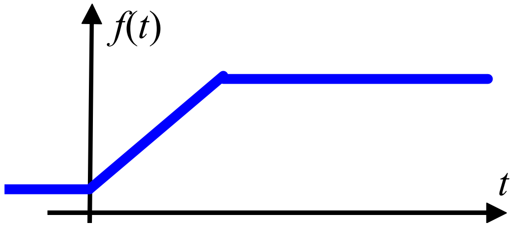
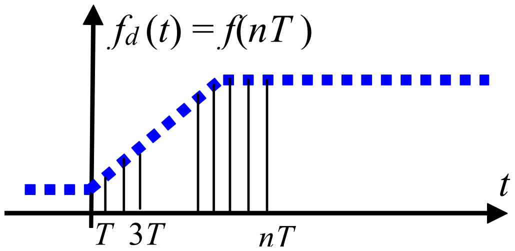
Funkcja dyskretna

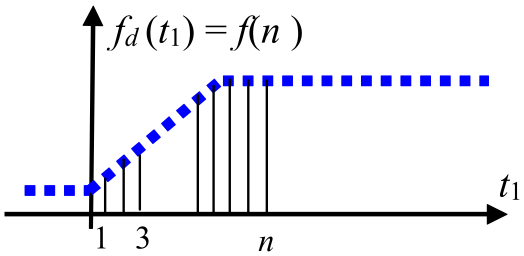
Układy impulsowe – układy z kwantowanie sygnały w czasie (wartości w dyskretnych chwilach)
Układy cyfrowe – kwantowanie wartości (w poziomie)
Cyfrowe układy impulsowe – kwatowanie w czasie i kwatowanie wartości





Funkcja dyskretna (impulsowa) $f_d(t)$
– funkcja nieciągła
– o wartościach rozpatrywanych w momentach $t = n \cdot T$
gdzie: n – liczba całkowita
T – okres próbkowania (kwatowania), czas impulsowania

$$f_d(t) = \begin{cases} f(nT) & \text{dla każdego } t = n\,T \\ 0 & \text{dla każdego } t \neq n\,T \end{cases}$$

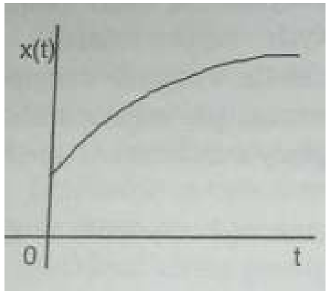


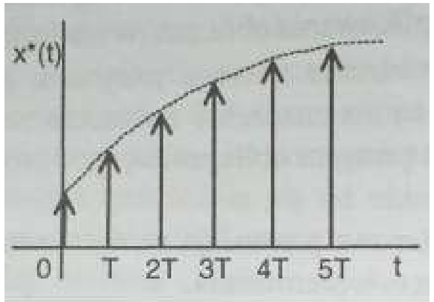
Przeskalowanie osi czasu $t_1 = t\,/\,T$

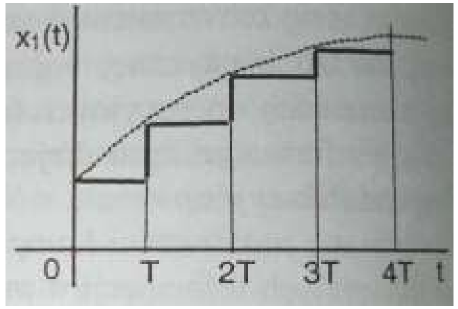
$$f_d(t_1) = \begin{cases} f(n) & \text{dla każdego } t_1 = t/T = n \\ 0 & \text{dla każdego } t_1 \neq n \end{cases}$$

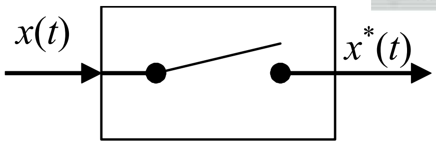
[Amborski/413-417]

