Transformata Laplace'a - definicje

Przekształcenie proste $f(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ $\quad f(s) = \int_{0_+}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$

Warunek istnienia transformaty - funkcja $f(t)$ jest całkowalna w każdym przedziale $[0,T]$; $T>0$

Warunek wystarczający ale niekonieczny: bezwzględnie transformowanle są funkcje typu wykładniczego, np.:

$\cos\beta t$, $\sin\beta t$, $e^{-at}\cos\beta t$, $e^{-at}\sin\beta t$, $t^n e^{-at}$, $t^n e^{-at}\cos\beta t$

dla dowolnego β, $n>0$, $a>0$ (funkcje ograniczone dla $t \geq 0$),

t^n, $t^n e^{at}$, $t^n e^{at}\cos\beta t$, $t^n e^{at}\sin\beta t$

dla dowolnego β, $n>0$, $a\geq 0$ (funkcje całkowite typy wykładniczego).

Inne (też całkowalne), np.:

$t^{-1/2}$, $(t-a)^{-1/3}$, $\ln(t-a)$ dla $a>0$,

Przekształcenie odwrotne $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[f(s)]$ $\quad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s) e^{-st} dt$

Transformata Laplace'a – wybrane funkcje

Oryginał f(t)	Transformata F(s)	Uwagi
$\delta(t)$	1	
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	dla n=1, $s_0=0$
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^n	$\frac{n!}{s^n+1}$	
$e^{s_0 t}$	$\frac{1}{s-s_0}$	dla n=1
$e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{T}{sT+1}$	dla n=1, $s_0= -1/T$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	dla $s_0=0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{s_0 t}$	$\frac{1}{(s-s_0)^n}$	n – liczba naturalna s_0 – liczba zespolona

Oryginał f(t)	Transformata F(s)	Uwagi
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	
$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	
$1-\cos \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s(s^2+\omega_0^2)}$	
$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$	
$e^{-bt} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+b)^2+\omega_0^2}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t$	$\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$	dla $\zeta<1$

Transformata Laplace'a – własności (1)

$$f(s)=\int_{0_+}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

1° Liniowość przekształcenia $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}\left[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\right]e^{-st}dt=$$
$$=a_1\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-st}dt+a_2\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-st}dt=a_1 f_1(s)+a_2 f_2(s)$$

2° Transformata $\mathscr{L}$ całki funkcji $f(t)$, tzn. transformata funkcji $h(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$

$$\int_0^T h(t)e^{-st}dt=\frac{-1}{s}e^{-st}h(t)\Big|_0^T+\frac{1}{s}\int_0^T f(t)e^{-st}dt=0+\frac{1}{s}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

dla $T\to\infty$ jest: $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}\,\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{s}f(s)$

3° Transformata $\mathscr{L}$ pochodnej funkcji $f(t)$, tzn. transformata funkcji $f'(t)$

$$\int_0^T f'(t)e^{-st}dt=e^{-st}f(t)\Big|_0^T+s\int_0^T f(t)e^{-st}dt=e^{-sT}f(T)-f(0+)+s\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

dla $T\to\infty$ jest: $\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=s\,\mathscr{L}\left[f(t)\right]-f(0+)=sf(s)-f(0+)$

gdzie $f(0+)=\lim_{t\to 0+} f(t)$. Własność można uogólnić na pochodną n-tego rzędu:

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^n f(s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}f^{(k)}(0+)$$

Pomoc: Całkowanie przez części: $\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$ (np. https://www.matmana6.pl/calkowanie-przez-części)

Transformata Laplace'a – własności (2)

4° Transformata $\mathcal{L}$ funkcji przesuniętej w czasie $f(t-t_0)$

$$\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\cdot 1f(t-t_0)\right]=\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt = e^{-st_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$= e^{-st_0}\ \mathcal{L}\left[f(t)\right] = e^{-st_0}\ f(s)$$

