^2}{\omega_r}\sin\omega_r t$ **Rozwiązanie 2c:** $g(t)=$ $k_{ukl}\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\left(\omega_r\cos(\omega_r t+\varphi_1)-\alpha\sin(\omega_r t+\varphi_1)\right)$
Obejmuje człon oscylacyjny ($+\omega_n^2$, $\lvert\xi\rvert\ge 1$) i człon ($-\omega_n^2$)	Obejmuje człon oscylacyjny ($+\omega_n^2$, $\lvert\xi\rvert<1$)

Rozwiązanie 1a: $x(t)=x_k+A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$

$$\begin{cases} x(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}+x_k \\ \dot{x}(t)=\alpha_1A_1e^{\alpha_1 t}+\alpha_2A_2e^{\alpha_2 t}\end{cases}$$

Z warunków początkowych w chwili $t=0_-$ jest:

$$\begin{cases}0=A_1+A_2+x_k\\ 0=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_k=-(A_1+A_2)\\ A_2=\frac{-\alpha_1A_1}{\alpha_2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_k=-\left(A_1-\frac{\alpha_1A_1}{a_2}\right)\\ A_2=\frac{-\alpha_1A_1}{\alpha_2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{-A_1(\alpha_2-\alpha_1)}{\alpha_2}=x_k\\ A_2=\frac{-\alpha_1A_1}{\alpha_2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_1=x_k\frac{-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}=x_k\frac{\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\\ A_2=x_k\frac{-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}\end{cases}$$

$$h(t)=x_k+\frac{\alpha_2x_k}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_1 t}-\frac{\alpha_1x_k}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_2 t}\rightarrow\boxed{h(t)=k_{ukl}\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_1 t}-\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_2 t}\right)}$$

$$g(t)=k_{ukl}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_1 t}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\lambda_2 t}\right)\rightarrow\boxed{g(t)=k_{ukl}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\left(e^{\alpha_1 t}-e^{\alpha_2 t}\right)}$$

Rozwiązanie 1b: $x(t)=x_k+A_1e^{\alpha t}+A_2te^{\alpha t}$

$$\begin{cases}x(t)=A_1e^{\alpha t}+A_2te^{\alpha t}+x_k\\ \dot{x}(t)=\alpha A_1e^{\alpha t}+A_2e^{\alpha t}+A_2\alpha te^{\alpha t}\end{cases}$$

Z warunków początkowych w chwili $t=0_-$ jest:

$$\begin{cases}0=A_1+x_k\\ 0=\alpha A_1+A_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_1=-x_k\\ A_2=\alpha x_k\end{cases}$$

$$h(t)=x_k-x_ke^{\alpha t}+x_k\alpha te^{\alpha t}\rightarrow\boxed{h(t)=k_{ukl}\left(1-e^{\alpha t}+\alpha te^{\alpha t}\right)}$$ spr

$$g(t)=k_{uklk}\left(-\alpha e^{\alpha t}+\alpha^2te^{\alpha t}\right)\rightarrow\boxed{g(t)=k_{ukl}\alpha\left(-e^{\alpha t}+\alpha te^{\alpha t}\right)}$$ spr

Rozwiązanie 2a: $x(t)=x_k+A_1e^{(\alpha+j\omega_r)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega_r)t}$

$$\begin{cases}x(t)=A_1e^{(\alpha+j\omega_r)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega_r)t}+x_k\\ \dot{x}(t)=(\alpha+j\omega_r)A_1e^{(\alpha+j\omega_r)t}+(\alpha-j\omega_r)A_2e^{(\alpha-j\omega_r)t}\end{cases}$$

Z warunków początkowych w chwili $t=0_-$ jest:

$$\begin{cases}0=A_1+A_2+x_k\\ 0=(\alpha+j\omega_r)A_1+(\alpha-j\omega_r)A_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_1=-A_2-x_k\\ 0=(\alpha+j\omega_r)(-A_2-x_0)+(\alpha-j\omega_r)A_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_1=-A_2-x_k\\ (\alpha+j\omega_r)x_k=A_2(-\alpha-j\omega_r+\alpha-j\omega_r)\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}A_1=-A_2-x_k\\ (\alpha+j\omega_r)x_k=-2j\omega_rA_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_1=x_k\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}-x_k=x_k\frac{\alpha+j\omega_r-2j\omega_r}{2j\omega_r}\\ A_2=-x_k\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_1=x_k\frac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}\\ A_2=-x_k\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}\end{cases}$$