Próbkowanie i aproksymacja



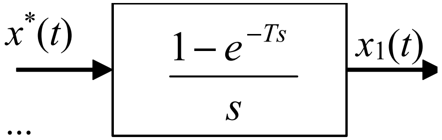




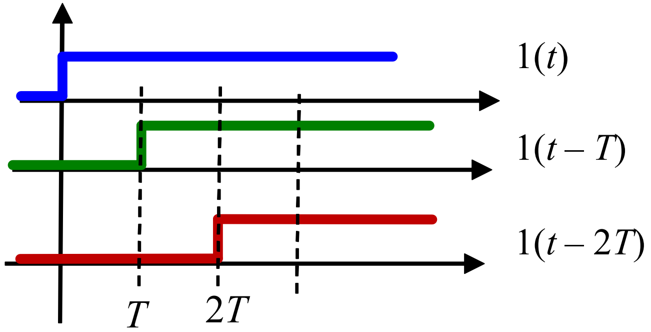


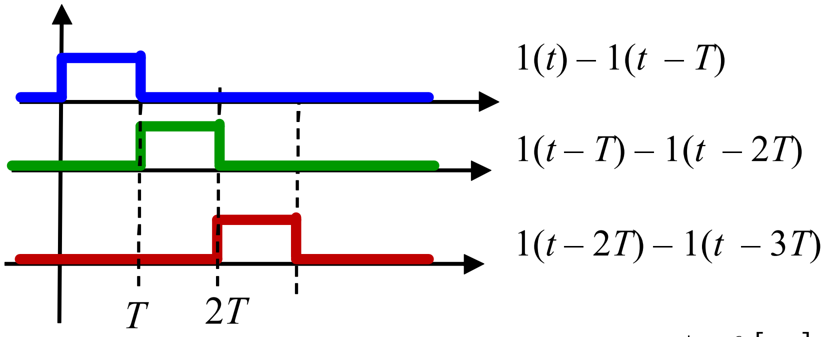
próbkowanie

$x(0),\ x(T),\ x(2T),\ \ldots$



aproksymacja





$$x_1(t) = x(0)\big(1(t)-1(t-T)\big) + x(T)\big(1(t-T)-1(t-2T)\big) + x(2T)\big(1(t-2T)-1(t-3T)\big) + \ldots$$

$\mathscr{L}\downarrow$

$$x_1(s) = x(0)\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-Ts}}{s}\right) + \quad x(T)\left(\frac{e^{-Ts}}{s}-\frac{e^{-2Ts}}{s}\right) + \quad x(2T)\left(\frac{e^{-2Ts}}{s}-\frac{e^{-3Ts}}{s}\right) + \ldots$$

$$x_1(s) = \frac{x(0)}{s}\left(1-e^{-Ts}\right) + \quad \frac{x(T)}{s}e^{-Ts}\left(1-e^{-Ts}\right) + \quad \frac{x(2T)}{s}e^{-2Ts}\left(1-e^{-Ts}\right) + \ldots \quad = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\left(x(0)+x(T)e^{-Ts}+x(2T)e^{-2Ts}+\ldots\right)$$

$\mathscr{L}\left[1(t)\right] = \frac{1}{s}$

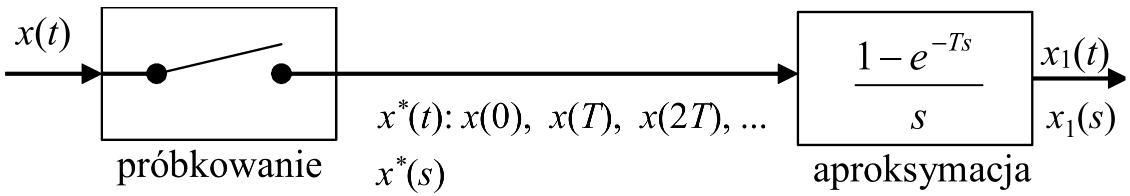
Tw.o opóźnieniu:

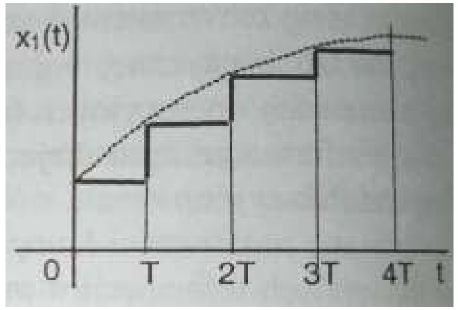
$\mathscr{L}\left[f(t-a)\right] = e^{-sa}f(s)$

