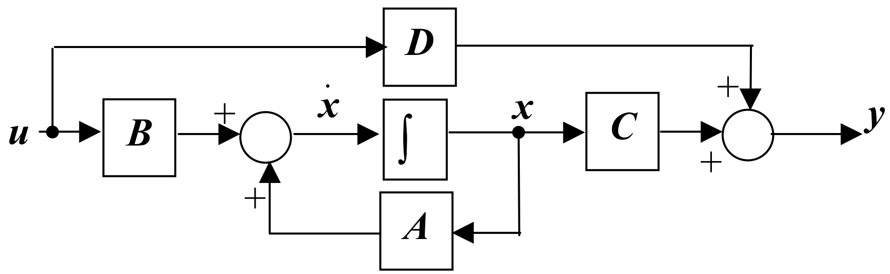
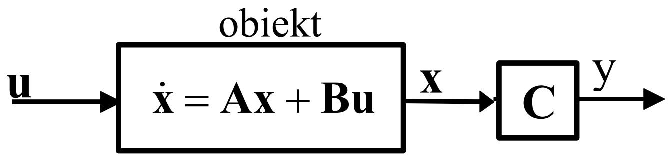
Równania stanu

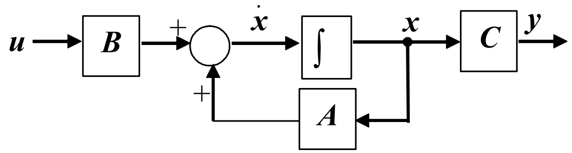
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$ Równania stanu

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$ Równania wyjściowe



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$





$$0 = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$ Równania statyczne

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$ Punkt równowagi

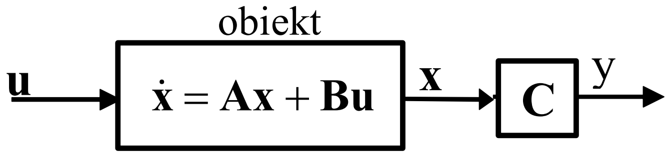
$$\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0$$ Równanie charakterystyczne

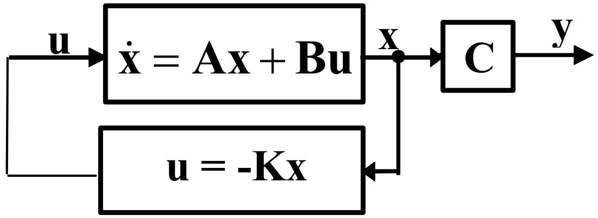
λ – wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ → stabilność

$$\det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\det\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Równania stanu – sprzężenie od wektora stanu





Obiekt:

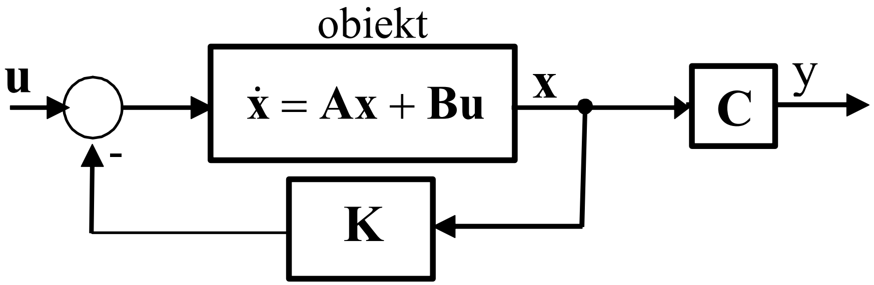
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

Sterowanie:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} K_1 & \dots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Układ zamknięty:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}$$
$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$
$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$$



Układ zamknięty:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{u} - \mathbf{K}\mathbf{x})$$
$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$$