$$h(t)=x_k+x_k\frac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha+j\omega_r)t}-x_k\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha-j\omega_r)t}\rightarrow\boxed{h(t)=k_{ukl}\left(1+\frac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha+j\omega_r)t}-\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha-j\omega_r)t}\right)}$$

$$g(t)=k_{ukl}\left(\frac{(\alpha-j\omega_r)(\alpha+j\omega_r)}{2j\omega_r}e^{(\alpha+j\omega_r)t}-\frac{(\alpha+j\omega_r)(\alpha-j\omega_r)}{2j\omega_r}e^{(\alpha-j\omega_r)t}\right)\rightarrow\boxed{g(t)=k_{ukl}\frac{\alpha^2+\omega_r^2}{2j\omega_r}\left(e^{(\alpha+j\omega_r)t}-e^{(\alpha-j\omega_r)t}\right)}$$

Rozwiązanie 2b: $x(t)=x_k+e^{\alpha t}(B_1\cos\omega_r t+B_2\sin\omega_r t)$

$$\begin{cases} x(t)=e^{\alpha t}(B_1\cos\omega_r t+B_2\sin\omega_r t)+x_k \\ \dot{x}(t)=\alpha e^{\alpha t}(B_1\cos\omega_r t+B_2\sin\omega_r t)+e^{\alpha t}\omega_r(-B_1\sin\omega_r t+B_2\cos\omega_r t) \end{cases}$$

Z warunków początkowych w chwili $t=0_-$ jest:

$$\begin{cases} 0=B_1+x_k \\ 0=\alpha B_1+B_2\omega_r \end{cases} \to \begin{cases} B_1=-x_k \\ B_2=\dfrac{-\alpha B_1}{\omega_r}=\dfrac{\alpha x_k}{\omega_r} \end{cases}$$

$$h(t)=x_k+e^{\alpha t}\left(-x_k\cos\omega_r t+\frac{\alpha x_k}{\omega_r}\sin\omega_r t\right) \to \boxed{h(t)=k_{ukl}\left(1-e^{\alpha t}\left(\cos\omega_r t-\frac{\alpha}{\omega_r}\sin\omega_r t\right)\right)}$$

$$g(t)=k_{ukl}\left(-\alpha e^{\alpha t}\left(\cos\omega_r t-\frac{\alpha}{\omega_r}\sin\omega_r t\right)-e^{\alpha t}\left(-\omega_r\sin\omega_r t-\frac{\alpha}{\omega_r}\omega_r\cos\omega_r t\right)\right) \to \boxed{g(t)=k_{ukl}e^{\alpha t}\frac{\alpha^2+\omega_r^2}{\omega_r}\sin\omega_r t}$$ spr

Rozwiązanie 2c₁: $x(t)=x_k+Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)$,

$$\begin{cases} x(t)=Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)+x_k \\ \dot{x}(t)=\alpha Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)+Ae^{\alpha t}\omega_r\cos(\omega_r t+\varphi_1) \end{cases}$$

Z warunków początkowych w chwili $t=0_-$ jest:

$$\begin{cases} 0=A\sin(\varphi_1)+x_k \\ 0=A\alpha\sin(\varphi_1)+A\omega_r\cos(\varphi_1) \end{cases} \to \begin{cases} 0=A\sin\varphi_1+x_k \\ 0=\alpha\sin\varphi_1+\omega_r\cos\varphi_1 \end{cases} \to \begin{cases} \sin\varphi_1=-x_k/A \\ 0=\alpha\sin\varphi_1+\omega_r\cos\varphi_1 \end{cases}$$

1° $0=\alpha\sin\varphi_1+\omega_r\cos\varphi_1 \to \alpha\sin\varphi_1=-\omega_r\cos\varphi_1 \to \operatorname{tg}\varphi_1=\dfrac{-\omega_r}{\alpha}$ lub $\operatorname{ctg}\varphi_1=\dfrac{\alpha}{-\omega_r} \to \varphi_1=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\omega_r}{\alpha}\right)$

2° $\alpha\sin\varphi_1=-\omega_r\cos\varphi_1 \to \alpha^2\sin^2\varphi_1=(-\omega_r)^2\cos^2\varphi_1 \to \alpha^2\sin^2\varphi_1=(-\omega_r)^2(1-\sin^2\varphi_1) \to (\alpha^2+\omega_r^2)\sin^2\varphi_1=(-\omega_r)^2$

$$\to (\alpha^2+\omega_r^2)\frac{x_k^2}{A^2}=(-\omega_r)^2 \to A=x_k\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{-\omega_r}$$

$$h(t)=x_k-x_k\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1) \to \boxed{h(t)=k_{ukl}\left(1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)\right)},\ \varphi_1=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right)$$