$\mathscr{L}\left[1(t-a)\right] = e^{-sa}\frac{1}{s}$

[Domachowski/129]

Próbkowanie i aproksymacja





Transformata sygnału spróbkowanego:

$$\boxed{x^*(s) = x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}}$$

Transformata sygnału po aproksymacji:

$$x_1(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\underbrace{\left(x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \ldots\right)}_{\boxed{x^*(s)}}$$

$$\boxed{x_1(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}x^*(s)}$$

$\mathscr{L}^{-1}$

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

(sygnał spróbkowany = ciąg impulsów)

$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = 1$

Tw.o opóźnieniu:

$\mathscr{L}\left[f(t-a)\right] = e^{-sa}f(s)$

$\mathscr{L}\left[\delta(t-a)\right] = e^{-sa}$

$$x(t) \xrightarrow[\text{transformata}]{\text{próbkowanie}} x^*(s) = x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}$$

(Transformata $\mathscr{L}$ ciągu impulsów)

$$\Big\downarrow\, z = e^{Ts}$$

$$x(z) = x(0) + \frac{x(T)}{z} + \frac{x(2T)}{z^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

(Transformata $\mathscr{Z}$ ciągu impulsów)

$x(z)$ jest transformatą „z" funkcji (sygnału) $x(t)$

[Domachowski/129]

Transformata z

$$x(t) \longrightarrow x^*(s) = x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}$$

$$\downarrow z = e^{Ts}$$

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{Z}} x(z) = x(0) + \frac{x(T)}{z} + \frac{x(2T)}{z^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

$$\boxed{x(t) \xrightarrow{\mathcal{Z}} x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}}$$

Przekształcenie Laplace'a

Przykład 1: $x(t) = 1(t)$

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1(nT)z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathcal{L}\left[1(t)\right] = \frac{1}{s}$$

Przykład 2: $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ e^{-at} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT}z^{-n} = 1 + \frac{e^{-aT}}{z} + \frac{e^{-2aT}}{z^2} + \ldots = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+1}$$

Przykład 3: $x(s) = \dfrac{1}{s(s+1)} \longrightarrow x(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} \longrightarrow x(z) = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z-e^{-T}} = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z\left(1-e^{-T}\right)}{(z-1)\left(z-e^{-T}\right)}$

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{z}{z-1} \qquad \frac{1}{s+1} \rightarrow \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

Transformata z - definicje

Przekształcenie proste $f(z)=\mathcal{Z}[f(n)]$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Przekształcenie Laplace'a

$$f(s)=\mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(s)=\int_{0_+}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$z^{-1}=e^{-Ts}$$

Warunek istnienia transformaty:
– zbieżność szeregu $f(n)z^{-n}$ (dyskretna funkcja $f(n)$ nie rośnie szybciej niż funkcja wykładniczna)

Przekształcenie odwrotne $f(n)=\mathcal{Z}^{-1}[f(z)]$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1} f(z) dz$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s) e^{-st} dt$$

Metody:
– rozwinięcie transformaty w szerego potęgowy
– rozkład na ułamki proste

Transformata Z – wybrane funkcje

Funkcja ciągła $f(t)$	Transformata $F(s)$	Funkcja dyskretna $f(nT) \to f(n)$	Transformata $F(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta(n)$, δ_n	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1(n)$, 1_n	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$n \cdot 1(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$n^k \cdot 1(n)$	$(-1)^k z^k \frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{dz}{z-1}\right)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{an} \cdot 1(n)$	$\frac{z}{z-e^a}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-an} \cdot 1(n)$	$\frac{z}{z-e^{-a}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(an) \cdot 1(n)$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(an) \cdot 1(n)$	$\frac{z(z-\cos a)}{z^2 - 2z\cos a + 1}$
$e^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bn} \sin(an) \cdot 1(n)$	$\frac{z e^{-b} \sin a}{z^2 - 2ze^{-b}\cos a + e^{-2b}}$