5° Transformata $\mathcal{L}$ funkcji $f(t)$ po zmianie skali

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=\int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-st}dt = a\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-sa\tau}d\tau = af(as) \text{ dla } a>0$$

6° Transformata $\mathcal{L}$ iloczynu funkcji $f(t)$ i t^n (pochodna transformaty $\mathcal{L}$)

$$\frac{d^n f(s)}{ds^n}=\int_0^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[f(t)e^{-st}\right]dt=\int_0^{\infty} f(t)^n(-1)^n t^n e^{-st}dt=$$

$$=(-1)^n\int_0^{\infty} t^n f(t)e^{-st}dt=(-1)^n\ \mathcal{L}[t^n f(t)]$$

7° Transformata $\mathcal{L}$ iloczynu funkcji $f(t)$ i $e^{-s_0 t}$ (przesunięcie transformaty $\mathcal{L}$)

$$\mathcal{L}\left[e^{-s_0 t}f(t)\right]=\int_0^{\infty} e^{-s_0 t}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+s_0)t}dt=f(s+s_0)$$

8° Zachowanie transformaty $\mathcal{L}$ na granicach:

- jeśli istnieje $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=f(\infty)$, to $\lim\limits_{s\to 0} sf(s)=f(\infty)$
- jeśli istnieje $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)=f(0+)$, to $\lim\limits_{s\to\infty} sf(s)=f(0+)$

Przekształcenia całkowe – własności

Przekształcenie	Laplace'a	Fouriera
proste	$f(s)=\int\limits_{0_+}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$	$f(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$
odwrotne	$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s)e^{-st}dt$	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$s = j\omega$

Twierdzenie	Laplacea'a	Fouriera
o liniowości	$\mathscr{L}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(s)$	$\mathscr{F}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\omega)$
o przesunięciu w czasie (opóźnieniu)	$\mathscr{L}\left[f(t-1)1(t-a)\right]=e^{-sa}f(s)$	$\mathscr{F}\left[f(t-1)1(t-a)\right]=e^{-j\omega a}f(\omega)$
o przesunięciu transformaty	$\mathscr{L}\left[e^{-at}f(t)\right]=f(s+a)$	$\mathscr{F}\left[e^{-at}f(t)\right]=f(\omega-a)$
o zmianie skali	$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=af(s)$	$\mathscr{F}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=\lvert a\rvert f(a\omega)$
o transformacie pochodnej	$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sf(s)-f(0+)$	$\mathscr{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=j\omega\, f(\omega)$
o transformacie całki	$\mathscr{L}\left[\int\limits_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s}f(s)$	$\mathscr{F}\left[\int\limits_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{j\omega}f(\omega)$
o różniczkowaniu transformaty	$\mathscr{L}\left[-tf(t)\right]=\frac{df(s)}{ds}$	$\mathscr{F}\left[-tf(t)\right]=\frac{df(\omega)}{d\omega}$
o transformacie splotu	$\mathscr{L}\left[f(t)*g(t)\right]=f(s)g(s)$	$\mathscr{F}\left[f(t)*g(t)\right]=f(\omega)g(\omega)$
o wartości końcowej	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sf(s)$	
o wartości początkowej	$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sf(s)$	

Transmitancja

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$ *Równanie różniczkowe liniowe*

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$ *Równanie charakterystyczne*

Założenie: Równanie różniczkowe liniowe

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = f(s)$	$\mathscr{L}\left[af_1(t) + bf_2(t)\right] = af_1(s) + bf_2(s)$	$\mathscr{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sf(s) - f(0_+)$
Transformata funkcji	*Twierdzenie o liniowości*	*Transformata funkcji pochodnej* *Założenie:* $f(0_+) = 0$

$$a_n s^n X(s) + \ldots + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_m s^m U(s) + \ldots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$\left(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0\right) X(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0\right) U(s)$$

Równanie operatorowe

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \boxed{\frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = G(s)}$$

