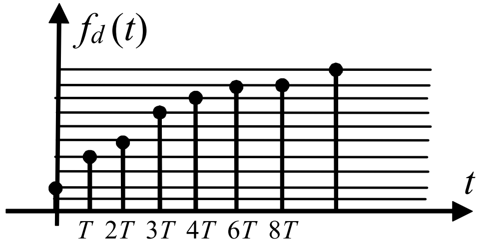
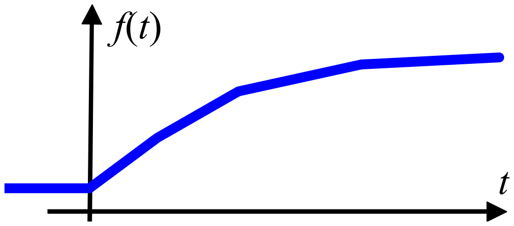
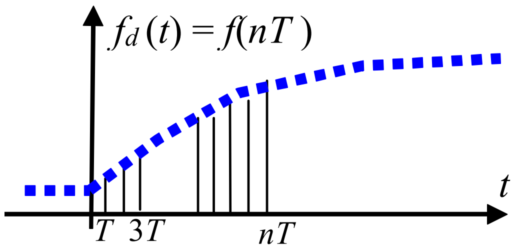
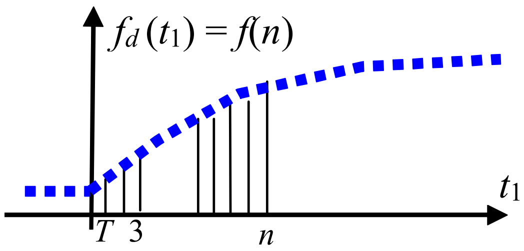
Funkcja dyskretna

Układy impulsowe – układy z kwantowanie sygnały w czasie (wartości w dyskretnych chwilach)
Układy cyfrowe – kwantowanie wartości (w poziomie)
Cyfrowe układy impulsowe – kwatowanie w czasie i kwatowanie wartości









Funkcja dyskretna (impulsowa) $f_d(t)$
– funkcja nieciągła
– o wartościach rozpatrywanych w momentach $t = n \cdot T$
gdzie: n – liczba całkowita
T – okres próbkowania (kwatowania), czas impulsowania

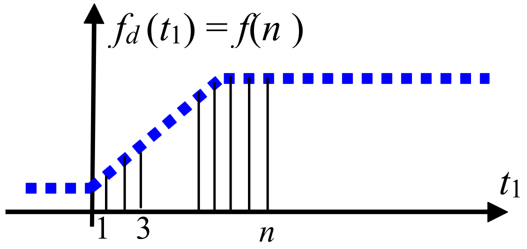
$$f_d(t) = \begin{cases} f(nT) & \text{dla każdego } t = n\,T \\ 0 & \text{dla każdego } t \neq n\,T \end{cases}$$

Przeskalowanie osi czasu $t_1 = t / T$

$$f_d(t_1) = \begin{cases} f(n) & \text{dla każdego } t_1 = t/T = n \\ 0 & \text{dla każdego } t_1 \neq n \end{cases}$$

[Amborski/413-417]

Różnice funkcji dyskretnej



$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = \big(f(n+2) - f(n+1)\big) - \big(f(n+1) - f(n)\big) =$$
$$= f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$$

$$\Delta^3 f(n) = \Delta^2 f(n+1) - \Delta^2 f(n) = \big(f(n+3) - 2f(n+2) + f(n+1)\big) - \big(f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)\big) =$$
$$= f(n+3) - 3f(n+2) + 2f(n+1) - f(n)$$

$$\Delta f(n) = -f(n) + f(n+1)$$
$$\Delta^2 f(n) = f(n) - 2f(n+1) + f(n+2)$$
$$\Delta^3 f(n) = -f(n) + 2f(n+1) - 3f(n+2) + f(n+3)$$