$$g(t)=-k_{ukl}\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}(\alpha e^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)+\omega_r e^{\alpha t}\cos(\omega_r t+\varphi_1)) \to \boxed{g(t)=k_{ukl}\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}(\omega_r\cos(\omega_r t+\varphi_1)-\alpha\sin(\omega_r t+\varphi_1))} \to$$

$$\to g(t)=k_{ukl}\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}\sin(\omega_r t+\varphi_1+\varphi_{1a}) \to \boxed{g(t)=k_{ukl}e^{\alpha t}\frac{\alpha^2+\omega_r^2}{\omega_r}\sin\omega_r t}$$

$$\varphi_1+\varphi_{1a}=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_r}{-\alpha}\right)$$

Rozwiązanie 2c₂: $x(t)=x_k+Ae^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)$

$$\begin{cases} x(t)=Ae^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)+x_k \\ \dot{x}(t)=\alpha Ae^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)-Ae^{\alpha t}\omega_r\sin(\omega_r t-\varphi_2) \end{cases}$$

Z warunków początkowych w chwili $t=0_-$ jest:

$$\begin{cases} 0=A\cos(-\varphi_2)+x_k \\ 0=A\alpha\cos(-\varphi_2)-A\omega_r\sin(-\varphi_2) \end{cases} \to \begin{cases} 0=A\cos\varphi_2+x_k \\ 0=\alpha\cos\varphi_2+\omega_r\sin\varphi_2 \end{cases} \to \begin{cases} \cos\varphi_2=-x_k/A \\ 0=\alpha\cos\varphi_2+\omega_r\sin\varphi_2 \end{cases}$$

1° $0=\alpha\cos\varphi_2+\omega_r\sin\varphi_2 \to \alpha\cos\varphi_2=-\omega_r\sin\varphi_2 \to \operatorname{tg}\varphi_2=\dfrac{\alpha}{-\omega_r} \to \varphi_2=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\alpha}{-\omega_r}\right)$

2° $-\alpha\cos\varphi_2=\omega_r\sin\varphi_2 \to \alpha^2\cos^2\varphi_2=(-\omega_r)^2\sin^2\varphi_2 \to \alpha^2\cos^2\varphi_2=(-\omega_r)^2(1-\cos^2\varphi_2) \to (\alpha^2+\omega_r^2)\cos^2\varphi_2=(-\omega_r)^2$

$$\to (\alpha^2+\omega_r^2)\frac{x_k^2}{A^2}=(-\omega_r)^2 \to A=x_k\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{-\omega_r}$$

$$h(t)=x_k-x_k\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2) \to \boxed{h(t)=k_{ukl}\left(1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)\right)},\ \varphi_2=\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{-\omega_r}\right),$$

$$g(t)=-k_{ukl}\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}(\alpha e^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)-e^{\alpha t}\omega_r\sin(\omega_r t-\varphi_2)) \to \boxed{g(t)=k_{ukl}\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}(\omega_r\sin(\omega_r t-\varphi_2)-\alpha\cos(\omega_r t-\varphi_2))}$$

$$\to g(t)=k_{ukl}\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}\sin(\omega_r t-\varphi_2+\varphi_{2a})$$

$$-\varphi_2+\varphi_{2a}=-\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha}{-\omega_r}\right)+\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_r}{-\alpha}\right)$$

Dodać odp. skokowa członu znormalizowanego: $\boxed{x(t)=1-\frac{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}{\omega_r}e^{-\sigma t}\cos(\omega t+\varphi)}$, $\varphi=\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\right)$

Sprawdzenie wzorów dla Δ<0, x_k=1 [dodać skrypt: testy_RozwiązanieRR]:

	wartości wyliczone z warunków początkowych (rozwiązania powyżej: 2a,2b,2c)	
a) $1+A_1e^{(\alpha+j\omega)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega)t}$	$A_1=\frac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}$, $A_2=-\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}$	$1+\frac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha+j\omega_r)t}-\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha-j\omega_r)t}$
b) $1+e^{\alpha t}(B_1\cos\omega_rt+B_2\sin\omega_rt)$ $B_1=A_1+A_2$, $B_2=j(A_1-A_2)$	$B_1=-1,\ B_2=\frac{\alpha}{\omega_r}$	$1+e^{\alpha t}\left(-\cos\omega_rt+\frac{\alpha}{\omega_r}\sin\omega_rt\right)$
c1) $1+Ae^{\alpha t}\sin(\omega_rt+\varphi_1)$ $A=\sqrt{B_1^2+B_2^2}$, $\varphi_1=\mathrm{arc\,tg}(B_1/B_2)$	$A=-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}$, $\varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right)$	$1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\sin(\omega_rt+\varphi_1)$
c2) $1+Ae^{\alpha t}\cos(\omega_rt-\varphi_2)$ $A=\sqrt{B_1^2+B_2^2}$, $\varphi_2=\mathrm{arc\,tg}(B_2/B_1)$	$A=-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}$, $\varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{-\alpha}{\omega_r}\right)$	$1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\cos(\omega_rt-\varphi_2)$