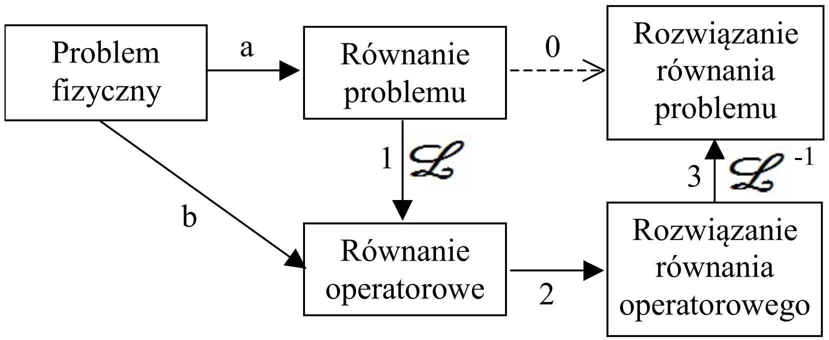
Transmitancja

Transmitancja = transformata funkcji wyjściowej do transformaty funkcji wejściowej
= funkcja przejścia, opisująca sposób przetwarzania sygnału

Założenia: Równanie różniczkowe liniowe i zerowe warunki początkowe

$$M(s) = 0 \longrightarrow a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$ *Równanie charakterystyczne*

Operatorowa metoda rozwiązywania r. różniczkowych



$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$X(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} U(s)$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} U(s) \right\}$$

$u(t)=1(t)$	$u(t)=\delta(t)$	$u(t)=\sin t$
$U(s) = 1/s$	$U(s) = 1$	$U(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Ogólniej: $$G(s) = \frac{L_g(s)}{(s-s_{g1})\ldots(s-s_{gn})} \qquad u(s) = \frac{L_u(s)}{(s-s_{u1})\ldots(s-s_{um})}$$

$$x(s) = G(s)u(s) = \frac{L_g(s)L_u(s)}{(s-s_{g1})\ldots(s-s_{gn})(s-s_{u1})\ldots(s-s_{um})}$$

Operatorowa metoda rozwiązywania r. różniczkowych

$$G(s)=\frac{L_g(s)}{(s-s_{g1})\dots(s-s_{gn})} \qquad u(s)=\frac{L_u(s)}{(s-s_{u1})\dots(s-s_{um})}$$

$$x(s)=G(s)u(s)=\frac{L_g(s)L_u(s)}{(s-s_{g1})\dots(s-s_{gn})(s-s_{u1})\dots(s-s_{um})}$$

Metoda rozkładu na ułamki proste

(1) Wyznaczyć pierwiastki mianownika funkcji $x(s)$
(2) Przedstawić funkcję $x(s)$ w postaci sumy ułamków prostych
(3) Wyliczyć wartości współczynników A_k, B_k
(4) Wyznaczyć $\mathscr{L}^{-1}$-transformaty składników
(5) Przedstawić rozwiązanie $x(t)$ w postaci sumy

$$x(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(s-s_{gk})}+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{(s-s_{uk})}$$

$$x_s(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{s_{gk}t} \qquad x_w(t)=\sum_{k=1}^{m}B_k e^{s_{uk}t} \qquad x(t)=x_s(t)+x_w(t)$$

Przypadek gdy pierwiastki jednokrotne: $s_{g1}\neq\dots\neq s_{gn}\neq s_{u1}\neq\dots\neq s_{um}$

Metoda rozkładu na ułamki proste (ogólniej)

$$x(s)=G(s)u(s)=\frac{L(s)}{(s-s_1)\dots(s-s_n)}$$

Ogólnie (pierwiastki wielokrotne)

– $x(s)$ ma m różnych pierwiastków s_i każdy o krotności p_i (w sumie n: $\sum_{i=1}^{m}p_i=n$)

$$x(s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i}\frac{A_{ij}}{(s-s_i)^j} \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-s_i)^j}\right]=\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{s_i t}$$