Ogólnie k-ta różnica dyskretnej funkcji $f(n)$:

$$\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^{k} r_i f(n+1)$$

gdzie: $r_i = (-1)^{k-i} \dfrac{k!}{(k-i)!\,i!}$

$$r_0 = (-1)^k$$
$$r_k = 1$$

k-rząd różnicy	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
1	−1	1									
2	1	−2	1								
3	−1	3	−3	1							
4	1	−4	6	4	1						
5	−1	5	−10	10	−5	1					
6	1	−6	15	−20	15	−6	1				
7	−1	7	−21	35	−35	21	−7	1			
8	1	−8	28	−56	70	−56	28	−8	1		
9	−1	9	−36	84	−126	126	−84	36	−9	1	
10	1	−10	45	−120	210	−252	210	−120	45	−10	1

[Amborski/413-417]

Równania różnicowe

Równanie różnicowe – zależność dyskretnej funkcji wyjściowej $x(n)$ od dyskretnej funkcji wejściowej $u(n)$:

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \cdot \Delta^k x(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot \Delta^k u(n)$$, gdzie $\Delta^k x(n)$ i $\Delta^k u(n)$ to k-ta różnica funkcji $x(n)$ i $u(n)$

$$\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^{k} r_i f(n+1) \quad \text{gdzie: } r_i = (-1)^{k-i} \frac{k!}{(k-i)!i!}$$

$$r_0 = (-1)^k$$

$$r_k = 1$$

Równanie różnicowe (postać równoważna po podstawieniu $\Delta^k x(n)$ i $\Delta^k u(n)$)

$$\sum_{k=0}^{p} c_k \cdot x(n+k) = \sum_{k=0}^{q} d_k \cdot u(n+k)$$, gdzie:

$$c_k = \sum_{i=0}^{p-k} (-1)^{p-k-i} \frac{(p-i)!}{k!(p-k-i)!} \cdot a_{p-i} \quad , c_p = a_p$$

$$d_k = \sum_{i=0}^{q-k} (-1)^{q-k-i} \frac{(q-i)!}{k!(q-k-i)!} \cdot b_{q-i} \quad , d_q = b_q$$

Funkcja wymuszająca: $u(n)$, dla każdego n

Warunki początkowe: $x(n)$, dla każdego n z zakresu $-p \le n < 0$ (czyli p poprzednich wartości x)

Rozwiązanie: $x(n)$, dla każdego $n \ge 0$

$$x(n) = x_s(n) + x_w(n)$$

rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa) | rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona)

$$x_s(n) = \frac{-1}{c_p} \sum_{k=0}^{p} c_k \cdot x(n+k-p) \qquad x_w(n) = \frac{1}{c_p} \sum_{k=0}^{q} d_k \cdot u(n+k-p)$$

Rekurencyjne wyznaczenia rozwiązania $x(n)$ punkt po punkcie

[Amborski/413-417]

Przykład 1: Rozwiązać równanie różnicowe

$$2\Delta x(n) + x(n) = 10u(n)$$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \cdot \Delta^k x(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot \Delta^k u(n)$$

– wymuszenie: $u(n) = \mathbf{1}(n)$

$$1(n) = \begin{cases} 0, n < 0 \\ 1, n \geq 0 \end{cases}$$

$p = 1,\ q = 0$

– zerowy warunek początkowy, tzn. $x(-1) = 0$

---

a) Konwersja: $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

$$2\big(x(n+1) - x(n)\big) + x(n) = 10 \cdot 1(n)$$

$$2x(n+1) - x(n) = 10 \cdot 1(n)$$

$c_0 = -1,\ c_1 = 2,\ d_0 = 10,$

---

b) Rozwiązanie:

$$x(n) = \frac{1}{c_p}\left(\sum_{k=0}^{q} d_k \cdot u(n+k-p) - \sum_{k=0}^{p-1} c_k \cdot x(n+k-p)\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{c_1}\left(\sum_{k=0}^{0} d_k \cdot 1(n+k-1) - \sum_{k=0}^{1-1} c_k \cdot x(n+k-1)\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{c_1}\big(d_0 \cdot 1(n+0-1) - c_0 \cdot x(n+0-1)\big)$$

