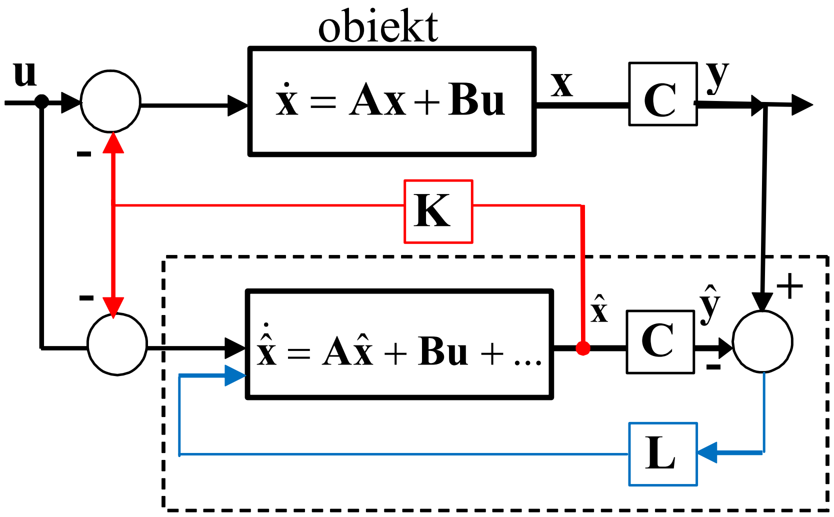
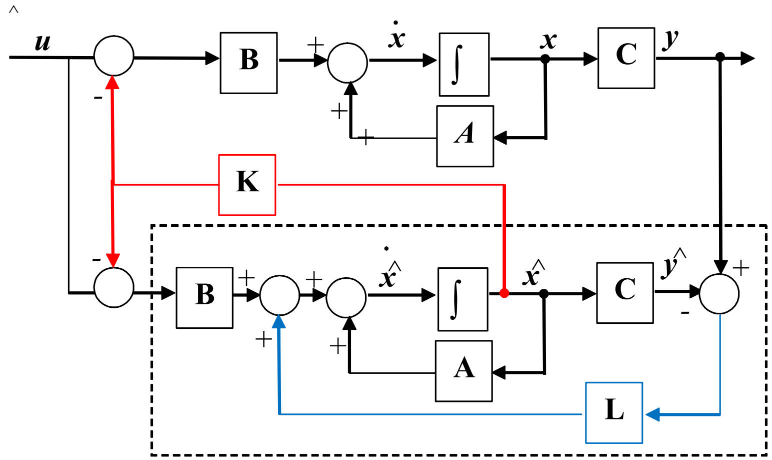
Przykład projektowania





Niezależne etapy projektowania:

Etap 1: Określenie położenie biegunów i opracowanie zasady sterowania (**K**), które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego

Etap 2: Opracowanie estymatora (gdy nie wszystkie *x* są dostępne)

Etap 3: Połączenie zasady sterowania i estymatora

Przykład

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

1° Stabilność układu - bieguny układu: $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

$$\begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ -1 & s+4 \end{vmatrix} = (s+1)(s+4) - 2 \qquad \rightarrow s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2$$

System jest stabilny

2° Macierz obserowalności: $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 & 1\cdot 2 + 0\cdot(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Osobliwość macierzy **Q**: $\det\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$

System jest obserwowalny

3° Równanie charakterystyczne obserwatora: $\det\left(s\mathbf{I} - \left(\mathbf{A} - \mathbf{LC}\right)\right) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} s+1+L_1 & -2 \\ -1+L_2 & s+4 \end{vmatrix} = s^2 + (L_1+5)s + 4L_1 + 2L_2 - 2$$

4° Lokowanie biegunów – np. 5x $\mathrm{Re}(s_{1,2}) = -25$

$$(s+25)^2 = s^2 + 50s + 625$$

5° Układ równań (porównanie współczynników):

$$\begin{cases} L_1 + 5 = 50 \\ 4L_1 + 2L_2 + 2 = 625 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{aligned} L_1 &= 45 \\ L_2 &= 221.5 \end{aligned}}$$