Operatorowa metoda rozwiązywania r. różniczkowych

Przykład: $x(s) = \dfrac{4s^3 + s^2 - 22s + 16}{s(s+2)(s-2)^2} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{C}{s-2} + \dfrac{D}{(s-2)^2}$ (wspólny mianownik po prawej stronie)

$$4s^3 + s^2 - 22s + 16 = A(s+2)(s-2)^2 + Bs(s-2)^2 + Cs(s+2)(s-2) + Ds(s+2)$$ (porównanie)

Wyznaczenie wartości *A*, *B* , *C*, *D:*

Metoda 1: Podstawiać do równania liczników wartości *s* takie jak kolejne pierwiastki

$s = 0 \quad \rightarrow \quad 16 = 8A \quad \rightarrow A = 2$

$s = \text{-}2 \quad \rightarrow \quad 32 = B(-2)(-2-2)^2 \quad \rightarrow B = \text{-}1$

$s = 2 \quad \rightarrow \quad 8 = D\,2(2+2) \quad \rightarrow D = 1$

Wielokrotny pierwiastek -> dodatkowe równanie -> równanie dla dowolnej wartości *s*,

np. *s*=1: $\quad -1 = 2(1+2)(1-2) - (1-2)^2 + C(1+2)(1-2) + (1+2) \quad \rightarrow \quad C = 3$

Metoda 2: Rozwinąć prawą stronę równania liczników i porównać współ. Przy tych samych potęgach *s*

$$4s^3 + s^2 - 22s + 16 = A(s^3 - 2s^2 - 4s + 8) + B(s^3 - 4s^2 + 4s) + C(s^3 - 4s) + D(s^2 + 2s)$$

$$\begin{cases} 4 = A + B + C \\ 1 = -2A - 4B + D \\ -22 = -4A + 4B - 4C + 2D \\ 16 = 8A \end{cases}$$ np. metoda Cramera

$$x(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$x(t) = 2 \cdot 1(t) - e^{-2t} + 3e^{2t} + te^{2t}$$

$$= 2 \cdot 1(t) - e^{-2t} + e^{2t}(3+t)$$

Transmitancja – równanie charakterystyczne (bieguny)

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = \boxed{\frac{L(s)}{M(s)} \longrightarrow M(s) = 0}$$

$$a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Transmitancja - stan ustalony (punkt równowagi)

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} \longrightarrow X(s) = G(s)U(s)$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s) \quad \text{, jeśli } \lim_{t\to\infty} x(t) \text{ istnieje}}$$

Dla $u(t)=1(t)$, czyli $U(s) = 1/s$ Dla $u(t)=k$, czyli $U(s) = k/s$	$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s)$ $\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{k}{s} = \lim_{s\to 0} G(s)k$
Dla $u(t)=\delta(t)$, czyli $U(s) = 1$	$\lim_{s\to 0} sG(s)$
Dla $u(t)=\sin t$, czyli $U(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ Granica?

Transmitancje układów wielowymiarowych

Przykład
$$\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t)+a_1x_1(t)-a_2x_2(t)=u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t)-b_1x_1(t)+b_2x_2(t)=u_2(t) \end{cases}$$

Operacje macierzowe

$$s\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-a_1}{m_1} & \frac{a_2}{m_1} \\ \frac{b_1}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$s\mathbf{x}(s)=\mathbf{Ax}(s)+\mathbf{Bu}(s)$$

$$\mathbf{x}(s)=\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{Bu}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+\frac{a_1}{m_1} & \frac{-a_2}{m_1} \\ \frac{-b_1}{m_2} & s+\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