Sprawdzenie zależności:

a → b) $B_1=A_1+A_2=\frac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}-\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}=\frac{-2j\omega_r}{2j\omega_r}=-1$,

$$B_2=j(A_1-A_2)=j\frac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}+j\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}=\frac{2\alpha}{2\omega_r}=\frac{\alpha}{\omega_r}$$

b → c) $A=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{\alpha}{\omega_r}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\omega_r^2}}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\omega_r^2}{\omega_r^2}}$

$$\varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{B_1}{B_2}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{-1}{\alpha/\omega_r}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right),\quad \varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha/\omega_r}{-1}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{-\alpha}{\omega_r}\right)$$

3.2. Odpowiedź skokowa i impulsowa układu oscylacyjnego

$$\ddot{x}(t)+2\xi\omega_n\dot{x}(t)+\omega_n^2x(t)=bu(t),\ \omega_n>0 \qquad (3\text{-}2)$$

(w równaniu znormalizowanym $b=\omega_n^2\rightarrow k_{ukł}=1$)

1) gdy $\xi^2\geq 1$	**2) gdy $\xi^2<1$**
I. Rozwiązanie swobodne:	
$\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda+\omega_n^2=0$	
$\lambda_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ $\lambda_{1,2}=\alpha_{1,2}\pm j0$, gdzie $\begin{cases}\alpha_1=-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\\ \alpha_2=-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\end{cases}$	$\begin{cases}\lambda_1=-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\xi\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\\ \lambda_2=-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\xi\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\end{cases}$ $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\omega_r$, gdzie $\alpha=-\xi\omega_n$, $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ $\lambda_{1,2}=-\sigma\pm j\omega_r$, gdzie $\sigma=\xi\omega_n$, $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ (alternatywne)
a) $x_s(t)=A_1e^{\alpha_1t}+A_2e^{\alpha_2t}$, gdy $\alpha_1\neq\alpha_2$ ($\xi^2>1$) $\alpha_1=-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$, $\alpha_2=-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ b) $x_s(t)=A_1e^{\alpha t}+A_2te^{\alpha t}$, gdy $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ ($\xi^2=1$) $\alpha=-\xi\omega_n$	a) $x_s(t)=A_1e^{(\alpha+j\omega_r)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega_r)t}$ b) $x_s(t)=e^{\alpha t}(B_1\cos\omega_rt+B_2\sin\omega_rt)$ c) $x_s(t)=Ae^{\alpha t}\sin(\omega t+\varphi_1)$, $\varphi_1=arc\,tg(B_1/B_2)$ $x_s(t)=Ae^{\alpha t}\cos(\omega_rt-\varphi_2)$, $\varphi_2=arc\,tg(B_2/B_1)$
II. Rozwiązanie wymuszone dla skoku jednostkowego $u(t)=1(t)$ → gdy t>0 to u_k=1	
$\omega_n^2x_k=bu_k\quad\rightarrow\quad x_w(t)=x_k=\frac{bu_k}{\omega_n^2}=\frac{b}{\omega_n^2}=k_{ukł}$	
III. Rozwiązanie ogólne	
a) $x(t)=x_k+A_1e^{\alpha_1t}+A_2e^{\alpha_2t}$ b) $x(t)=x_k+A_1e^{\alpha t}+A_2te^{\alpha t}$ gdzie: $x_k=\frac{b}{\omega_n^2}=k_{ukł}$, $\begin{cases}\alpha_1=-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\\ \alpha_2=-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\end{cases}$, $\alpha=-\xi\omega_n$	a) $x(t)=x_k+A_1e^{(\alpha+j\omega_r)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega_r)t}$ b) $x(t)=x_k+e^{\alpha t}(B_1\cos\omega_rt+B_2\sin\omega_rt)$ c) $x(t)=x_k+Ae^{\alpha t}\sin(\omega_rt+\varphi_1)$, $\varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right)$ $x(t)=x_k+Ae^{\alpha t}\cos(\omega_rt-\varphi_2)$, $\varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha}{-\omega_r}\right)$