$$x(n) = \frac{1}{2}\big(10 \cdot 1(n-1) + x(n-1)\big)$$

$$x(n) = 5 \cdot 1(n-1) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$x(n-1)$	0	0	5	7.5	8.75	9,38	9,69	9,84
$x(n)$	5·0+0.5·0= 0	5·1+0.5·0= 5	5·1+0.5·5= 7.5	5·1+0.5·7.5= 8.75	5·1+0.5·8.75= 9,38	9,69	9,84	9.92

Przykład 2: Rozwiązać równanie różnicowe

$$\Delta^4 x(n) + \Delta^2 x(n) = 2u(n)$$

– wymuszenie: $u(n) = \mathbf{1}(n)$

– zerowe warunki początkowe, tzn. $x(-4) = x(-3) = x(-2) = x(-1) = 0$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \cdot \Delta^k x(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot \Delta^k u(n)$$

$p = 4,\ q = 0$

$a_4 = 1,\ a_3 = 0,\ a_2 = 1,\ a_1 = 0,\ a_0 = 0,\ b_0 = 2$

a) Konwersja:

$$\sum_{k=0}^{4} c_k \cdot x(n+k) = \sum_{k=0}^{0} d_k \cdot u(n+k)$$

$$c_0 x(n) + c_1 x(n+1) + c_2 x(n+2) + c_3 x(n+3) + c_4 x(n+4) = d_0 \cdot 1(n)$$

$$\sum_{k=0}^{p} c_k \cdot x(n+k) = \sum_{k=0}^{q} d_k \cdot u(n+k)$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{p-k} (-1)^{p-k-i} \frac{(p-i)!}{k!(p-k-i)!} \cdot a_{p-i}\ ,\ c_p = a_p$$

$$d_k = \sum_{i=0}^{q-k} (-1)^{q-k-i} \frac{(q-i)!}{k!(q-k-i)!} \cdot b_{q-i}\ \ ,\ d_q = b_q$$

$$c_0 = \sum_{i=0}^{4-0} (-1)^{4-0-i} \frac{(4-i)!}{0!(4-0-i)!} \cdot a_{4-i} = \sum_{i=0}^{4} (-1)^{4-i} \frac{(4-i)!}{(4-i)!} \cdot a_{4-i} =$$

$$= (-1)^{4-0} a_{4-0} + (-1)^{4-1} a_{4-1} + (-1)^{4-2} a_{4-2} + (-1)^{4-3} a_{4-3} + (-1)^{4-4} a_{4-4} = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 1 - 0 + 1 - 0 + 0 = \underline{2}$$

$$c_1 = \sum_{i=0}^{4-1} (-1)^{4-1-i} \frac{(4-i)!}{1!(4-1-i)!} \cdot a_{4-i} = \sum_{i=0}^{3} (-1)^{3-i} \frac{(4-i)!}{(3-i)!} \cdot a_{4-i} =$$

$$= (-1)^{3-0} \frac{(4-0)!}{(3-0)!} a_{4-0} + (-1)^{3-1} \frac{(4-1)!}{(3-1)!} a_{4-1} + (-1)^{3-2} \frac{(4-2)!}{(3-2)!} a_{4-2} + (-1)^{3-3} \frac{(4-3)!}{(3-3)!} a_{4-3} = (-1)^3 \frac{(4)!}{(3)!} a_4 + (-1)^2 \frac{(3)!}{(2)!} a_3 + (-1)^1 \frac{(2)!}{(1)!} a_2 + (-1)^0 \frac{(1)!}{(0)!} a_1$$

$$= -4a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1 = -4 + 0 - 2 = \underline{-6}$$

$$c_2 = \sum_{i=0}^{4-2} (-1)^{4-2-i} \frac{(4-i)!}{2!(4-2-i)!} \cdot a_{4-i} = \sum_{i=0}^{2} (-1)^{2-i} \frac{(4-i)!}{2(2-i)!} \cdot a_{4-i} =$$