Transmitancje układów wielowymiarowych

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+\dfrac{a_1}{m_1} & \dfrac{-a_2}{m_1} \\ \dfrac{-b_1}{m_2} & s+\dfrac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\dfrac{\det\left(\dfrac{m_2 s+b_2}{m_2}\right)}{\det(sI-A)} & (-1)^{2+1}\dfrac{\det\left(\dfrac{-a_2}{m_1}\right)}{\det(sI-A)} \\ (-1)^{1+2}\dfrac{\det\left(\dfrac{-b_1}{m_2}\right)}{\det(sI-A)} & (-1)^{2+2}\dfrac{\det\left(\dfrac{m_1 s+a_1}{m_1}\right)}{\det(sI-A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A) = \left(\frac{m_1 s+a_1}{m_1}\right)\left(\frac{m_2 s+b_2}{m_2}\right) - \frac{b_1 a_2}{m_1 m_2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_2 s+b_2}{M(s)} & \dfrac{a_2}{M(s)} \\ \dfrac{b_1}{M(s)} & \dfrac{m_1 s+a_1}{M(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$M(s) = (m_1 s+a_1)(m_2 s+b_2) - b_1 a_2$$

Transmitancje układów wielowymiarowych

Przykład $\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1x_1(t) - a_2x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1x_1(t) + b_2x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$

Równania operatorowe

$$\begin{cases} (m_1s + a_1)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) \\ (m_2s + b_2)x_2(s) = b_1x_1(s) + u_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1(s)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) \\ M_2(s)x_2(s) = b_1x_1(s) + u_2(s) \end{cases} \longrightarrow \quad x_1(s) = \frac{a_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)}$$

$$M_2(s)x_2(s) = b_1\frac{a_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)} + u_2(s) \quad \Big|\cdot M_1(s)$$

$$M_1(s)M_2(s)x_2(s) = b_1a_2x_2(s) + b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s)$$

$$\boxed{x_2(s) = \frac{b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2}}$$

$$M_1(s)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) = \quad a_2\frac{b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2} + u_1(s)$$

$$x_1(s) = \frac{a_2b_1u_1(s) + a_2M_1(s)u_2(s) + (M_1(s)M_2(s) - b_1a_2)u_1(s)}{M_1(s)(M_1(s)M_2(s) - b_1a_2)}$$

$$\boxed{x_1(s) = \frac{M_2(s)u_1(s) + a_2u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2}}$$

Transmitancje układów wielowymiarowych

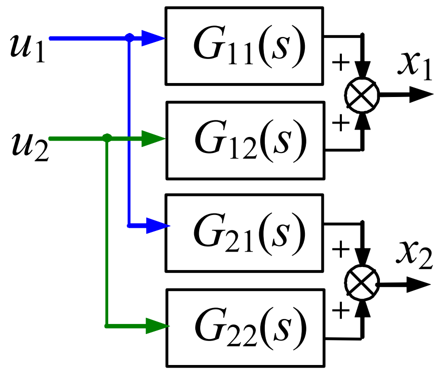
Przykład
$$\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

$$x_1(s) = \frac{m_2 s + b_2}{M(s)} u_1(s) + \frac{a_2}{M(s)} u_2(s)$$
$$x_2(s) = \frac{b_1}{M(s)} u_1(s) + \frac{m_1 s + a_1}{M(s)} u_2(s)$$

$$M(s) = (m_1 s + a_1)(m_2 s + b_2) - b_1 a_2$$

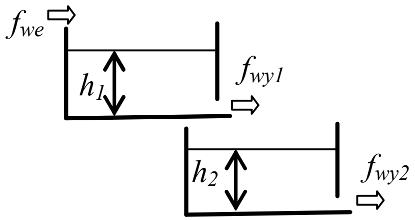
$$f_{we} = a_1(h_1 - h_2) = a_2 h_2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} h_1 &= f_{we}(a_1 + a_2)/(a_1 a_2) \\ h_2 &= f_{we}/a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$



Otwarte układy hydrauliczne (modele zlinearyzowanie)