Przekształcenie Z – własności

1° Liniowość przekształcenia $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\ \left[a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n)\right] = a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)$$

2° Transformata $\mathcal{Z}$ różnicy Δ

$$\mathcal{Z}\ \left[\Delta f(n)\right] = (z-1) f(z) - z f(0)$$

Ogólnie dla Δ^k

$$\mathcal{Z}\ \left[\Delta^k f(n)\right] = (z-1)^k f(z) - z\left[\sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-i-1} \Delta^i f(0)\right]$$

gdzie: Δ^i – i-ta różnica liczona wg wzoru $\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^{k} r_i f(n+1)$

$$(z-1)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!\,i!} z^{k-i}$$

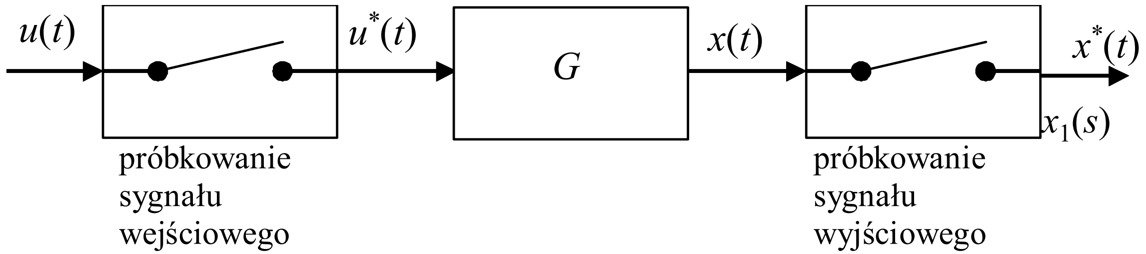
3° Transformata $\mathcal{Z}$ funkcji przesuniętej w czasie $f(n+m)$

$$\mathcal{Z}\ \left[f(n-m)\cdot 1 f(n-m)\right] = z^{-m} f(z)$$

4° Zachowanie transformaty $\mathcal{Z}$ na granicach:

- wartość końcowa: $f(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{z\to 1} (z-1) f(z)$
- wartość początkowa: $f(0) = \lim\limits_{n\to 0} f(n) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

Transformaty układu impulsowego



Transmitancja

$$x(s) = G(s)u(s)$$

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = 1$$

Odpowiedź impulsowa

$$x(s) = G(s)\cdot 1$$

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\,[G(s)]$$

Sygnał wejściowy spróbkowany $u^*(t)$ (ciąg impulsów):

$$\boxed{u^*(s)} = u(0) + u(T)e^{-Ts} + u(2T)e^{-2Ts} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)e^{-nTs}$$

$$u^*(t) = u(0)\delta(t) + u(T)\delta(t-T) + u(2T)\delta(t-2T) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t-nT)$$

Sygnał wyjściowy $x(t)$ jako suma odpowiedzi na poszczególne impulsy sygnału wejściowego $u^*(t)$:

$$x(t) = u(0)g(t) \qquad 0 \le t \le T,$$

$$x(t) = u(0)g(t) + u(T)g(t-T) \qquad T \le t \le 2T,$$

$$x(t) = u(0)g(t) + u(T)g(t-T) + u(2T)g(t-2T) \qquad 2T \le t \le 3T,$$

......

Sygnał wyjściowy w chwilach próbkowania

$$x(0) = u(0)g(0)$$

$$x(T) = u(0)g(T) + u(T)g(0)$$

$$x(2T) = u(0)g(2T) + u(T)g(T) + u(2T)g(0)$$

......