Matlab:
eig(A);
Q = obsv(A, C);det(Q);
L = acker(A',C’, [-25,-25]);

(Uwaga zwaraca L jako wiersz)

Przykład $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$ $\quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{K} = [K_1 \quad K_2]$

$\mathbf{y} = [1 \quad 0]\mathbf{x}$

Bieguny układu: $s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2$

Obserwator: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} + \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix}(\mathbf{y} - [1 \quad 0]\hat{\mathbf{x}})$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} + \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix}\mathbf{y} - \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix}[1 \quad 0]\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -46 & 2 \\ -220.5 & -4 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 45 \\ 1 & 221.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

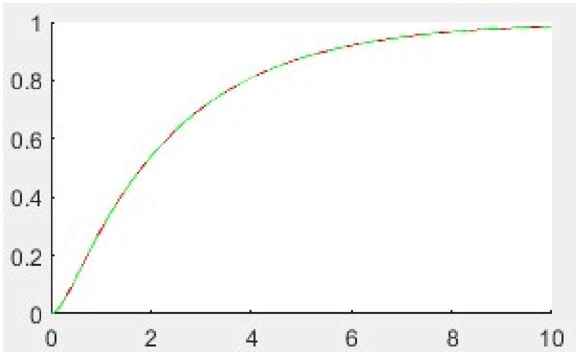
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{y}$$

Bieguny: -25,-25

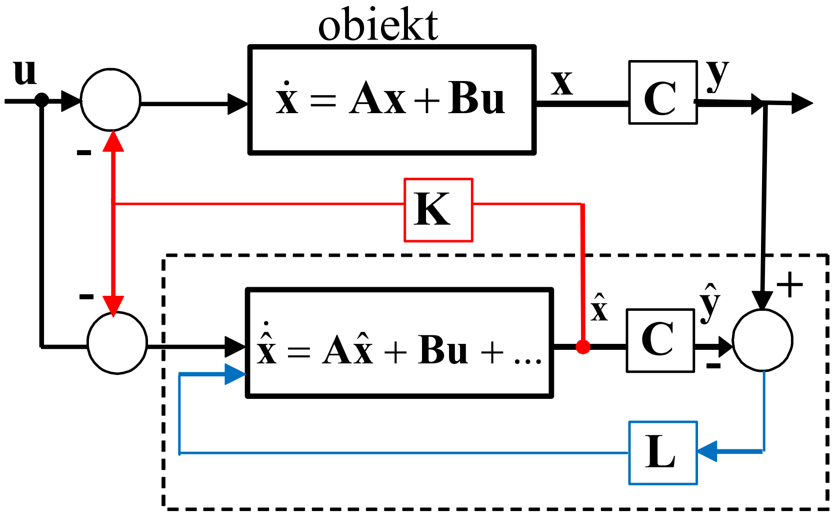
$\mathbf{e}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