$$= (-1)^{2-0} \frac{(4-0)!}{2(2-0)!} a_{4-0} + (-1)^{2-1} \frac{(4-1)!}{2(2-1)!} a_{4-1} + (-1)^{2-2} \frac{(4-2)!}{2(2-2)!} a_{4-2} = (-1)^2 \frac{(4)!}{2(2)!} a_4 + (-1)^1 \frac{(3)!}{2(1)!} a_3 + (-1)^0 \frac{(2)!}{2(0)!} a_2 = 6a_4 - 3a_3 + a_2 = 6 - 0 + 1 = \underline{7}$$

$$c_3 = \sum_{i=0}^{4-3} (-1)^{4-3-i} \frac{(4-i)!}{3!(4-3-i)!} \cdot a_{4-i} = \sum_{i=0}^{1} (-1)^{1-i} \frac{(4-i)!}{6(1-i)!} \cdot a_{4-i} =$$

$$= (-1)^{1-0} \frac{(4-0)!}{6(1-0)!} a_{4-0} + (-1)^{1-1} \frac{(4-1)!}{6(1-1)!} a_{4-1} = (-1)^1 \frac{(4)!}{6} a_4 + (-1)^0 \frac{(3)!}{6(0)!} a_3 = -4a_4 + a_3 = \underline{-4}$$

$c_4 = a_4 = \underline{1}$ $\qquad d_0 = b_0 = \underline{2}$

$$2x(n) - 6x(n+1) + 7x(n+2) - 4x(n+3) + x(n+4) = 2 \cdot 1(n)$$

$$\boxed{x(n+4) - 4x(n+3) + 7x(n+2) - 6x(n+1) + 2x(n) = 2 \cdot 1(n)}$$

[Amborski/419-420]

Przykład 2cd: Rozwiązać równanie różnicowe

$$\Delta^4 x(n) + \Delta^2 x(n) = 2u(n)$$

$$x(n+4) - 4x(n+3) + 7x(n+2) - 6x(n+1) + 2x(n) = 2 \cdot 1(n)$$

$$\sum_{k=0}^{p} c_k \cdot x(n+k) = \sum_{k=0}^{q} d_k \cdot u(n+k)$$

$p = 4$, $q = 0$

$c_4 = 1$, $c_3 = -4$, $c_2 = 7$, $c_1 = -6$, $c_0 = 2$, $d_0 = 2$

b) Rozwiązanie:

$$x(n) = \frac{1}{c_p}\left(\sum_{k=0}^{q} d_k \cdot u(n+k-p) - \sum_{k=0}^{p-1} c_k \cdot x(n+k-p)\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{c_4}\left(\sum_{k=0}^{0} d_k \cdot 1(n+k-4) - \sum_{k=0}^{4-1} c_k \cdot x(n+k-4)\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{c_4}\left(d_0 \cdot 1(n+0-4) - c_0 x(n+0-4) - c_1 x(n+1-4) - c_2 x(n+2-4) - c_3 x(n+3-4)\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{c_4}\left(d_0 \cdot 1(n-4) - c_0 x(n-4) - c_1 x(n-3) - c_2 x(n-2) - c_3 x(n-1)\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{1}\left(2 \cdot 1(n-4) - 2x(n-4) + 6x(n-3) - 7x(n-2) + 4x(n-1)\right)$$

$$x(n) = 2 \cdot 1(n-4) - 2x(n-4) + 6x(n-3) - 7x(n-2) + 4x(n-1)$$

Przykład 3: Rozwiązać równanie różnicowe

$$\Delta^5 x(n) - \Delta^4 x(n) + 2\Delta^2 x(n) + x(n) = \Delta u(n) + u(n)$$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \cdot \Delta^k x(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot \Delta^k u(n)$$