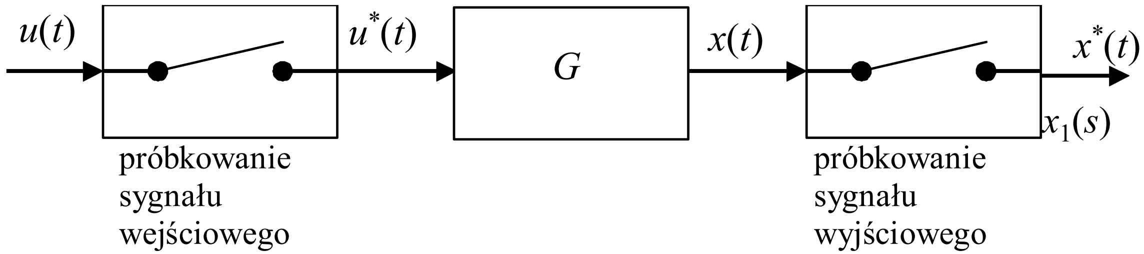
$$x(nT) = \sum_{m=0}^{n} u(mT)g\big((n-m)T\big)$$

Sygnał wyjściowy spróbkowany $x^*(t)$ (ciąg impulsów):

$$\boxed{x^*(s)} = x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}$$

$$x^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[\underbrace{\sum_{m=0}^{n} u(mT)g\big((n-m)T\big)}_{x(nT)}\Bigg]e^{-nTs}$$

Transmitancja układu impulsowego



Transmitancja

$x(s) = G(s)u(s)$

$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = 1$

Odpowiedź impulsowa

$x(s) = G(s) \cdot 1$

$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\,[G(s)]$

Sygnał wejściowy spróbkowany $u^*(t)$:

$$u^*(s) = u(0) + u(T)e^{-Ts} + u(2T)e^{-2Ts} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)e^{-nTs}$$

Sygnał wyjściowy spróbkowany $x^*(t)$ (ciąg impulsów):

$$x^*(s) = x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n} u(mT)g\big((n-m)T\big)\right]e^{-nTs}}$$

$$x^*(s) = \underbrace{\big(u(0) + u(T)e^{-Ts} + u(2T)e^{-2Ts} + \ldots\big)}_{u^*(s)}\underbrace{\big(g(0) + g(T)e^{-Ts} + g(2T)e^{-2Ts} + \ldots\big)}_{G^*(s)}$$

równoważna postać

$$x^*(s) = u^*(s)G^*(s)$$

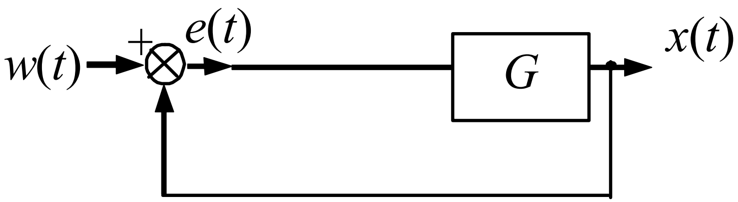
$G^*(s)$ – transmitancja „spróbkowana”

$$x(z) = u(z)G(z)$$

$G(z)$ – transmintancja „z”

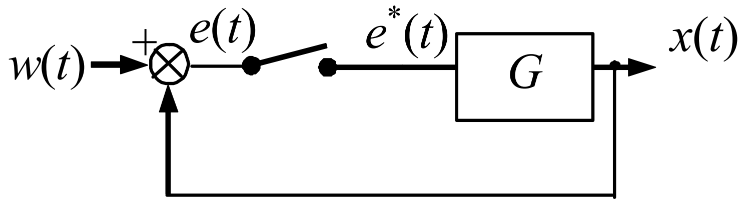
Stabilność obiektu, stabilność układu

Układ ciągły



$$\frac{x(s)}{w(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Układ impulsowy



$$\frac{x(z)}{w(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

$$\frac{x(s)}{w(s)} = \frac{\frac{L(s)}{M(s)}}{1+\frac{L(s)}{M(s)}} = \frac{L(s)}{M(s)+L(s)}$$

$$G(z) = \frac{L(z)}{M(z)}$$

$$\frac{x(z)}{w(z)} = \frac{L(z)}{M(z)+L(z)}$$

Stabilność układu otwartego: $M(s)=0$ $\qquad$ $M(z)=0$

Stabilność układu zamkniętego: $M(s)+L(s)=0$ $\qquad$ $M(z)+L(z)=0$

Stabilność obiektu, stabilność układu

Stabilność układu otwartego: $M(s)=0$ $\qquad M(z)=0$

Stabilność układu zamkniętego: $M(s)+L(s)=0$ $\qquad M(z)+L(z)=0$

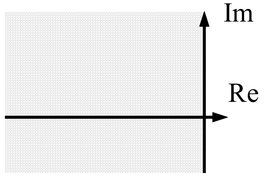
Przykład: $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}$ $\qquad G(z)=\dfrac{10\left(1-e^{-1}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-1}\right)}$