Kaskada niewspółdziałająca



$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1 h_1(t) \\ A_2\dot{h}_2(t) = a_1 h_1(t) - a_2 h_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A_1 s + a_1)h_1(s) = f_{we}(s) \\ (A_2 s + a_2)h_2(s) = a_1 h_1(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 h_1(s) = f_{we}(s) \\ M_2 h_2(s) = a_1 h_1(s) \end{cases}$$

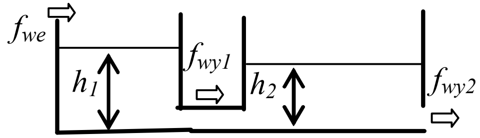
$$h_1(s) = \frac{1}{M_1} f_{we}(s)$$

$$h_2(s) = \frac{a_1}{M_1 M_2} f_{we}(s)$$

$$M_1 M_2 = (A_1 s + a_1)(A_2 s + a_2) = 0$$

$$A_1 A_2 s^2 + (A_1 a_2 + A_2 a_1)s + a_1 a_2 = 0$$

Kaskada współdziałająca



$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1\big(h_1(t) - h_2(t)\big) \\ A_2\dot{h}_2(t) = a_1\big(h_1(t) - h_2(t)\big) - a_2 h_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A_1 s + a_1)h_1(s) = f_{we}(s) + a_1 h_2(s) \\ (A_2 s + a_1 + a_2)h_2(s) = a_1 h_1(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 h_1(s) = f_{we}(s) + a_1 h_2(s) \\ M_2 h_2(s) = a_1 h_1(s) \end{cases}$$

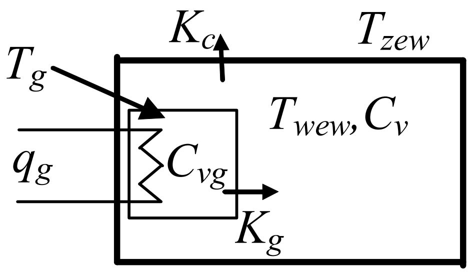
$$h_1(s) = \frac{M_2}{M_1 M_2 - a_1^2} f_{we}(s)$$

$$h_2(s) = \frac{a_1}{M_1 M_2 - a_1^2} f_{we}(s)$$

$$M_1 M_2 - a_1^2 = (A_1 s + a_1)(A_2 s + a_1 + a_2) - a_1^2 = 0$$

$$A_1 A_2 s^2 + (A_1 a_1 + A_1 a_2 + A_2 a_1)s + a_1 a_2 = 0$$

Obiekty cieplne

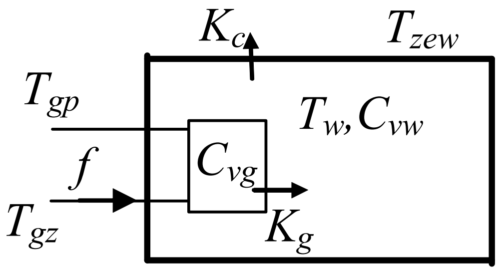


$$\begin{cases} C_{vg}\dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_g\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) \\ C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_g\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) - K_c\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sC_{vg}T_g(s) = q_g(s) - K_g\left(T_g(s) - T_{wew}(s)\right) \\ sC_{vw}T_{wew}(s) = K_g\left(T_g(s) - T_{wew}(s)\right) - K_c\left(T_{wew}(s) - T_{zew}(s)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(sC_{vg} + K_g\right)T_g(s) = q_g(s) + K_gT_{wew}(s) \\ \left(sC_{vw} + K_g + K_c\right)T_{wew}(s) = K_gT_g(s) + K_cT_{zew}(s) \end{cases}$$

$$T_{wew}(s) = \frac{}{M}q_g(s) + \frac{}{M}T_{zew}(s), \quad T_g(s) = \frac{}{M}q_g(s) + \frac{}{M}T_{zew}(s)$$

