Opis własności

Charakterystyki statyczne

Charakterystyki czasowe (odp.skokowa/impulsowa)

Położenie biegunów

Charakterystyki częstotliwościowe

Badania analityczne

Badanie na obiekcie

Badania symulacyjne (Matlab, Scilab)

Rozwiązanie dla stałego wymuszenia (na skróty)

$$b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t) \qquad u(t) = u_0$$

I. Rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa)

1) równanie jednorodne: $b\dot{x}_s(t) + cx_s(t) = 0$

2) równanie charakterystyczne: $b\lambda + c = 0$

3) pierwiastki równania charakt.: $\lambda_1 = -c/b$

Rozwiązanie swobodne: $x_s(t) = A_1 \mathrm{e}^{-(c/b)t}$

II. Rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona)

1) równanie niejednorodne: $b\dot{x}_w(t) + cx_w(t) = u_0$

$$\dot{x}(t) = 0$$

2) równanie statyczne: $0 + cx(t) = u(t) \qquad x = u/c$

Rozwiązanie wymuszone: $x_w = u_0/c$

Rozwiązanie ogólne: $x(t) = A_1 \mathrm{e}^{-(c/b)t} + u_0/c$

Rozwiązanie szczególne: Warunki początkowe -> A_1

Odpowiedź skokowa

$$b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$$

1) x_s $\quad b\dot{x}(t)+cx(t)=0$

$$b\lambda+c=0$$

$$\lambda_1=-c/b$$

$$x_s(t)=A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}$$

2) x_w dla $u(t)=u_k$

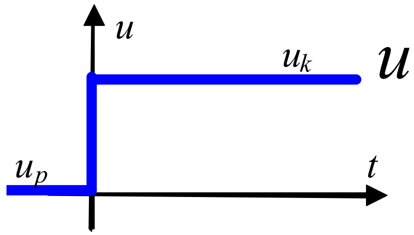
$$cx(t)=u(t)$$

$$cx=u$$

$$x_k=u_k/c$$

3) $x=x_s+x_w$

$$x(t)=A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}+\frac{u_k}{c}$$



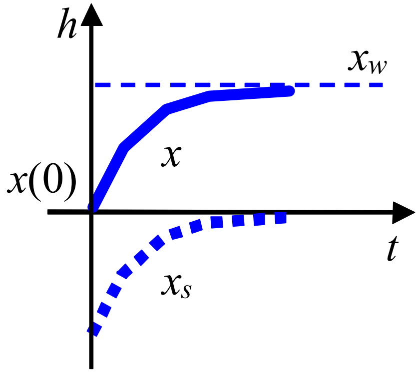
$$u(t)=1(t)$$

$u_p=0$	$u_k=1$
$x_p=0$	$x_k=1/c$
$x(0)=0$	$x_w=1/c$

4) $x(0)=0$

$$x(t)=A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}+\frac{u_k}{c}$$

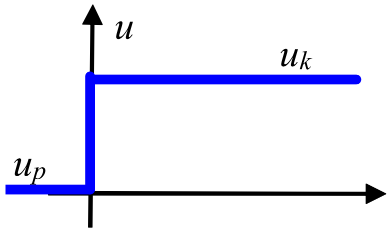
$$x(t)=-\frac{1}{c}\mathrm{e}^{-(c/b)t}+\frac{1}{c}$$



Odpowiedź impulsowa

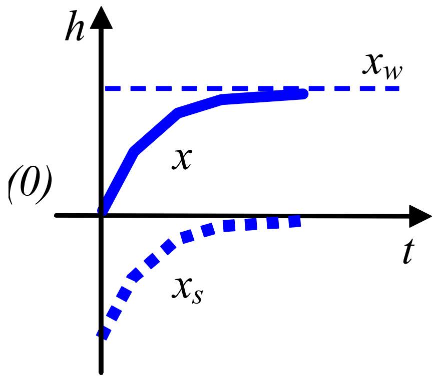
$$b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$$