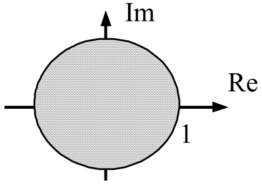
Stabilność układu otwartego: $s(s+1)=0$ $\qquad (z-1)\left(z-e^{-1}\right)=0$

Stabilność układu zamkniętego: $s(s+1)+10=0$ $\qquad (z-1)\left(z-e^{-1}\right)+10\left(1-e^{-1}\right)z=0$

$s=\sigma+j\omega$, warunek stabilności: $\sigma<0$

$z=e^{Ts}$, warunek stabilności: $|z| = e^{T\sigma}<1$





Badanie stabilności:

1) rozwiązanie równania charakterystycznego i zbadanie położenia pierwiastków (wewnątrz jednostkowego okręgu)

2) przekształcenie obszaru na zwanątrz jednostkowego okręgu na prawą półpłaszczyznę przez przekształcenie $z=\dfrac{w+1}{w-1}$
i zastosowanie kryterium Hurwitza / Routha

Przykład cd: $(z-1)\left(z-e^{-T}\right)+10\left(1-e^{-T}\right)z=0 \xrightarrow{e^{-1}=0.368} z^2+4.952z+0.368=0 \xrightarrow{\text{ad1)}} z_1=-0.076, z_2=-4.876$

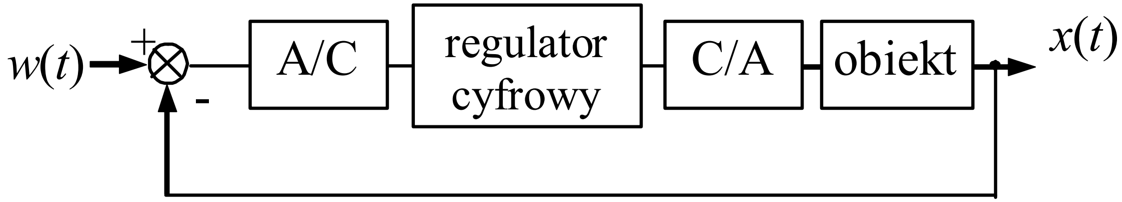
$|z_2| > 1$

$\big\downarrow$ ad2)

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2+4.952\frac{w+1}{w-1}+0.368=0$$

$$6.32w^2+1.264w-3.584=0$$

Dyskretny układ sterowania



A/C – przetwornik analogowo-cyfrowy:

1) wynik = sygnał dyskretny $e^*(t)$

2) wybór okresu próbkowania (T):

a) długi czas próbkowania (mała częstotliwość) – mała dokładność aproksymacji

b) krótki czas próbkowania (duża częstotliwość) – duże obciążenie obliczeniowe (zużywanie urządzeń, kosztowna aparatura)

Optymalna częstotliwość próbkowania ≥ podwójna częstotliwość ograniczająca szerokość widma

Regulator cyfrowy:

1) wyjście = sygnał dyskretny (ciąg impulsów) $x^*(t)$

C/A – przetwornik cyfrowo-analogowy:

1) wynik = aproksymacja,

np. przekształcenie na sygnał schodkowy (układ ZOH – Zero-Order-Hold): $x^*(t) \rightarrow x_1(t)$

$$x_1(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} x^*(s)$$

Projektowanie regulatorów cyfrowych:

1) zastosowanie metod projektowania układów ciągłych:
- dla dużych częstotliwości próbkowania
- nie uzględnia skutków próbkowania i aproksymacji

