Równanie charakterystyczne – rozwiązanie swobodne

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \longrightarrow a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} \qquad M(s) = 0 \longrightarrow a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda^2 + b_1 \lambda + b_0)\cdots = 0$$

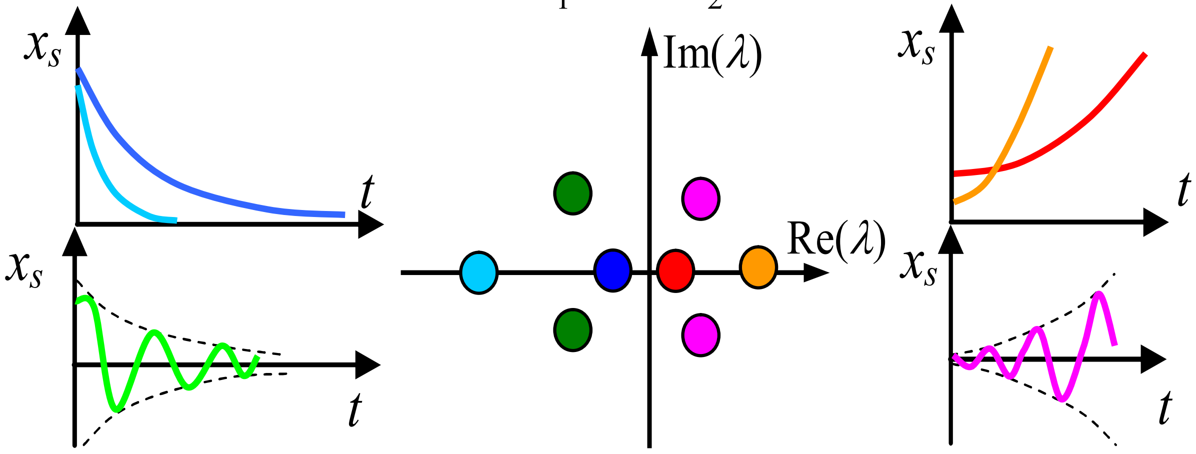
Bieguny (pierwiastki równania charakterystycznego):	Składniki $x_s(t)$:
a) jednokrotne rzeczywiste λ_i	$A_1 e^{\lambda_1 t}$
b) m-krotne λ_k	$\left(A_{k1} + A_{k2} t + \ldots + A_{km} t^{m-1}\right) e^{\lambda_k t}$
c) pary pierwiastków zespolonych $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$	$A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_1)$

Definicje i kryteria stabilności

Równanie różniczkowe nazywamy **stabilnym**
jeśli rozwiązanie $x(t)$ dąży do rozwiązania wymuszonego x_w.

Równanie różniczkowe liniowe jest stabilne
… gdy wszystkie elementy składowej swobodnej x_s zanikają z czasem.
… gdy wszystkie bieguny układu leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej.
… gdy części rzeczywiste wszystkich biegunów są ujemne.

$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$



$$A e^{\alpha t} \cos(\omega t - \varphi)$$

Stabilność asymptotyczna

Podstawowe badania dynamiki a stabilność

Podstawowe badania dynamiki układów prowadzi się na podstawie:

- ewolucji stanu od różnych warunków początkowych przy stałym wymuszeniu,
- reakcji na wymuszenia skokowe i impulsowe podawane w stanie równowagi

Stabilność na podstawie zachowania układu przy stałym wymuszeniu

- **układ stabilny** przy stałym wymuszeniu (u_k) dąży do punktu równowagi (x_k)
- **układ niestabilny** trwa w punkcie równowagi gdy jest to jego stan początkowy, ale mniejsze zakłócenie powoduje trwałe oddalenie od tego punktu.