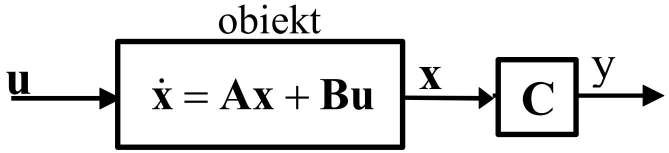
K – macierz sprzężeń, macierz korekcji, zasada sterowania

(**A** - **BK**) – skorygowana macierz stanu

Przykład 1

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$



Stabilność

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \qquad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} s-2 & -3 \\ -6 & s+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(-1-\lambda) - 18 = 0 \qquad (s-2)(s+1) - 18 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(2-1) - 2 - 18 = 0 \qquad s^2 + (1-2)s - 2 - 18 = 0$$

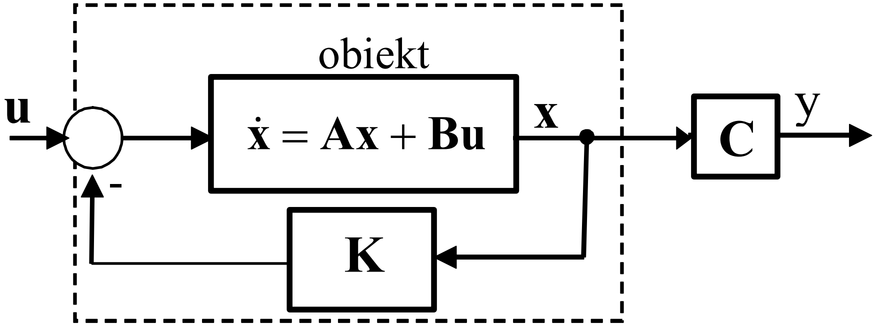
$$\lambda^2 - \lambda - 20 = 0$$

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 5$$

System niestabilny

Przykład 1 (c.d.)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left((\mathbf{A} - \mathbf{BK}) - \lambda\mathbf{I}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2+K_1 & 3+K_2 \\ 6-2K_1 & -1-2+K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2+K_1-\lambda & 3+K_2 \\ 6-2K_1 & -3+K_2-\lambda \end{vmatrix} = (2+K_1-\lambda)(-3+K_2-\lambda) - (3+K_3)(6-2K_1) = 0$$

$$\lambda^2 - (2+K_1-3+K_2)\lambda + (2+K_1)(-3+K_2) - (3+K_2)(6-2K_1) = 0$$

$$\lambda^2 - (K_1+K_2-1)\lambda + 2K_1K_2 + 3K_1 - 4K_2 - 24 = 0$$

Zadanie: Dobrać K tak aby uzsykać określone bieguny

Sterowanie modalne – lokowanie biegunów

$$\begin{cases} -K_1 - K_2 + 1 = 3 \\ 2K_1K_2 + 3K_1 - 4K_2 - 24 = 2 \end{cases}$$

λ_1 = -2, λ_2 = -1 $\qquad \to (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$

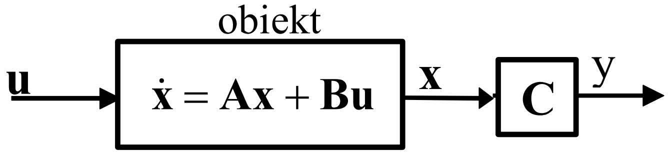
$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{cases} K_1 = -1 - K_2 \\ 2K_2^2 + 11K_2 + 32 = 0 \end{cases} \quad \to \Delta = -135$$

Przykład 2

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$



Stabilność

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \qquad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} s+2 & -3 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = 0 \qquad (s+2)(s+1) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(-3) + 2 - 6 = 0 \qquad s^2 + 3s + 2 - 6 = 0$$