	gdzie $x_k = b/\omega_n^2 = k_{ukl}$, $\alpha = -\xi\omega_n$, $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$
IV. Rozwiązanie szczególne - warunki początkowe dla odpowiedzi skokowej: *u*(*0*)=0, $\ddot{x}(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$	
Rozwiązanie 1a: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}e^{\alpha_1 t}-\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_2 t}\right)$	Rozwiązanie 2a: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1+\frac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha+j\omega_r)t}-\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha-j\omega_r)t}\right)$
Rozwiązanie 1b: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1-e^{\alpha t}+\alpha t e^{\alpha t}\right)$	Rozwiązanie 2b: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1-e^{\alpha t}\left(\cos\omega_r t-\frac{\alpha}{\omega_r}\sin\omega_r t\right)\right)$
	Rozwiązanie 2c: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)\right)$, $\varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right)$ $k_{ukl}\left(1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)\right)$, $\varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha}{-\omega_r}\right)$
Rozwiązanie 1a: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1-\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{\left(-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}-\frac{-\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{\left(-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}\right)$	Rozwiązanie 2a: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1+\frac{-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}e^{(-\xi\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t}-\frac{-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}e^{(-\xi\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t}\right)$
Rozwiązanie 1b: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1-e^{\alpha t}-\xi\omega_n t e^{\alpha t}\right)$	Rozwiązanie 2b: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1-e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)\right)\right)$
	Rozwiązanie 2c: $h(t)$= $k_{ukl}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi_1)\right)$, $\varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ $k_{ukl}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t-\varphi_2\right)\right)$, $\varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$

Rozwiązanie 1a: $x(t)=x_k+A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$ (3.1, Rozwiązanie 1a)

$$\begin{cases}A_1=x_k\dfrac{-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\\ A_2=x_k\dfrac{-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_1=x_k\dfrac{-\left(-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)}{-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}-\left(-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)}\\ A_2=x_k\dfrac{-\left(-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)}{-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}-\left(-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_1=-x_k\dfrac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}\\ A_2=-x_k\dfrac{-\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}\end{cases}$$

$$\boxed{h(t)=x_k\left(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}e^{\alpha_1 t}-\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}e^{\alpha_2 t}\right)=x_k\left(1-\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{\left(-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}-\frac{-\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{\left(-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}\right)}$$

Rozwiązanie 1b: $x(t)=x_k+A_1e^{\alpha t}+A_2te^{\alpha t}$ (3.1, Rozwiązanie 1b)

$$\begin{cases}A_1=-x_k\\ A_2=\alpha x_k\end{cases}$$

$$\boxed{h(t)=x_k-x_ke^{\alpha t}+x_k\alpha te^{\alpha t}=k_{ukl}\left(1-e^{\alpha t}-\xi\omega_n te^{\alpha t}\right)}$$ spr

Rozwiązanie 2a: $x(t)=x_k+A_1e^{(\alpha+j\omega_r)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega_r)t}$ (3.1, Rozwiązanie 2a)

$$\begin{cases}A_1=x_k\dfrac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}\\ A_2=-x_k\dfrac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_1=x_k\dfrac{-\xi\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{2j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\\ A_2=-x_k\dfrac{-\xi\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{2j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\end{cases}$$

$$\boxed{h(t)=x_k\left(1+\frac{\alpha-j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha+j\omega_r)t}-\frac{\alpha+j\omega_r}{2j\omega_r}e^{(\alpha-j\omega_r)t}\right)=x_k\left(1+\frac{-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}e^{(-\xi\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t}-\frac{-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}e^{(-\xi\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t}\right)}$$

Rozwiązanie 2b: $x(t)=x_k+e^{\alpha t}\left(B_1\cos\omega_r t+B_2\sin\omega_r t\right)$ (3.1, Rozwiązanie 2b)

$$\begin{cases}B_1=-x_k\\ B_2=\dfrac{\alpha x_k}{\omega_r}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}B_1=-x_k\\ B_2=\dfrac{-\xi\omega_n x_k}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{-\xi x_k}{\sqrt{1-\xi^2}}\end{cases}$$

$$\boxed{h(t)=x_k\left[1-e^{\alpha t}\left(\cos\omega_r t-\frac{\alpha}{\omega_r}\sin\omega_r t\right)\right]=x_k\left[1-e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)\right)\right]}$$

Rozwiązanie 2c$_1$: $x(t)=x_k+Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)$ (3.1, Rozwiązanie 2c$_1$)

$$\begin{cases}\varphi_1=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\omega_r}{\alpha}\right)\\ A=x_k\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{-\omega_r}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\varphi_1=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi\omega_n}\right)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\\ A=-x_k\dfrac{\sqrt{(-\xi\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\xi^2)}}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=x_k\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\end{cases},$$

$$\boxed{h(t)=x_k\left[1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)\right]=x_k\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi_1)\right]},\ \varphi_1=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