Stabilność układów liniowych:

- nie zależy ani od warunków początkowych,
- nie zależy od wymuszenia (punktu pracy i wielkości skoku),

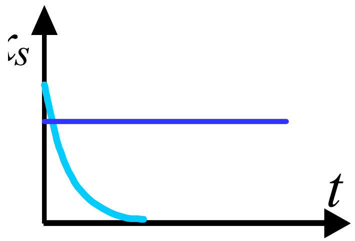
Wnioski:

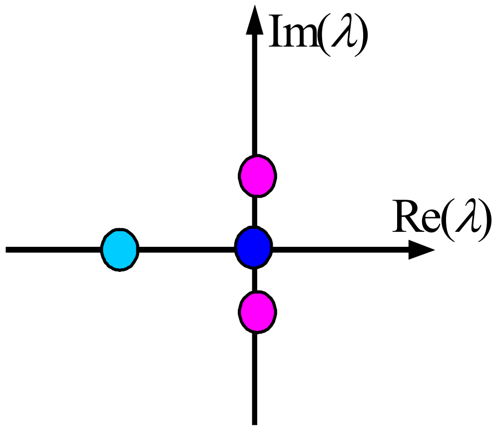
- Jeśli układ jest stabilny, to jest stabilny globalnie, a jeśli jest niestabilny, to jest niestabilny globalnie.
- Doświadczalne badanie stabilności można ograniczyć do wyznaczenia reakcji na dowolne wymuszenie skokowe (impulsowe) w dowolnym punkcie pracy.

Stabilność asymptotyczna

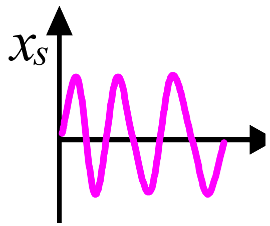
Równanie różniczkowe nazywamy **stabilnym**
jeśli rozwiązanie $x(t)$ dąży do rozwiązania wymuszonego x_w.

Równanie różniczkowe liniowe jest stabilne
… gdy wszystkie elementy składowej swobodnej x_s zanikają z czasem.
… gdy wszystkie bieguny układu leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej.
… gdy części rzeczywiste wszystkich biegunów są ujemne.





Układy na granicy stabilności



$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{0t}$

$Ae^{0t}\cos(\omega t - \varphi)$

Stabilność BIBO

Stabilność BIBO (ang. Bounded Input Bounded Output): układ jest stabilny, jeśli na ograniczone wymuszenie $u(t)$ (np. stałe, skokowe, impulsowe, sinusoidalne) reaguje ograniczonym sygnałem wyjściowym $x(t)$.

Układ na granicy stabilności

$$\boxed{\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)=u(t)}$$

$x_s(t):\quad \lambda^2+\lambda=0 \longrightarrow \lambda(\lambda+1)=0$

$$x_s(t)=A_1e^{0t}+A_2e^{-1t}$$

$u(t)=1(t)$

$x_w(t):\quad x_w(t)=1$

$\dot{x}_w(t)=0$

$0=1$???

$u(t)=\delta(t)$

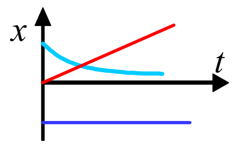
$x_w(t):$

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{1}{s(s+1)}\frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s(s+1)}$$

1) $\dfrac{1}{s^2(s+1)}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s}+\dfrac{C}{s^2}$ $=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-1}{s}+\dfrac{1}{s^2}$ $\boxed{\rightarrow h(t)=e^{-1t}-1(t)+t}$



nieograniczony

$$1=s^2A+s(s+1)B+(s+1)C$$

$s=0:\quad 1=0A+0(0+1)B+(0+1)C \qquad \rightarrow C=1$

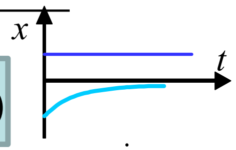
$s=-1:\quad 1=1A-1(-1+1)B+(-1+1)C \qquad \rightarrow A=1$

$s=1:\quad 1=1A+1(1+1)B+(1+1)C$

$1=1+2B+2 \qquad \rightarrow B=-1$

2) $\dfrac{1}{s(s+1)}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s}$ $=\dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{1}{s}$ $\boxed{\rightarrow k(t)=-e^{-1t}+1(t)}$