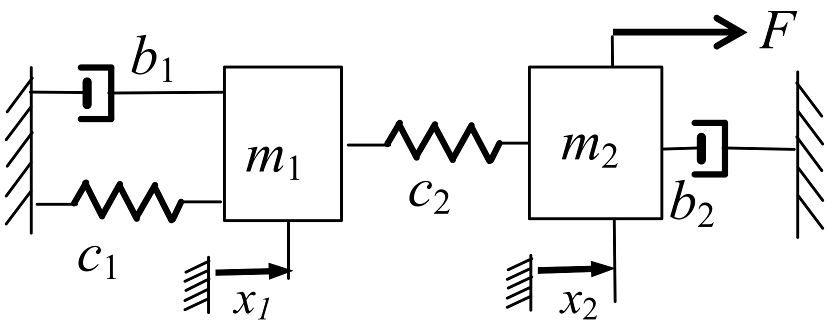


$$\begin{cases} C_{vg}\dot{T}_{gp}(t) = c_{pw}\rho_{pw}f_0\left(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)\right) - K_g\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) \\ C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_g\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) - K_c\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sC_{vg}T_{gp}(s) = c_{pw}\rho_{pw}f_0\left(T_{gz}(s) - T_{gp}(s)\right) - K_g\left(T_{gp}(s) - T_{wew}(s)\right) \\ sC_{vw}T_{wew}(s) = K_g\left(T_{gp}(s) - T_{wew}(s)\right) - K_c\left(T_{wew}(s) - T_{zew}(s)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(sC_{vg} + c_{pw}\rho_{pw}f_0 + K_g\right)T_{gp}(s) = c_{pw}\rho_{pw}f_0T_{gz}(s) + K_gT_{wew}(s) \\ \left(sC_{vw} + K_g + K_c\right)T_{wew}(s) = K_gT_{gp}(s) + K_cT_{zew}(s) \end{cases}$$

$$T_{wew}(s) = \frac{}{M}T_{gz}(s) + \frac{}{M}T_{zew}(s), \quad T_{gp}(s) = \frac{}{M}T_{gz}(s) + \frac{}{M}T_{zew}(s)$$



$$\begin{cases} F(t) = m_2\ddot{x}_2(t) + b_2\dot{x}_2(t) + c_2\big(x_2(t) - x_1(t)\big) \\ 0 = m_1\ddot{x}_1(t) + b_1\dot{x}_1(t) + c_1x_1(t) + c_2\big(x_1(t) - x_2(t)\big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(s) = s^2m_2x_2(s) + sb_2x_2(s) + c_2\big(x_2(s) - x_1(s)\big) \\ 0 = s^2m_1x_1(s) + sb_1x_1(s) + c_1x_1(s) + c_2\big(x_1(s) - x_2(s)\big) \end{cases}$$

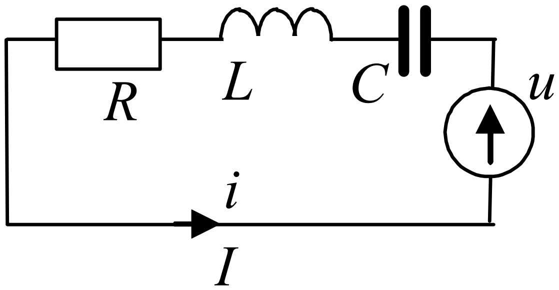
W skrócie:

$$\begin{cases} F = m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) \\ 0 = m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + c_1x_1 + c_2(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = s^2m_2x_2 + sb_2x_2 + c_2(x_2 - x_1) \\ 0 = s^2m_1x_1 + sb_1x_1 + c_1x_1 + c_2(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = \left(s^2m_2 + sb_2 + c_2\right)x_2 - c_2x_1 \\ 0 = \left(s^2m_1 + sb_1 + c_1 + c_2\right)x_1 - c_2x_2 \end{cases}$$