Rozwiązanie 2c$_2$: $x(t)=x_k+Ae^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)$ (3.1, Rozwiązanie 2c$_2$)

$$\begin{cases}\varphi_2=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\alpha}{-\omega_r}\right)\\ A=x_k\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{-\omega_r}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\varphi_2=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\xi\omega_n}{-\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\\ A=x_k\dfrac{\sqrt{(-\xi\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\xi^2)}}{-\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=-x_k\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\end{cases},$$

$$\boxed{h(t)=x_k\left[1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}}{\omega_r}e^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)\right]=x_k\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t-\varphi_2\right)\right]},\ \varphi_2=\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{-\omega_r}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right),$$

Sprawdzenie wzorów dla $\xi^2<1$ ($\Delta<0$), $x_k=1$ [dodać skrypt: testy_RozwiązanieRR]:

	wartości wyliczone z warunków początkowych (rozwiązania powyżej: 2a,2b,2c)	
a) $1+A_1e^{(\alpha+j\omega)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega)t}$	$A_1=\frac{-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}$, $A_2=-\frac{-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}$	$1+\frac{-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}e^{(\alpha+j\omega_r)t}-\frac{-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}e^{(\alpha-j\omega_r)t}$
b) $1+e^{\alpha t}(B_1\cos\omega_r t+B_2\sin\omega_r t)$ $B_1=A_1+A_2$, $B_2=j(A_1-A_2)$	$B_1=-1;\ B_2=\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\to B_2=\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$	$1+e^{-\xi\omega_n t}\left(-\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)\right)$
c) $1+Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)$ $A=\sqrt{B_1^2+B_2^2}$, $\varphi_1=\mathrm{arc\,tg}(B_1/B_2)$	$A=\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}}$, $\varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi_1)$
c) $1+Ae^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)$ $A=\sqrt{B_1^2+B_2^2}$, $\varphi_2=\mathrm{arc\,tg}(B_2/B_1)$	$A=\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}}$, $\varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t-\varphi_2\right)$

Sprawdzenie zależności:

a → b) $$B_1=A_1+A_2=\frac{-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}-\frac{-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{-2j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}=-1,$$

$$B_2=j(A_1-A_2)=j\frac{-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}+j\frac{-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}}{2j\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{-2\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

b → c) $$A=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{\xi^2}{1-\xi^2}}=\sqrt{1+\frac{\xi^2}{1-\xi^2}}=\sqrt{\frac{1-\xi^2+\xi^2}{1-\xi^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{B_1}{B_2}\right)=\mathrm{arc\,tg}\left(-1/\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)=\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right),\quad \varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)=\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}/(-1)\right)=\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

3.3. Odpowiedź równania 2.rzędu na wymuszenie sinusoidalne

I. Rozwiązanie swobodne:

$a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0\ \to\ \Delta=a_1^2-4a_2a_0$	
1) gdy Δ ≥0 (bieguny rzeczywiste)	**2) gdy Δ<0 (bieguny zespolone)**
a) $x_s(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$, $\alpha_1\neq\alpha_2$, (Δ>0) b) $x_s(t)=A_1e^{\alpha t}+A_2te^{\alpha t}$, $\alpha=\alpha_1=\alpha_2$, (Δ=0) gdzie: $\begin{cases}\alpha_1=\frac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}\\ \alpha_2=\frac{-a_1-\sqrt{\Delta}}{2a_2}\end{cases}$, $\alpha=\frac{-a_1}{2a_2}$	a) $x_s(t)=A_1e^{(\alpha+j\omega_r)t}+A_2e^{(\alpha-j\omega_r)t}$ b) $x_s(t)=e^{\alpha t}(B_1\cos\omega_r t+B_2\sin\omega_r t)$ c) $x_s(t)=Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t+\varphi_1)$, $\varphi_1=arc\,tg(B_1/B_2)$ $x_s(t)=Ae^{\alpha t}\cos(\omega_r t-\varphi_2)$, $\varphi_2=arc\,tg(B_2/B_1)$ gdzie: $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\omega_r$,gdzie $\alpha=\frac{-a_1}{2a_2}$, $\omega_r=\frac{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a_2}$

II. Rozwiązanie wymuszone dla $u(t)=U_m\sin(\omega t)$ (odpowiedź częstotliwościowa)

$$a_2\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=b_0U_m\sin(\omega t)$$

II. Rozwiązanie wymuszone (odpowiedź częstotliwościowa)

Do wyznaczenia rozwiązania wymuszonego zostanie zastosowany ogólny algorytm postępowania.