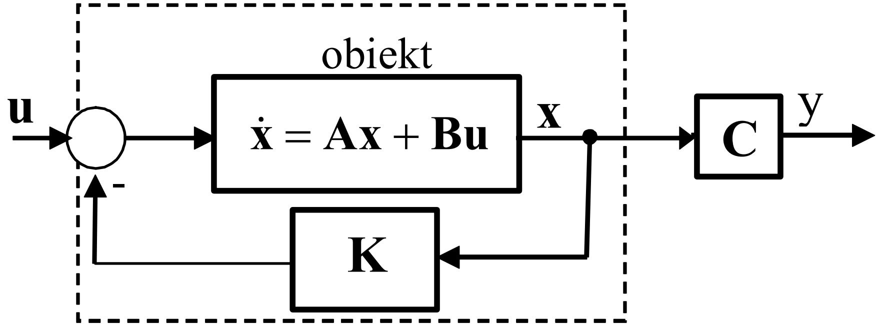
$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$$

System niestabilny

Przykład 2 (c.d.)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

$$\det\left((\mathbf{A} - \mathbf{BK}) - \lambda\mathbf{I}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 + K_1 & -1 + K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 + K_1 & -1 + K_2 - \lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-1 + K_2 - \lambda) - 3(2 + K_1) = 0$$

$$\lambda^2 - (-2 - 1 + K_2)\lambda - 6 - 3K_1 = 0$$

$$\lambda^2 + (3 - K_2)\lambda - 6 - 3K_1 = 0$$

Zadanie: Dobrać K tak aby uzsykać określone bieguny

Sterowanie modalne – lokowanie biegunów

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1 \qquad \to (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{cases} 3 - K_2 = 3 \\ -3K_1 - 6 = 2 \end{cases}$$

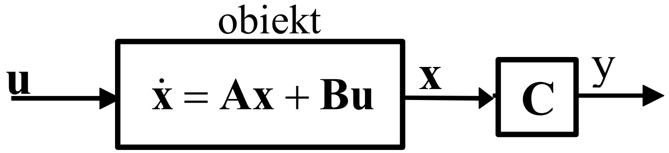
$$K_1 = -8/3,\ K_2 = 0$$

Przykład 3

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}\\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx}\end{cases}$$



Stabilność

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 5 & -\lambda & 3\\ 0 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2(-2-\lambda)-10(-2-\lambda)=0$$

$$\lambda^2(2+\lambda)-10(2+\lambda)=0$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

$$\begin{vmatrix}s & -2 & 0\\ -5 & s & -3\\ 0 & 0 & 2+s\end{vmatrix}=0$$

$$s^2(2+s)-10(2+s)=0$$

$$(2+\lambda)(\lambda^2-10)=0$$

$$\lambda_1=-2$$

$$\lambda_2=+\sqrt{10} \quad >0$$

$$\lambda_3=-\sqrt{10}$$

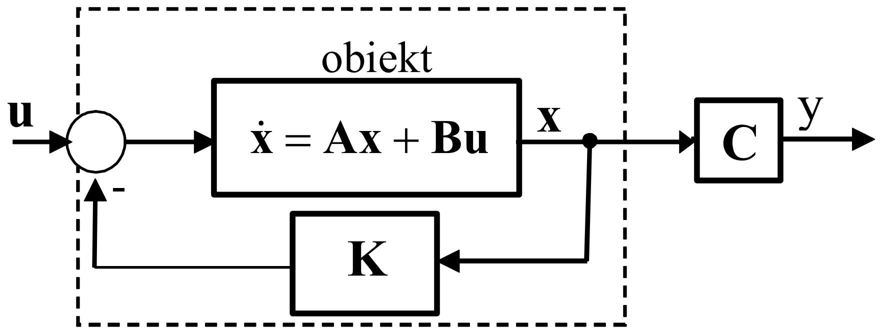
Matlab:
A = ..., B = ..., C = ...
eig(A)

Matlab (+Control):
A = ..., B = ..., C = ...
model = ss(A,B,C,0);
pole(model);

Przykład 3 (c.d.)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}K_1 & K_2 & K_3\end{bmatrix}$$



$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=(\mathbf{A}-\mathbf{BK})\mathbf{x}+\mathbf{Bu}\\ \mathbf{y}=\mathbf{Cx}\end{cases}$$