Spr.: $k(t)=h'(t)$



ograniczony

Układ na granicy stabilności

$$\boxed{\ddot{x}(t)+x(t)=u(t)}$$

$x_s(t):\quad \lambda^2+1=0 \longrightarrow \lambda=\pm j$

$$x_s(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

$u(t)=1(t)$

$x_w(t):\quad x_w(t)=1$

$\dot{x}_w(t)=0$

$$x_w(t)=u(t)$$

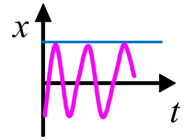
$$\boxed{x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+1}$$

$x(0)=0:\quad 0=A\sin(\varphi)+1$ ograniczony

$u(t)=\delta(t)$

$G(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$	$\dfrac{1}{s^2+1}\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{1}{s^2+1}$

1) $\dfrac{1}{s(s^2+1)}=\dfrac{A}{s^2+1}+\dfrac{B}{s} \quad =\dfrac{-s}{s^2+1}+\dfrac{1}{s}$ $\quad \boxed{\rightarrow h(t)=-\cos t+1(t)}$



ograniczony

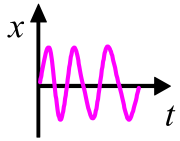
$$1=sA+(s^2+1)B$$

$$1=s^2B+sA+B \rightarrow \begin{cases} 1=B & \rightarrow B=1 \\ 0=s^2B+sA & \rightarrow A=-s \end{cases}$$