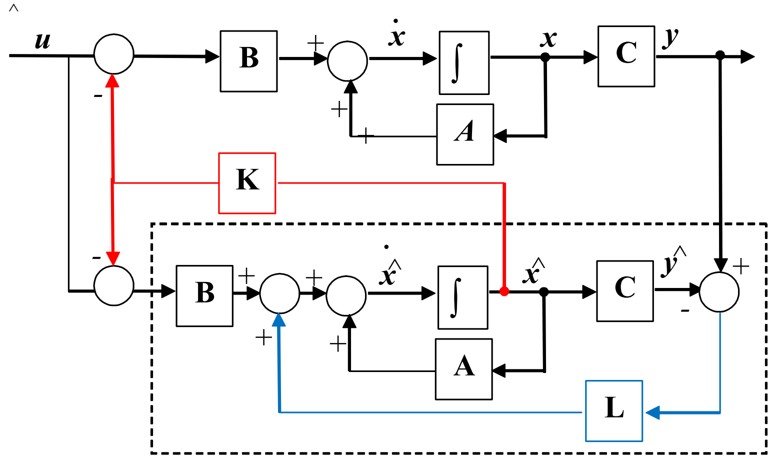
```
Matlab:
eig(A-L'*C);                 %spr. biegunów
%Porównanie odpowiedzi modelu i obserwatora
model1 = ss(A, B, C, 0);
model1O = ss(A-L'*C, [B,L'], C, 0);

figure, hold on
t = 0:0.01:10;   u = zeros(size(t))+1; x0 = [0, 0];  %przygotowanie do skoku 1(t)
y1 = lsim(model1, u, t, x0);  plot(t, y1,'r-');          %step(model1);
y1O = lsim(model1O, [u; y1'], t, x0);  plot(t, y1O,'g--');
```



Sprzężenie od wektora stanu obserwatora





Niezależne etapy projektowania:

Etap 1: Określenie położenie biegunów i opracowanie zasady sterowania (K),
które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego

Etap 2: Opracowanie estymatora (gdy nie wszystkie *x* są dostępne)

Etap 3: Połączenie zasady sterowania i estymatora

Przykład

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Bieguny układu: $s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2$

6° Macierz sterowalności: $\mathbf{P} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1 & 1\cdot 0 + (-4)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

Osobliwość macierzy **P**: $\det P = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$ System jest sterowalny

---

7° Równanie charakterystyczne układu skorygowanego: $\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ -1+K_1 & s+4+K_2 \end{vmatrix} = s^2 + (K_2+5)s + (K_2+4) + 2(K_1-1)$$

8° Lokowanie biegunów układu skorygowanego – np. -10,-10 (przyspieszenie reakcji)

(przesunięcie biegunów s_1, s_2)

$$(s+10)^2 = s^2 + 20s + 100$$

9° Układ równań (porównanie współczynników):

$$\begin{cases} K_2 + 5 = 20 \\ K_2 + 4 + 2K_1 - 2 = 100 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{aligned} K_1 &= 41.5 \\ K_2 &= 15 \end{aligned}}$$

Matlab:
P = ctrb(A, B);det(P);
K = acker(A,B, [-10,-10]);

Przykład

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 41.5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Bieguny układu: $s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2$

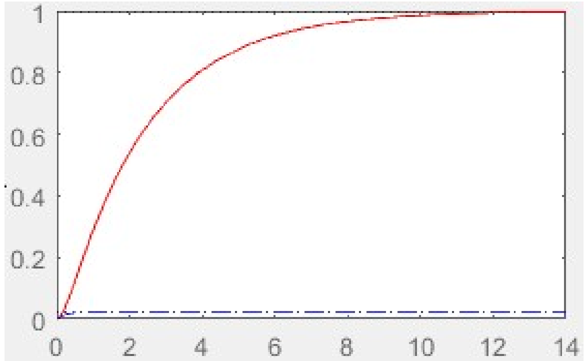
Bieguny układu skorygowanego: $s_{1,2} = -10$

Układ skorygowany: $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bu}$

```
Matlab:
eig(A-B*K);                %spr. biegunów
%Porównanie odpowiedzi modelu pierwotnego i skorygowanego
model1 = ss(A, B, C, 0);
model1K = ss(A-B*K, B, C, 0);

figure, hold on
step(model1);
step(model1K);

%alternatywa -------------------------
t = 0:0.01:10;   u = zeros(size(t))+1; x0 = [0, 0];  %przygotowanie do skoku 1(t)
y1 = lsim(model1, u, t, x0);  plot(t, y1,'r-');
y1K = lsim(model1K, u, t, x0);  plot(t, y1K,'b--');
```



Stan ustalony:

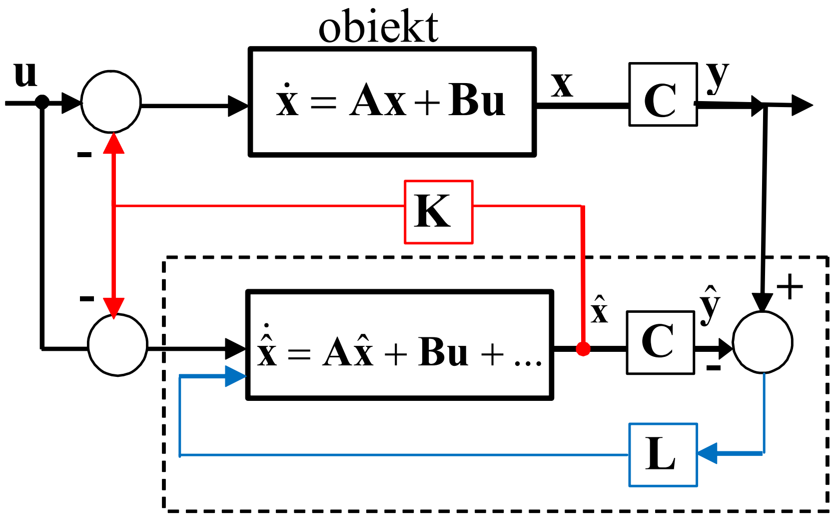
$$0 = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \qquad\qquad 0 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bu}$$

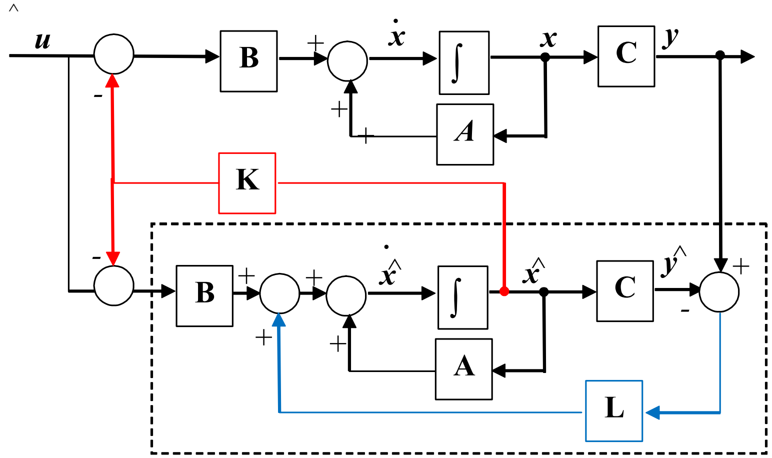
$$\mathbf{Ax} = -\mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu} \qquad\qquad \mathbf{x} = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{Bu}$$

Sprzężenie od wektora stanu obserwatora





Niezależne etapy projektowania:

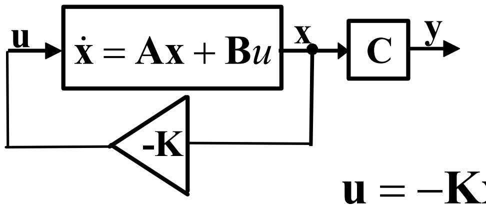
Etap 1: Określenie położenie biegunów i opracowanie zasady sterowania (K), które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego

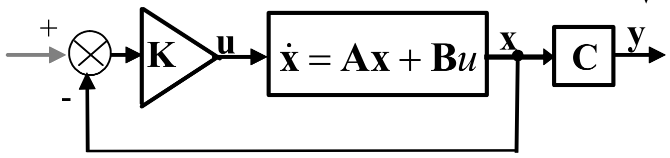
Etap 2: Opracowanie estymatora (gdy nie wszystkie *x* są dostępne)