$\mathbf{A}-\mathbf{BK}$

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_1 & K_2 & K_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 3\\ -10K_1 & -10K_2 & -2-10K_3\end{bmatrix}$$

Matlab:

A = ...; B = ...; C = ...
tabP = ... %lokacja biegunów
K = **place**(A,B,tabP);
model2 = ss(A-B*K,B,C,0);
pole(model2); %spr.

$$\det((\mathbf{A}-\mathbf{BK})-\lambda\mathbf{I})=0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 5 & -\lambda & 3\\ -10K_1 & -10K_2 & -2-10K_3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2(-2-10K_3-\lambda)-60K_1-10(-2-10K_3-\lambda)-30K_2\lambda=0$$

$$-\lambda^3+\lambda^2(-2-10K_3)+(10-30K_2)\lambda+20+100K_3-60K_1=0\,\Big|\cdot(-1)$$

$$\begin{cases}2+10K_3=4\\ -10+30K_2=9\\ -20-100K_3+60K_1=10\end{cases}$$

Zadanie: Dobrać K tak aby uzsykać określone bieguny

Sterowanie modalne – lokowanie biegunów

λ_1 = -2, λ_2 = -1-2i, λ_3 = -1+2i $\quad\rightarrow(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$

$$(\lambda+2)(\lambda+1+2i)(\lambda+1-2i)=(\lambda+2)\left((\lambda+1)^2-(2i)^2\right)=\lambda^3+4\lambda^2+9\lambda+10=0$$

$$K_1=5/6;K_2=19/30;K_3=0.2$$

Sterowalność - definicja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

D1: System (układ) nazywamy sterowalnym, jeśli istnieje takie t^*,
że dla każdej pary stanów ($\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x}^*$) istnieje sterowanie $\mathbf{u}(t)$ takie, że jeżeli

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0},$$

to

$$\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*.$$

D2: System (układ) jest sterowalny, jeśli możliwe jest przeprowadzenie układu w skończonym czasie z danego stanu w stan zerowy przez odpowiedni wybór sterowania.

Stan układu jest sterowalny w chwili t_0, jeśli istnieje przedziałami ciągła funkcja sterowania taka, że dla pewnej skończonej chwili $t^* \geq t_0$ stan układu będzie zerowy.

System jest sterowalny w chwili t_0, jeśli każdy stan układu jest sterowany w chwili t_0.

System jest całkowicie sterowalny, jeśli jest sterowany dla dowolnej chwili t_0.

Sterowalność - twierdzenie

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

System jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz sterowalności

$$\mathbf{P} = \left[\mathbf{B},\ \mathbf{AB},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$$

jest nieosobliwa (det$\mathbf{P} \neq 0$).

(przypadek gdy ilość wejść =1)

Przykłady

1) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\mathbf{u}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 5$$

System niestabilny

Macierz sterowalności: $\mathbf{P} = \left[\mathbf{B},\ \mathbf{AB}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) \\ -2 & 6\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

$\mathbf{B}$ $\quad$ $\mathbf{AB}$

Osobliwość macierzy **P**: $\det \mathbf{P} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 8 = 0$

System nie jest sterowalny

---

2) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$$

System niestabilny

$\mathbf{P} = \left[\mathbf{B},\ \mathbf{AB}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\det \mathbf{P} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

System jest sterowalny

Przykłady

3) $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sterowalność

Macierz sterowalności: $$\mathbf{P} = \left[\mathbf{B},\ \mathbf{AB},\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 0 & 30 & -60 \\ 10 & -20 & 40 \end{bmatrix}$$

B **AB** $\mathbf{A^2B}$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AAB} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -60 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{P}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 0 & 30 & -60 \\ 10 & -20 & 40 \end{vmatrix} = -10 * 30 * 60$$

System jest sterowalny

```
Matlab:
A = ...; B = ...;
A1 = A*B;
A2 = A*A*B;
P = [B, A1, A2];
det(P)
```

```
A = ...; B = ...;
P = ctrb(A,B);
det(P)
```

```
A = ...; B = ...; C = ...
model = ss(A,B,C,0);
P = ctrb(model);
det(P)
```