(1) Funkcja wymuszająca i jej kolejne pochodne:

$$u(t)=U_m\sin(\omega_0 t),\ \dot{u}(t)=U_m\omega_0\cos(\omega_0 t) \tag{3-3}$$

Uwaga: W kolejnej pochodnej $u(t)$ występuje znów sin(), więc w konstrukcji x_w występują tylko 2 składniki.

(2) Konstrukcja postaci rozwiązania wymuszonego $x_w(t)$:

$$x_w(t)=C_1\sin(\omega_0 t)+C_2\cos(\omega_0 t) \tag{3-4}$$

Uwaga: W stałych C_1 i C_2 są zawarte parametry U_m i ω_0, co nie wpływa na wynik, a upraszcza dalsze przekształcenia.

W kolejnym kroku potrzebne będą dwie pochodne $x_w(t)$:

$$\dot{x}_w(t)=C_1\omega_0\cos(\omega_0 t)-C_2\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x}_w(t)=-C_1\omega_0^2\sin(\omega_0 t)-C_2\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$$

(3) Podstawiając wymuszenie i rozwiązanie $x_w(t)$ do równania różniczkowego () otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&a_2\left(-C_1\omega_0^2\sin(\omega_0 t)-C_2\omega_0^2\cos(\omega_0 t)\right)+a_1\left(C_1\omega_0\cos(\omega_0 t)-C_2\omega_0\sin(\omega_0 t)\right)+\\&\quad+a_0\left(C_1\sin(\omega_0 t)+C_2\cos(\omega_0 t)\right)=b_0U_m\sin(\omega_0 t)\end{aligned}, \tag{3-5}$$

a po wymnożeniu i uporządkowaniu:

$$-a_2C_1\omega_0^2\sin(\omega_0 t)-a_2C_2\omega_0^2\cos(\omega_0 t)+a_1C_1\omega_0\cos(\omega_0 t)-a_1C_2\omega_0\sin(\omega_0 t)+a_0C_1\sin(\omega_0 t)+a_0C_2\cos(\omega_0 t)=b_0U_m\sin(\omega_0 t)$$

$$-a_2C_1\omega_0^2\sin(\omega_0t)-a_1C_2\omega_0\sin(\omega_0t)+a_0C_1\sin(\omega_0t)-a_2C_2\omega_0^2\cos(\omega_0t)+a_1C_1\omega_0\cos(\omega_0t)+a_0C_2\cos(\omega_0t)=b_0U_m\sin(\omega_0t)$$

(4) Porównanie współczynników przy takich samych funkcjach prowadzi do układu dwóch równań:

$$\begin{cases}-a_2C_1\omega_0^2-a_1C_2\omega_0+a_0C_1=b_0U_m\\ -a_2C_2\omega_0^2+a_1C_1\omega_0+a_0C_2=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)C_1-a_1\omega_0C_2=b_0U_m\\ a_1\omega_0C_1+\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)C_2=0\end{cases}\tag{3-6}$$

(5) Rozwiązanie układu równań pozwala wyznaczyć stałe C_1, C_2 rozwiązania (3-4):

$$C_1=\frac{b_0\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)U_m}{\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)^2+a_1^2\omega_0^2},\quad C_2=\frac{-b_0a_1\omega_0U_m}{\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)^2+a_1^2\omega_0^2}\tag{3-7}$$

Rozwiązanie (3-4) można też przedstawić równoważnej postaci (zał.):

$$\boxed{x_w(t)=C_1\sin(\omega_0t)+C_2\cos(\omega_0t)=X_m\sin(\omega_0t+\varphi)}\tag{3-8}$$

gdzie: $X_m=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}(C_2/C_1)$.

Parametry X_m i φ rozwiązania (3-8) można wyznaczyć na podstawie parametrów C_1 i C_2 (3-7)

$$X_m=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=U_m\sqrt{\frac{\left(b_0\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)\right)^2}{\left(\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)^2+a_1^2\omega_0^2\right)^2}+\frac{\left(-b_0a_1\omega_0\right)^2}{\left(\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)^2+a_1^2\omega_0^2\right)^2}}=\frac{b_0U_m}{\sqrt{\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)^2+a_1^2\omega_0^2}}$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{-b_0a_1\omega_0}{b_0\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{-a_1\omega_0}{a_0-a_2\omega_0^2}\right)\tag{3-9}$$

Rozwiązanie (3-8) można uzyskać również w ten sposób, że od razu w kroku (2) zostanie przyjęta równoważna postać rozwiązania wymuszonego postaci $x_w(t)=X_m\sin(\omega_0t+\varphi)$, a wówczas kolejne kroki są następujące.

