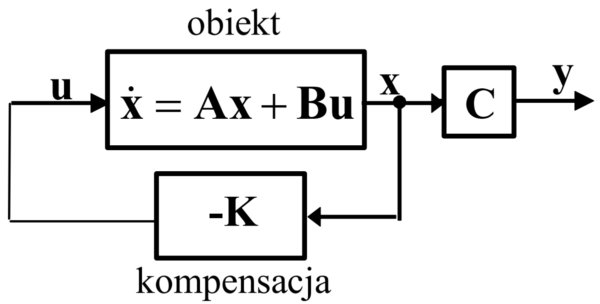
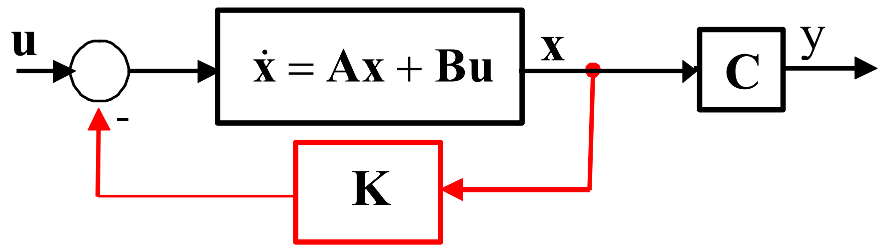
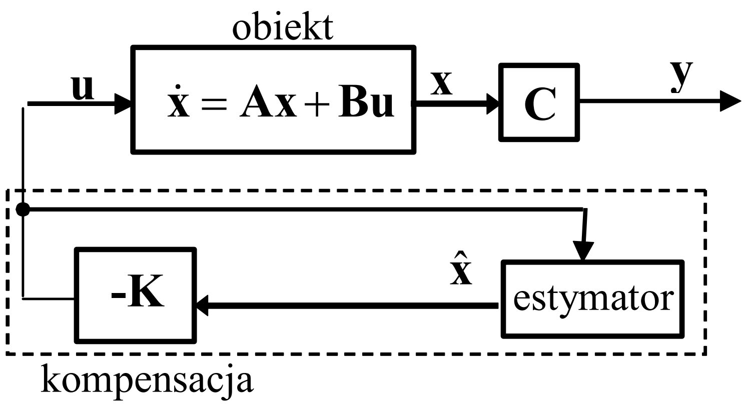
Równania stanu – sprzężenie od wektora stanu