Przykłady

3 c.d.)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Matlab:

```
A = ...; B = ...; C = ...
tabP = ... %lokacja biegunów
%K = place(A,B,tabP);
K = acker(A,B,tabP);
model2 = ss(A-B*K,B,C,0);
pole(model2);  %sprawdzenie
```

$$\det\left(\left(\mathbf{A}-\mathbf{BK}\right)-\lambda\mathbf{I}\right) =$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 5 & -\lambda & 3\\ -10K_1 & -10K_2 & -2-10K_3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^3+\lambda^2(2+10K_3)+(-10+30K_2)\lambda-20-100K_3+60K_1=0$$

Lokowanie biegunów

a) $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1-2i,\ \lambda_3 = -1+2i$

$$(\lambda+2)(\lambda+1+2i)(\lambda+1-2i) = \lambda^3+4\lambda^2+9\lambda+10=0$$

$$\rightarrow \begin{cases}2+10K_3=4\\ -10+30K_2=9\\ -20-100K_3+60K_1=10\end{cases}$$

$$K_1=5/6; K_2=19/30; K_3=0.2$$

---

b) $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -2$

$$(\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda+2) = \lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8=0$$

$$\rightarrow \begin{cases}2+10K_3=6\\ -10+30K_2=12\\ -20-100K_3+60K_1=8\end{cases}$$

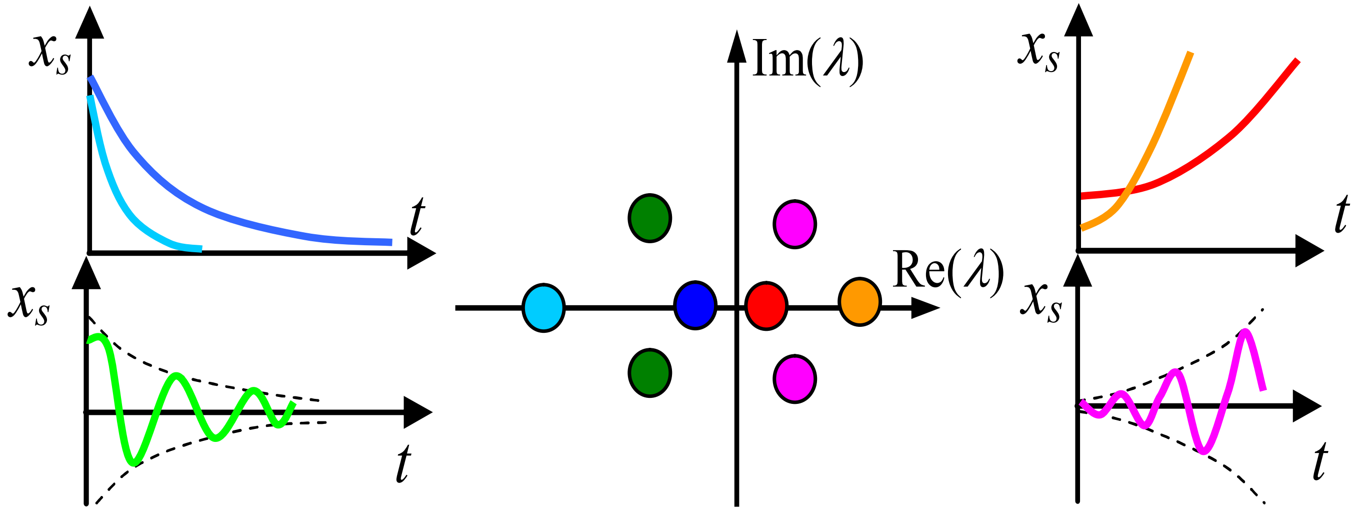
$$K_1=17/15; K_2=11/15; K_3=0.4$$

Uwaga Matlab:

```
K = acker(A,B,[-2, -2, -2]);          %bieguny wielokrotne
K = place(A,B,[-2, -2.01, -2.02]);    %bieguny wielokrotne
```