2) zastosowanie metod bezpośredniego doboru regulatorów cyfrowych

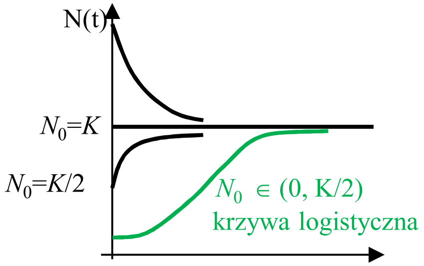
[Domachowski/138-139]

Dynamika układów dyskretych

Ciągłe równanie logistyczne

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

$$\dot{N}(t) \approx \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$



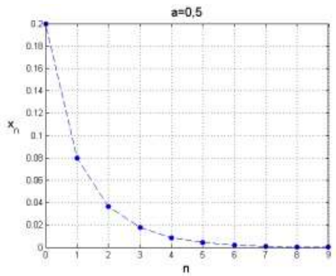
Dyskretne równanie logistyczne

$$N_{t+1} = aN_t\left(1 - \frac{N_t}{K_1}\right)$$

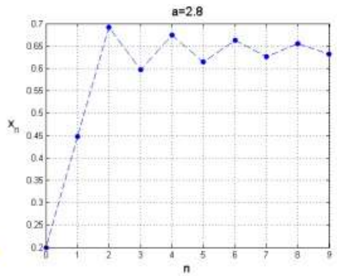
$$a = 1 + r \qquad K_1 = \frac{1+r}{r}K$$

Zagęszczenie populacji $x = N / K_1$

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$$



$0 < a \le 1$



$1 < a < 3$

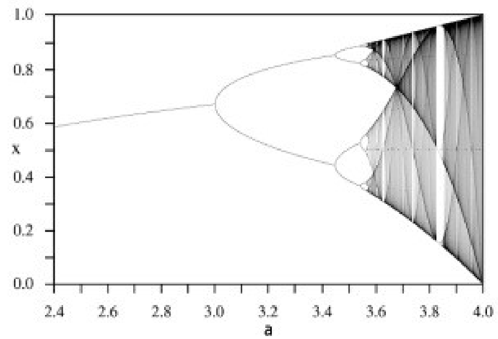
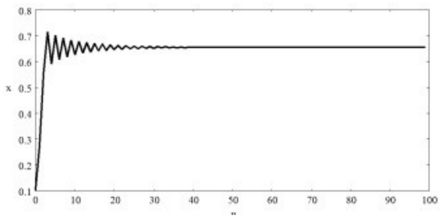
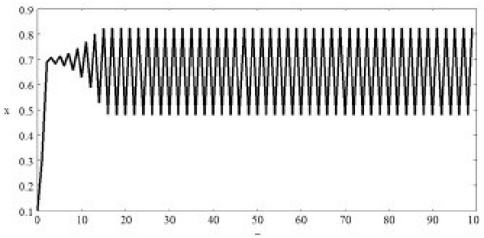


Diagram bifurkacji



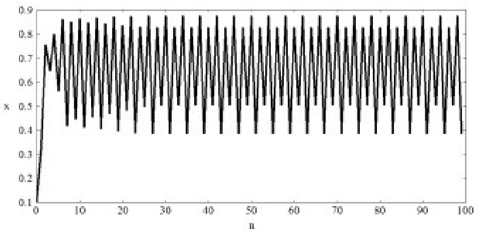
$a = 2.9$

x stabilizuje się



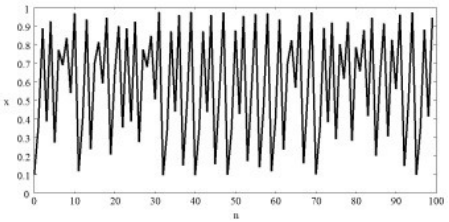
$a = 3.3$

x oscyluje pomiędzy 2 punktami



$a = 3.5$

x oscyluje pomiędzy 4 punktami



$a = 3.9$

x oscyluje chaotycznie

[Forys,17-20], Inne: np. http://www.foton.if.uj.edu.pl/documents/12579485/1db296b5-adf4-4a6c-8097-1d325697ee04