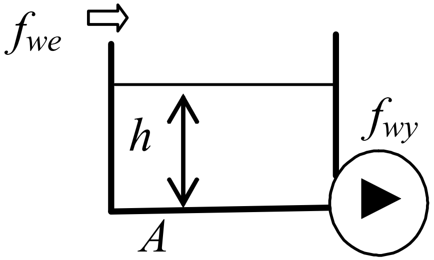
---

2) $\dfrac{1}{s^2+1}$ $\quad \boxed{\rightarrow k(t)=\sin t}$

Spr.: $k(t)=h'(t)$



ograniczony

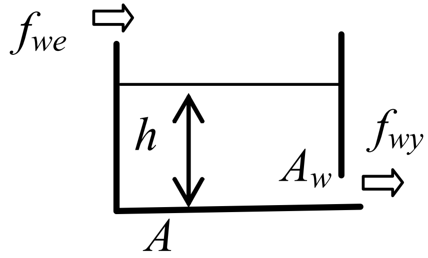


$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t)$$

$$0 = f_{we} - f_{wy} \qquad \rightarrow h = ???$$

$1^\circ \quad f_{we} > f_{wy}$

$2^\circ \quad f_{we} < f_{wy}$



$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - ah(t)$$

$$0 = f_{we}(t) - ah(t) \qquad \rightarrow h = \frac{f_{we}}{a}$$

$$Ash(s) = f_{we}(s) - f_{wy}(s)$$

$$h(s) = \frac{1}{As} f_{we}(s) - \frac{1}{As} f_{wy}(s)$$

$$h(s) = \frac{1}{As}\left(f_{we}(s) - f_{wy}(s)\right)$$

$$As = 0 \qquad \rightarrow s = 0$$

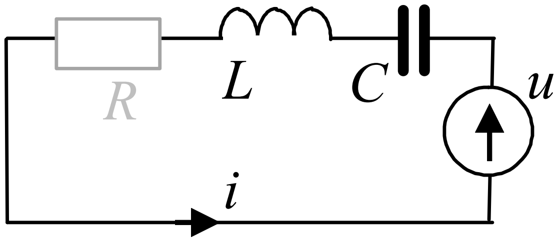
Układ całkujący

$$Ash(s) = f_{we}(s) - ah(s)$$

$$h(s) = \frac{1}{As + a} f_{we}(s)$$

$$As + a = 0 \qquad \rightarrow s = \frac{-a}{A}$$

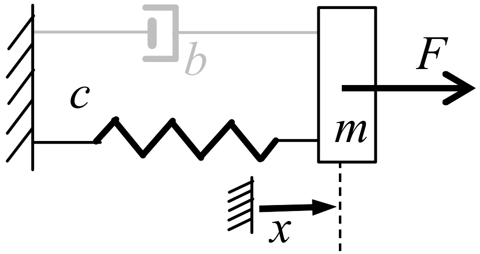
Przykład układu z parą biegunów urojonych



$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = u(t)$$

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

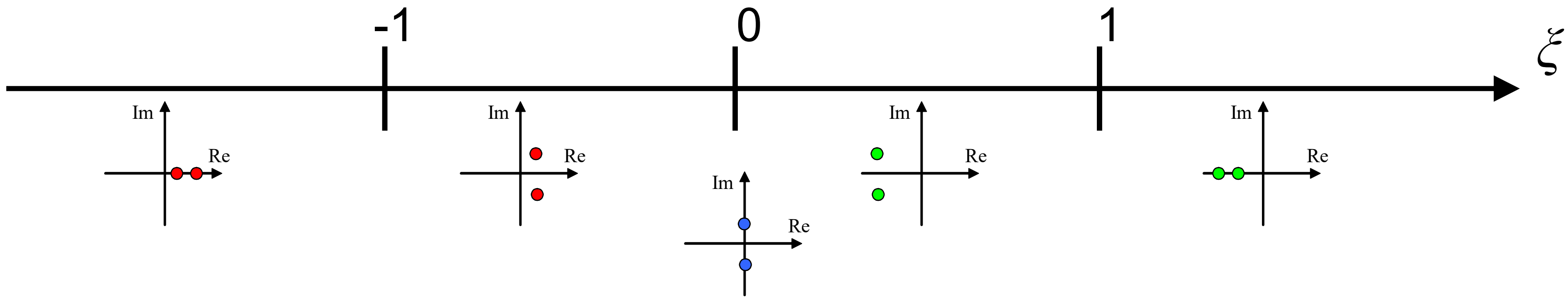
$$R = 0 \;\rightarrow\; \qquad L\ddot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$



$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

$$b = 0 \;\rightarrow\; \qquad m\ddot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\,\omega_n\,\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = u(t)$$



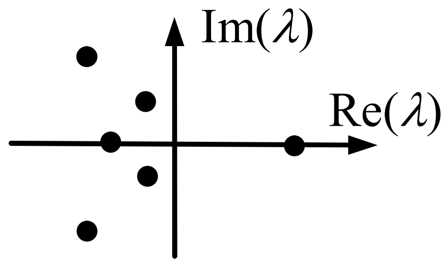
Równanie różniczkowe n-tego rzędu

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

Równanie charakterystyczne n-tego stopnia

$$a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \longrightarrow a_n(\lambda - \lambda_k)\ldots.(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

Położenie biegunów



Kryteria położenia pierwiastków

(Kryteria stabilności układu)

Kryterium Hurwitza

Kryterium Routha

Kryterium Hurwitza

Wszystkie pierwiastki równania $a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ leżą w lewej półpłaszczyźnie, jeśli wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera i mają jednakowy znak, a wszystkie minory główne wielomianu są dodatnie.

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Jeśli warunki nie są spełnione,
to kryterium nie określa, ile pierwiastków jest dodatnich

Kryterium Routha

Wszystkie pierwiastki równania $a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ leżą w lewej półpłaszczyźnie, jeśli wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera i mają jednakowy znak a wszystkie współczynniki pierwszej kolumny tablicy Routha są dodatnie.

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \qquad c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1} \qquad d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}$$

$$b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

Jeśli warunki kryterium nie są spełnione,
to można wyznaczyć ilość pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie
– jest ona równa liczbie zmian znaku w pierwszej tablicy Routha