Położenie pierwiastków, stabilność, charakter odpowiedzi

$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$



$$Ae^{\alpha t}\cos(\omega t - \varphi)$$

Lokowanie biegunów

Sterowalność – twierdzenie (ogólniejsze) *

System jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz sterowalności

$$\mathbf{P} = \left[\mathbf{B},\ \mathbf{AB},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$$

ma rząd n, czyli taki jak rząd systemu. (przypadek gdy ilość wejść >=1)

Przykłady

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$$

System niestabilny

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2-6 \neq 0$$

Rząd systemu =2

Macierz sterowalności:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{B},\ \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\cdot 0+3\cdot 1 & -2\cdot 1+3\cdot 0 \\ 1 & 0 & 2\cdot 0-1\cdot 1 & 2\cdot 1-1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{}_{\mathbf{B}}\ \underbrace{}_{\mathbf{AB}}$$

Rząd macierzy **P** = 2, bo np.:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1 \neq 0$$

System jest sterowalny (rząd P = rząd A)

> Matlab:
> A = ...; B = ...;
> P = **ctrb**(A,B);
> **rank**(P); **rank**(A);

Stabilizowalność

*

System jest stabilizowalny, gdy niestabilne bieguny są sterowalne

---

Przykłady

1) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}$ $\quad \to \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$

System niestabilny

Macierz sterowalności: $\mathbf{P} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det \mathbf{P} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Rząd macierzy $\mathbf{P} = 1$

System nie jest sterowalny

$$\det\left((\mathbf{A} - \mathbf{BK}) - \lambda \mathbf{I}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 + K_1 & 0 + K_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 3 + K_1 - \lambda & K_2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 + K_1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

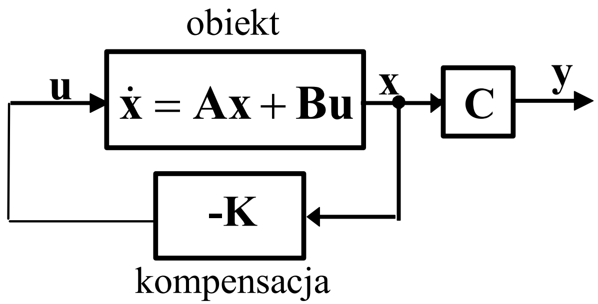
$$\lambda_1 = -1$$

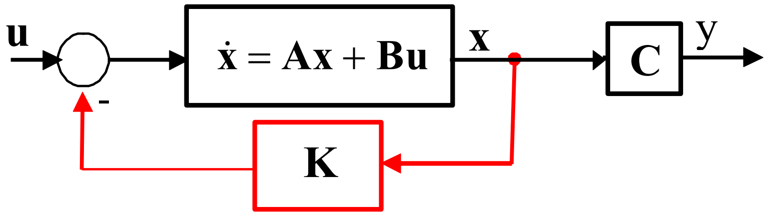
$$\lambda_2 = 3 + K_1 < 0 \to K_1 > 3$$ Warunek stabilności

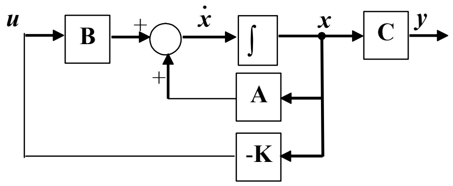
Warunki stabilizowalności są słabsze niż warunki sterowalności

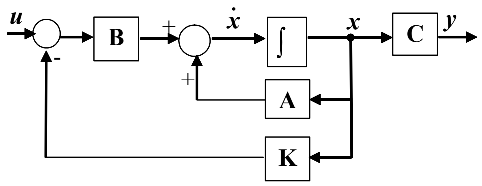
Równania stanu – sprzężenie od wektora stanu

A. Dostępne wszystkie zmienne stanu









B. Dostępna część zmiennych stanu