Etap 3: Połączenie zasady sterowania i estymatora

Etap 4: Wprowadzenie wejścia odniesienia

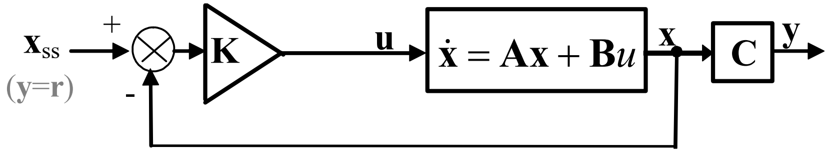
Opracowanie zasady sterowania

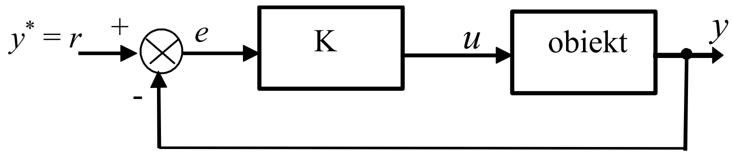




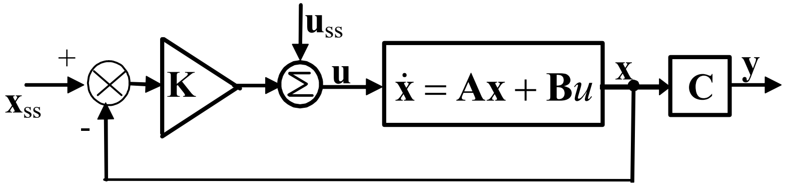
$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

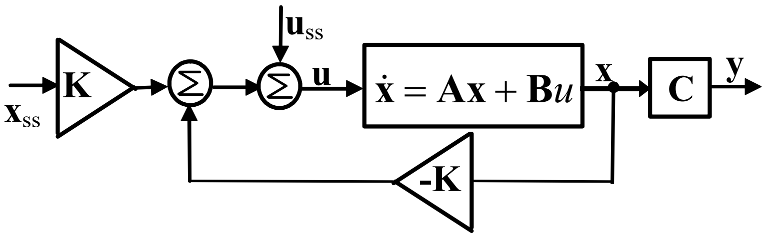
Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)

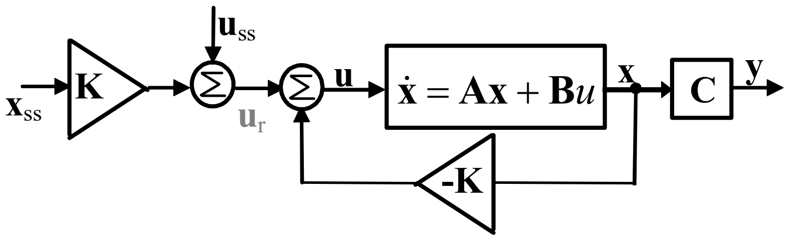




niezerowy uchyb e_{ss}





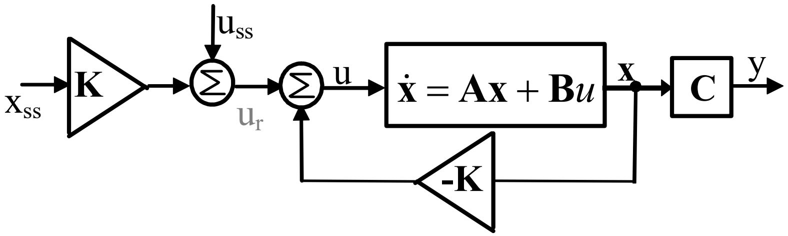


$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss})$$

gdy $e_{ss} = 0$ ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$) to $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$

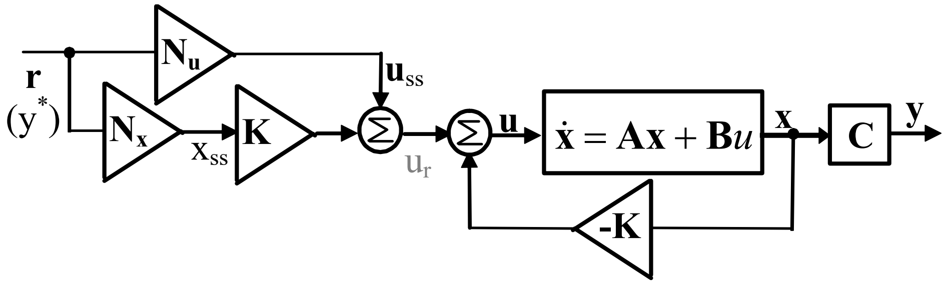
$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{ss} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{ss} \qquad \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{u}_r$$

Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)



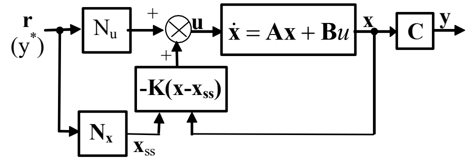
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss})$$

gdy $e_{ss}=0$ ($\mathbf{x}=\mathbf{x}_{ss}$) to $\mathbf{u}=\mathbf{u}_{ss}$



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{ss}$$

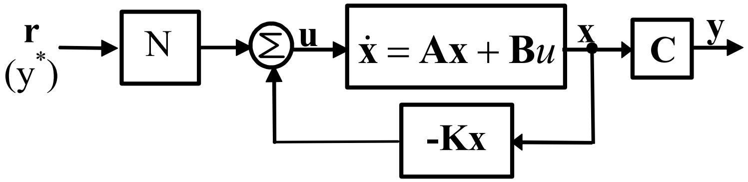
$$\mathbf{u}_{ss} \downarrow \mathbf{N}_u\mathbf{r} \qquad \mathbf{x}_{ss} \downarrow \mathbf{N}_x\mathbf{r}$$



$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u\mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{N}_x\mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + (\mathbf{N}_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x)\mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{r}$$



(**N** - jak przeliczyć w.zadane **r** na wartości wektora $\mathbf{x}_{ss}$ i $\mathbf{u}_{ss}$)

W stanie ustalonym, gdy $e_{ss} = 0$: $\mathbf{y} = \mathbf{r}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$,

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{y}_{ss} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \mathbf{x}_{ss} &= \mathbf{N}_x\mathbf{r} \\ \mathbf{u}_{ss} &= \mathbf{N}_u\mathbf{r} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{N}_x + \mathbf{B}\mathbf{N}_u = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{N}_x + \mathbf{D}\mathbf{N}_u = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\mathbf{N} = \mathbf{N}_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x}$$

[Franklin/469-71]

Przykład $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$ $\quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 45 \\ 221.5 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{K} = [41.5 \quad 15]$

$\mathbf{y} = [1 \quad 0]\mathbf{x}$

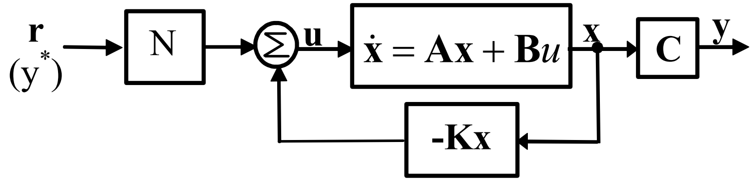
Bieguny układu: $s_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})/2$

Bieguny układu skorygowanego: $s_{1,2} = -10$

10° Wprowadzenie wejścia odniesienia:

Na wyjściu obserwujemy zmienną $y = x_1$

$$[y] = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$



Zmienna y powinna osiągnąć wartość zadaną r

Obliczenie macierzy do przeskalowania wartości zadanej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{N}_\mathrm{u} = 1$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_\mathrm{u} + \mathbf{K}\mathbf{N}_\mathrm{x}$$

$$\mathbf{N} = 1 + [41.5 \quad 15]\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 50$$

```
Matlab:
N_1 = [A, B; C, 0];
N_2 = N_1 ^ (-1) * [0;0;1];
Nx = N_2(1:2);
Nu = N_2(3);
N = Nu +K * Nx
```

[Franklin/471]