– wymuszenie: $u(n) = \mathbf{1}(n)$

$p = 5, q = 5$

– zerowe warunki początkowe, tzn. $x(-5) = x(-4) = x(-3) = x(-2) = x(-1) = 0$

---

a) Konwersja:

$$\sum_{k=0}^{p} c_k \cdot x(n+k) = \sum_{k=0}^{q} d_k \cdot u(n+k)$$

$$x(n+5) - 6x(n+4) + 14x(n+3) - 14x(n+2) + 5x(n+1) + x(n) = u(n+1)$$

$$c_p = a_p, c_k = \sum_{i=0}^{p-k} (-1)^{p-k-i} \frac{(p-i)!}{k!(p-k-i)!} \cdot a_{p-i}$$

$$d_q = b_q,\ d_k = \sum_{i=0}^{q-k} (-1)^{q-k-i} \frac{(q-i)!}{k!(q-k-i)!} \cdot b_{q-i}$$

---

b) Rozwiązanie:

$$x(n) = \frac{1}{c_p}\left(\sum_{k=0}^{q} d_k \cdot u(n+k-p) - \sum_{k=0}^{p-1} c_k \cdot x(n+k-p)\right)$$

$$x(n) = \mathbf{1}(n-4) - x(n-5) - 5x(n-4) + 14x(n-3) - 14x(n-2) + 6x(n-1)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x(n-5)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7
$x(n-4)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7	29
$x(n-3)$	0	0	0	0	0	0	0	1	7	29	91
$x(n-2)$	0	0	0	0	0	0	1	7	29	91	234
$x(n-1)$	0	0	0	0	0	1	7	29	91	234	506
$x(n)$	0	0	0	0	1	7	29	91	234	506	883

[Amborski/419-420]

Równanie różniczkowe – równanie różnicowe

(opis ciągłego układu) (opis układu impulsowego)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \cdot \frac{d^k}{dt^k} x(t) = \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot \frac{d^k}{dt^k} u(t) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{T^k} \cdot \Delta^k x(nT) = \sum_{k=0}^{q} \frac{b_k}{T^k} \cdot \Delta^k u(nT)$$

(przybliżenie równania różniczkowego)

(zmiana skali czasu)

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{T^k} \cdot \Delta^k x(n) = \sum_{k=0}^{q} \frac{b_k}{T^k} \cdot \Delta^k u(n)$$

(postać równoważna)

$$\sum_{k=0}^{p} c_k \cdot x(n+k) = \sum_{k=0}^{q} d_k \cdot u(n+k)$$

Definicja pochodnej:

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

(iloraz różnicowy)

Różnica funkcji dyskretnej:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

$u(t)$ $\quad 1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$

$u(n)$ $\quad 1(n) = \begin{cases} 0, n < 0 \\ 1, n \geq 0 \end{cases}$

$x^{(p)}(0) = x_0^{(p)}, \ldots, x^{(1)}(0) = x_0^{(1)}$

$x(-p) = x_{-p}, \ldots, x(-1) = x_{-1}$

$x(t)$
Rozwiązanie równania różniczkowego

$x(n)$
Rozwiązanie równania różnicowego

Przybliżone rozwiązanie równania różniczkowego

(mniejszy okres próbkowania T – większa dokładność)

[Amborski/413-417]

Transmitancja – równanie różnicowe

(opis ciągłego układu) (opis układu impulsowego)

Przykład 4: Wyznaczyć odpowiedź skokową układu

$$G(s)=\frac{10}{T_1 s+1}$$

$$x(n)=\frac{1}{c_p}\left(\sum_{k=0}^{q} d_k\cdot u(n+k-p)-\sum_{k=0}^{p-1} c_k\cdot x(n+k-p)\right)$$