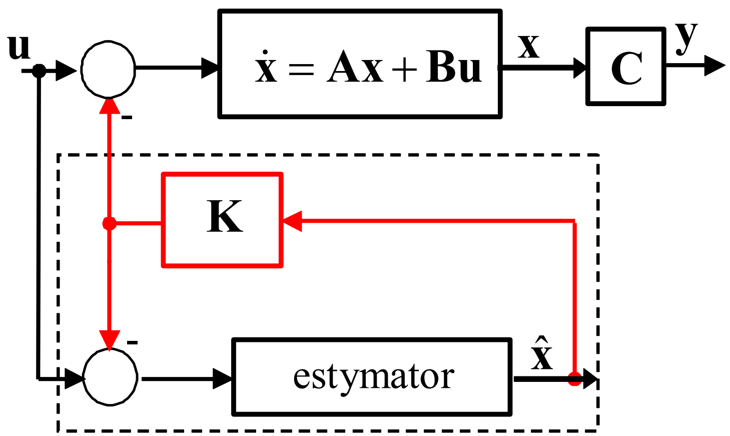
A. Dostępne wszystkie zmienne stanu





B. Dostępna część zmiennych stanu



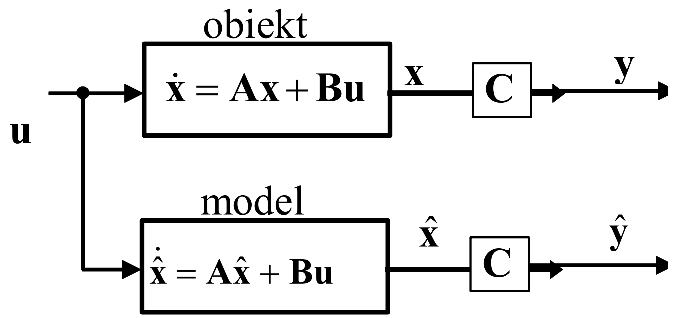


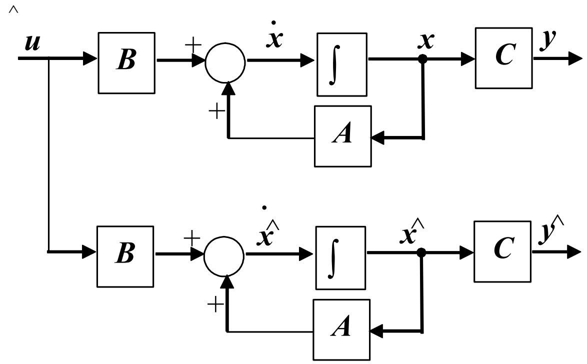
Estymator - obserwator

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

1° Estymatora ($\hat{\mathbf{x}}$) na podstawie modelu obiektu

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, gdzie macierze **A**, **B** i wejścia **u** są znane





- Odtwarzamy estymaty w układzie otwartym
- Jednak nie znamy poprawnych (dokładnych) warunków początkowych **x**(0)

Niedokładne oszacowanie x(0) → błąd oszacowania stale rośnie lub zbyt wolno zanika (nie mamy wpływu na szybkość tego zanikania)

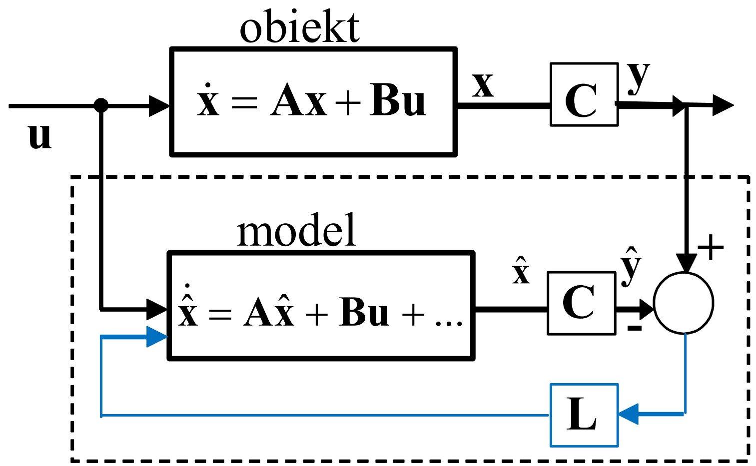
Rozwiązanie problemu – użyć sprzężenia zwrotnego

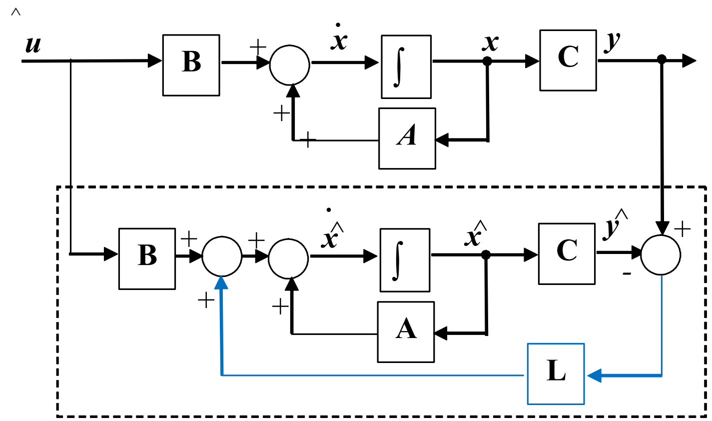
Estymator - obserwator

2° Estymator ($\hat{\mathbf{x}}$) na podstawie modelu obiektu + sprzężenie zwrotne (obserwator Luenbergera)