(2) Konstrukcja postaci rozwiązania wymuszonego $x_w(t)$ i jego pochodne:

$$x_w(t)=X_m\sin(\omega_0t+\varphi),\quad \dot{x}_w(t)=X_m\omega_0\cos(\omega_0t+\varphi),\quad \ddot{x}_w(t)=-X_m\omega_0^2\sin(\omega_0t+\varphi)$$

(3) Podstawiając wymuszenie i rozwiązanie $x_w(t)$ do równania różniczkowego () otrzymujemy:

$$a_2X_m\sin(\omega_0t+\varphi)+a_1X_m\omega_0\cos(\omega_0t+\varphi)-a_0X_m\omega_0^2\sin(\omega_0t+\varphi)=b_0U_m\sin(\omega_0t),$$

a po uporządkowaniu:

$$X_m\left(a_2-a_0\omega_0^2\right)\sin(\omega_0t+\varphi)+a_1X_m\omega_0\cos(\omega_0t+\varphi)=b_0U_m\sin(\omega_0t)$$

Zastosujemy przekształcenie funkcji trygonometryczne dotyczących sumy kątów (zał.):

$$X_m\left(a_2-a_0\omega_0^2\right)(\sin(\omega_0t)\cos\varphi+\cos(\omega_0t)\sin\varphi)+a_1X_m\omega_0(\cos(\omega_0t)\cos\varphi-\sin(\omega_0t)\sin\varphi)=b_0U_m\sin(\omega_0t)$$

$$X_m\left(a_2-a_0\omega_0^2\right)\sin(\omega_0t)\cos\varphi+X_m\left(a_2-a_0\omega_0^2\right)\cos(\omega_0t)\sin\varphi+a_1X_m\omega_0\cos(\omega_0t)\cos\varphi-a_1X_m\omega_0\sin(\omega_0t)\sin\varphi=b_0U_m\sin(\omega_0t)$$

(4) Porównanie współczynników przy takich samych funkcjach z argumentem ω_0t prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases}X_m\left(a_2-a_0\omega_0^2\right)\cos\varphi-a_1X_m\omega_0\sin\varphi=b_0U_m\\ \left(a_2-a_0\omega_0^2\right)\sin\varphi+a_1\omega_0\cos\varphi=0\end{cases}$$

(5) Z drugiego równania układu można od razu wyznaczyć kąt φ:

$$\left(a_2-a_0\omega_0^2\right)\sin\varphi=-a_1\omega_0\cos\varphi\ \rightarrow\ \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{-a_1\omega_0}{a_2-a_0\omega_0^2}\ \rightarrow\ \varphi=arctg\left(\frac{-a_1\omega_0}{a_2-a_0\omega_0^2}\right)$$

Można też wyznaczyć następujące zależności:

a) $\cos\varphi=\dfrac{a_2-a_0\omega_0^2}{-a_1\omega_0}\sin\varphi$, b) $tg\varphi=\dfrac{-a_1\omega_0}{a_2-a_0\omega_0^2}\ \rightarrow\ \sin\varphi=\dfrac{-a_1\omega_0}{\sqrt{\left(a_2-a_0\omega_0^2\right)^2+a_1^2\omega_0^2}}$

i podstawić je do pierwszego równania:

$$X_m\left(\frac{\left(a_2-a_0\omega_0^2\right)^2}{-a_1\omega_0}-a_1\omega_0\right)\sin\varphi=b_0U_m\ \rightarrow\ X_m\frac{\left(a_2-a_0\omega_0^2\right)^2+a_1^2\omega_0^2}{-a_1\omega_0}\sin\varphi=b_0U_m\ \rightarrow\ X_m=\frac{b_0U_m}{\sqrt{\left(a_0-a_2\omega_0^2\right)^2+a_1^2\omega_0^2}}$$

Ostatecznie wyznaczono parametry X_m i φ identyczne jak (3-9).

Odpowiedź częstotliwościowa

$$\boxed{x_w(t)=\frac{b_0U_m}{\sqrt{a_0^2+(a_1\omega)^2}}\sin(\omega t+\varphi)}$$

III. Rozwiązanie ogólne

$$x(t)=Ae^{\lambda t}+\frac{b_0U_m}{\sqrt{a_0^2+(a_1\omega)^2}}\sin(\omega t+\varphi)$$

IV. Rozwiązanie szczególne (wyznaczyć A dla wybranych warunków początkowych)