– wymuszenie: $u(t)=\mathbf{1}(t)$

– zerowe warunki początkowe

a) Równanie różniczkowe

$$X(s)=G(s)U(s) \Rightarrow X(s)=\frac{10}{T_1 s+1}U(s) \Rightarrow T_1 sX(s)+X(s)=10U(s) \Rightarrow T_1\dot{x}(t)+x(t)=10u(t)$$

b) Równanie różnicowe (kwantowanie czasu d$t=nT$)

$$\frac{T_1}{T}\Delta x(nT)+x(nT)=10u(nT)$$

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{a_k}{T^k}\cdot\Delta^k x(nT)=\sum_{k=0}^{q}\frac{b_k}{T^k}\cdot\Delta^k u(nT)$$

c) Zmiana skali czasu

$$\frac{T_1}{T}\Delta x(n)+x(n)=10u(n)$$

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{a_k}{T^k}\cdot\Delta^k x(n)=\sum_{k=0}^{q}\frac{b_k}{T^k}\cdot\Delta^k u(n)$$

d) Postać równoważna (podstawienie $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$)

$$\frac{T_1}{T}\big(x(n+1)-x(n)\big)+x(n)=10u(n)$$

$$\frac{T_1}{T}x(n+1)+\left(1-\frac{T_1}{T}\right)x(n)=10u(n)$$

$$\sum_{k=0}^{p} c_k\cdot x(n+k)=\sum_{k=0}^{q} d_k\cdot u(n+k)$$

e) Rozwiązanie

$$p=1,\, q=0,\quad c_1=\frac{T_1}{T}, c_0=\left(1-\frac{T_1}{T}\right), d_0=10$$

$$x(n)=\frac{1}{c_p}\left(\sum_{k=0}^{q} d_k\cdot u(n+k-p)-\sum_{k=0}^{p-1} c_k\cdot x(n+k-p)\right)$$

$$x(n)=\frac{1}{c_1}\left(\sum_{k=0}^{0} d_k\cdot u(n+k-1)-\sum_{k=0}^{1-1} c_k\cdot x(n+k-1)\right)=\frac{1}{c_1}d_0\cdot u(n-1)-\frac{c_0}{c_1}\cdot x(n-1)$$

$$x(n)=10\frac{T}{T_1}\cdot 1(n-1)-\frac{T-T_1}{T}\frac{T}{T_1}\cdot x(n-1)=\frac{10T}{T_1}\cdot 1(n-1)-\frac{T-T_1}{T_1}x(n-1)$$

(T - czas próbkowania)

[Amborski/422]

Transmitancja – równanie różnicowe

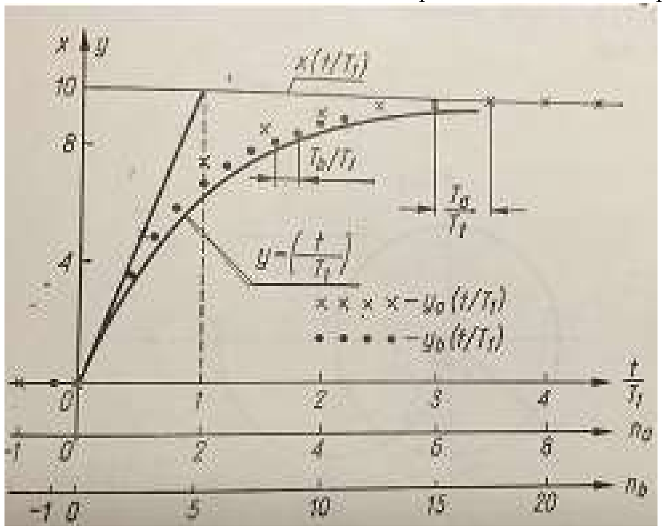
(opis ciągłego układu) (opis układu impulsowego)

Przykład 4 cd: Wyznaczyć odpowiedź skokową układu

$$G(s) = \frac{10}{T_1 s + 1}$$

e) Rozwiązanie

$$x(n) = \frac{10T}{T_1} \cdot 1(n-1) - \frac{T - T_1}{T_1} x(n-1)$$



Czas próbkowania:
1° $T_a = T_1/2$,
2° $T_b = T_1/5$

Skalowanie osi:
1° $n_a = 2t / T_1$
2° $n_b = 5t / T_1$