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$, gdzie $\mathbf{L} = [L_1, \ldots, L_n]^T$ wektor współczynników

L - macierz wmocnienia (błędu zbieżności)





Obserwator (estymator) stanu – model, który na podstawie pomiaru we (**u**) i wy (**y**) dostarcza estymaty ($\hat{\mathbf{x}}$) wewnętrznego stanu układu (**x**)

Estymator - obserwator

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$, gdzie $\mathbf{L}=[l_1, \ldots, l_n]^T$ wektor współczynników
L - macierz wmocnienia (błędu zbieżności)

Cel obserwatora - uzyskać estymator $\hat{\mathbf{x}}$ taki, że $\hat{\mathbf{x}} \to \mathbf{x}$ gdy t $\to \infty$.

Błąd estymacji:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \qquad \mathbf{e}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})\right) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}$$

Poprawny estymator zapewnia: $\mathbf{e}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

to znaczy, że równanie charakterystyczne $\det\left(s\mathbf{I} - \left(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}\right)\right) = 0$ ma pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie $\hat{\mathbf{x}}$

Zadanie projektowanie obserwatora Luenbergera: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$

– znaleźć macierz **L**, taką, że równanie $\det\left(s\mathbf{I} - \left(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}\right)\right) = 0$

ma pierwiastki w lewej półpraszczyźnie.

Zadanie można zrealizować, gdy system jest w pełni obserwowalny.

Obserwowalność - definicja

D1: Układ (system) jest obserwowalny, jeśli na podstawie znajomości wyjścia można określić stan układu w dowolnej chwili z przeszłości.

Znamy wyjście $\mathbf{y}(t)$ i wejście $\mathbf{u}(t)$ systemu w pewnym okresie czasu $[0, t]$, a
a celem jest wyznaczenie stanu początkowego $\mathbf{x}(0)$.

Jeśli dla dwóch różnych wektorów $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ w chwili $t = 0$ i sterowaniu $\mathbf{u}(t)$ otrzymujemy tą samą odpowiedź, to system nie jest obserwowalny.

Oznaczmy jako $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}_1; \mathbf{u}(\tau), \tau \in [0, t])$ wyjście systemu w chwili t, którego stan początkowy dany jest przez wektor $\mathbf{x}_1$, a sterowanie przez $\mathbf{u}(\tau)$.

D2: System nazywamy obserwowalnym jeśli istnieje $t^* \geq 0$, takie że z równości

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{x}_1; \mathbf{u}(\tau), \tau \in [0, t]) = \mathbf{y}(t; \mathbf{x}_2; \mathbf{u}(\tau), \tau \in [0, t])$$

zachodzącej dla wszystkich $t \in [0, t^*]$ wynika, że

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{2.}$$

Obserwowalność - twierdzenie

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

System jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz obserwowalności

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa (det $\mathbf{Q} \neq 0$).

Matlab:
A = ...; B = ...; C = ...
Q = **obsv**(A, C);
det(Q);

A = ...; B = ...; C = ...
model = ss(A,B,C,0);
Q = **obsv**(sys);
det(Q);

Przykłady

1) $$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Bieguny układu: det (s**I** - **A**) = 0
$s_1 = -4, s_2 = 5,$

Macierz obserowalności:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1\cdot(-2) + 0\cdot(2) & 1\cdot 3 + 0\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Osobliwość macierzy **Q**: $\det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$

System jest obserwowalny

Projektowanie obserwatora

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

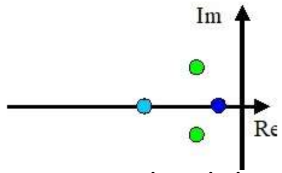
Równanie charakterystyczne obserwatora:

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} s+2+L_1 & -3 \\ -2+L_2 & s+1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (s+2+L_1)(s+1) + 3(-2+L_2) = s^2 + (2+L_1+1)s + (2+L_1) + 3(L_2-2) =$$

$$= s^2 + (L_1+3)s + L_1 + 3L_2 - 4$$



Zadane pierwiastki (określenie szybkości $\mathbf{e}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$)

$$(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

np. co najmniej 5x dalej
niż znaczące bieguny układu

Porównanie współczynników:

$$\begin{cases} L_1 + 3 = 4 \\ L_1 + 3L_2 - 4 = 4 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{aligned} L_1 &= 1 \\ L_2 &= 7/3 \end{aligned}}$$

Matlab:

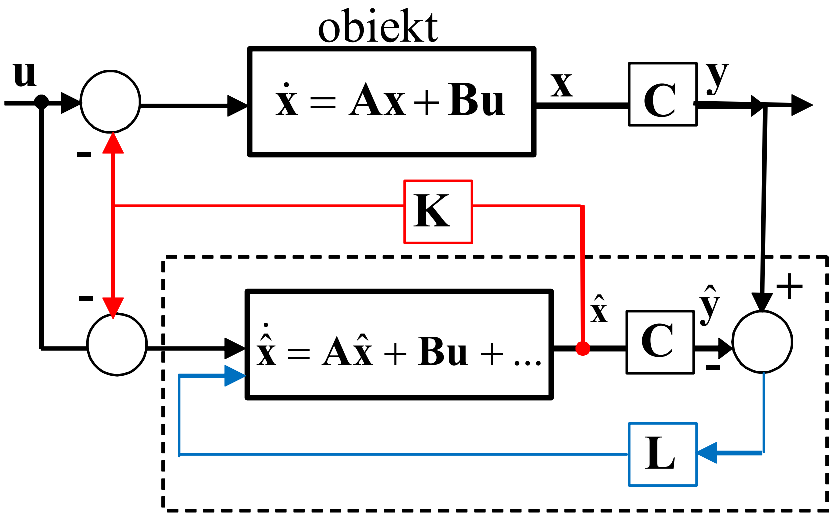
```
A = ...; B = ...; C = ...
model = ss(A,B,C,0);
tabQ = ... %lokacja biegunów
L = acker(A',C',tabQ);
%L = place(A',C',tabQ);
```

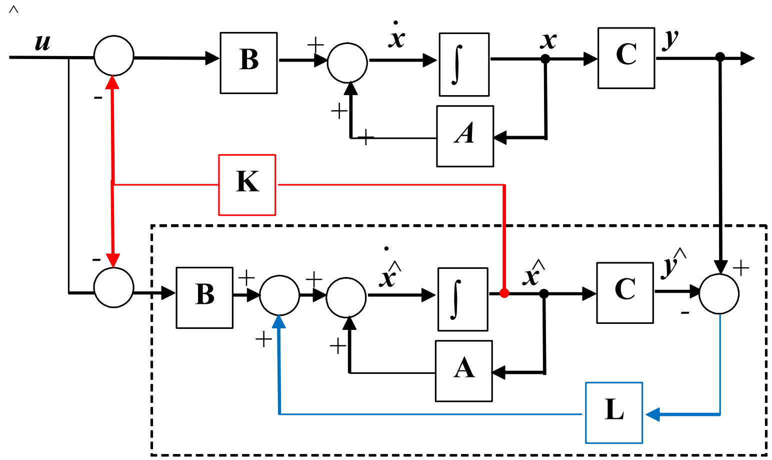
Obserwator: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7/3 \end{bmatrix}(\mathbf{y} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}})$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7/3 \end{bmatrix}\mathbf{y} - \begin{bmatrix} 1 \\ 7/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1/6 & -1 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

Sprzężenie od wektora stanu obserwatora





Niezależne etapy projektowania:

Etap 1: Określenie położenie biegunów i opracowanie zasady sterowania (**K**), które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego

Etap 2: Opracowanie estymatora (gdy nie wszystkie *x* są dostępne)

Etap 3: Połączenie zasady sterowania i estymatora

Control Tutorials: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction&section=ControlStateSpace#45