$$x_1(s) = \frac{}{M}F(s), \quad x_2(s) = \frac{}{M}F(s),$$



(1) $$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=u(t)$$

(2) $$L\ddot{q}(t)+R\dot{q}(t)+\frac{1}{C}q(t)=u(t)$$

(3) $$sL\,i(s)+R\,i(s)+\frac{1}{sC}i(s)=u(s)$$

(4) $$s^2L\,q(s)+sR\,q(s)+\frac{1}{C}q(s)=u(s)$$

$$i(s)=\frac{sC}{s^2LC+sRC+1}u(s)$$

(5) $$j\omega L\,I+R\,I+\frac{1}{j\omega C}I=U$$

$$u(t)=U\sin(\omega t)$$

$$i(t)=I\sin(\omega t+\varphi)$$

$$s=j\omega$$

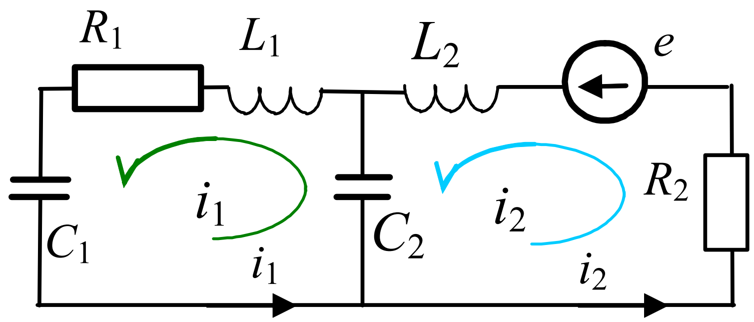
$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$$

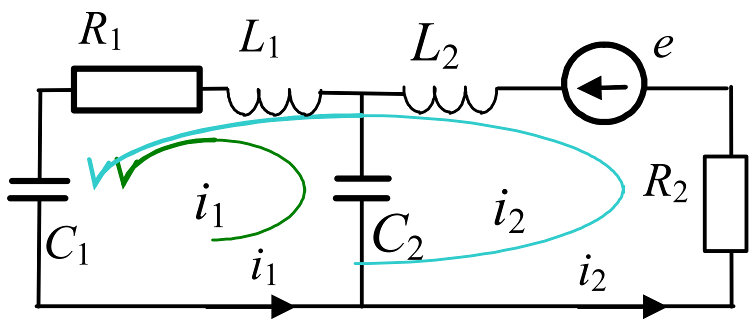
$$i(s)=sq(s)$$

1) Opis działania układu za pomocą idealnych elementów

	Opis napięciowo-prądowy $u(i)$		O.prąd.-napięciowy $i(u)$	$u(q)$	Impedancje $Z(s)$	$Z(j\omega)$
rezystor (R)	$u(t)=Ri(t)$	$u(s)=Ri(s)$	$i(t)=Gu(t)$	$u(t)=R\dot{q}(t)$	R	R
kondensator (C)	$u(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$	$u(s)=\frac{1}{sC}i(s)$	$i(t)=C\frac{du(t)}{dt}$	$u(t)=\frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{sC}$	$\frac{1}{j\omega C}$
cewka (L)	$e_L(t)=-L\frac{di(t)}{dt}$	$u(s)=sLi(s)$	$i(t)=\frac{1}{L}\int u(t)dt$	$u(t)=L\ddot{q}(t)$	sL	$j\omega L$

2) Niezależne oczka i węzły





3) Bilans napięć w oczkach obwodu i/lub prądów (ładunków) w węzach [V, A]

$$\begin{cases} e = sL_2 i_2 + R_2 i_2 + \frac{i_2 - i_1}{sC_2} \\ 0 = sL_1 i_1 + R_1 i_1 + \frac{i_1}{sC_1} + \frac{i_1 - i_2}{sC_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \int \frac{i_2 - i_1}{C_2} dt \\ 0 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \int \frac{i_1}{C_1} dt + \int \frac{i_1 - i_2}{C_2} dt \end{cases}$$