Odpowiedź skokowa

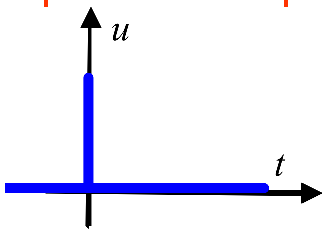


$$u(t)=1(t)$$

$$x(t)=-\frac{1}{c}\mathrm{e}^{-(c/b)t}+\frac{1}{c}$$



Odpowiedź impulsowa

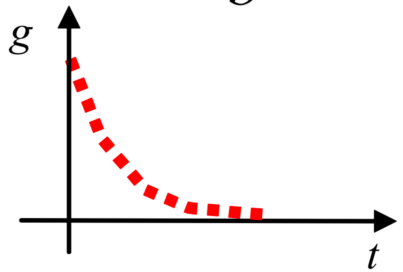


$$u(t)=\delta(t)$$

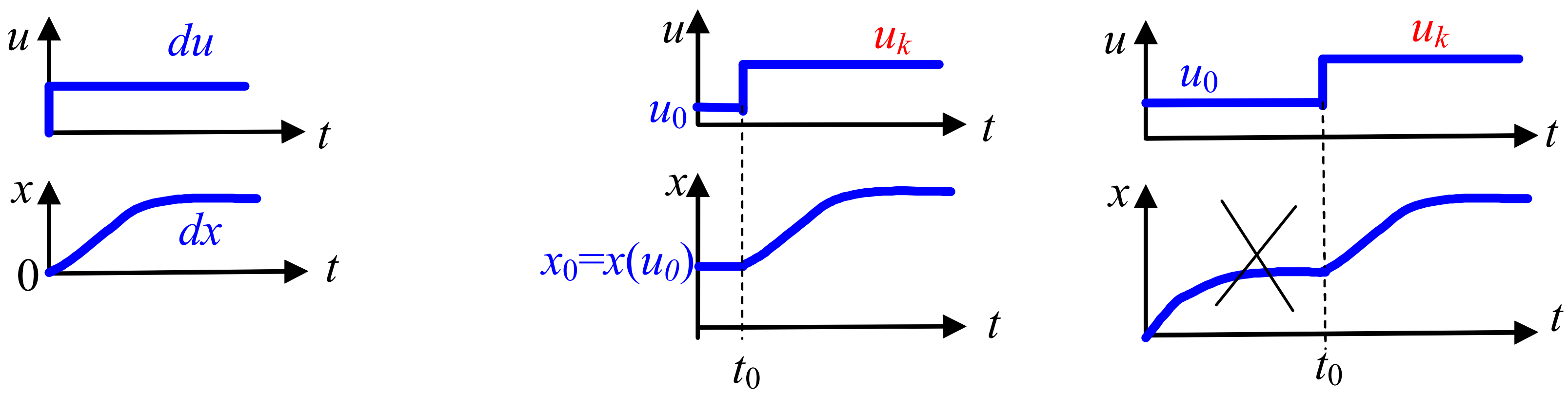
$$\frac{d\left(1(t)\right)}{dt}=\delta(t)$$

$$\frac{d\left(h(t)\right)}{dt}=g(t)$$

$$x(t)=\frac{1}{b}\mathrm{e}^{-(c/b)t}$$



Charakterystyki czasowe – odpowiedź na skok/impuls



Sposób wyznaczenia:

❑ równanie (układ równań) różniczkowych

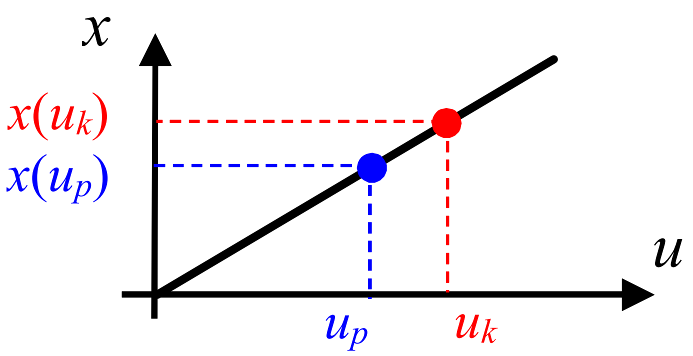
- rozwiązanie *x(t)* dla danego *u(t)* (w.początkowe = stan równowagi)
- wykres x(t)

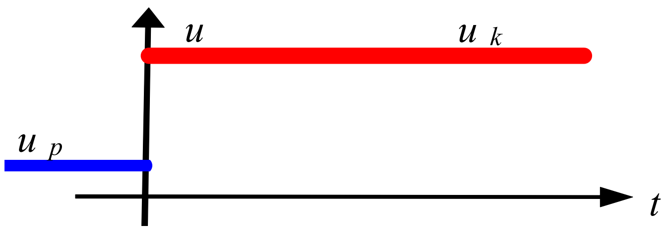
❑ zdjęcie charakterystyki na obiekcie

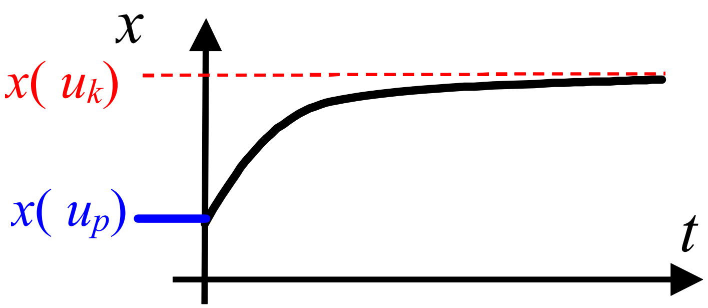
- pojedynczy eksperyment – rejestrujemy stan przejściowy (nieustalony)

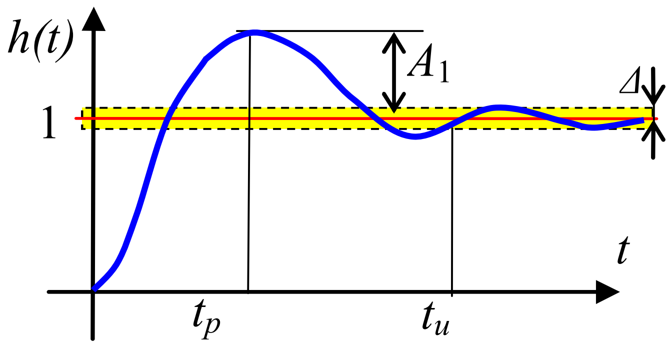
Zastosowanie odpowiedzi na skok/impuls

Zastosowanie:
- ❑ stabilność, oscylacyjność
- ❑ czas ustalania odpowiedzi (porównanie dynamiki obiektów)
- ❑ liniowość (jak?)
- ❑ identyfikacja modeli









Równanie różniczkowe n-tego rzędu

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

$$a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \longrightarrow a_n(\lambda - \lambda_k)\ldots.(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta \geq 0} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

Równanie 2. rzędu

$$\ddot{x}(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_0 x(t) = u(t) \xleftarrow{a_2 \neq 0} a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t)$$

$b_0 = 0$:

$$\ddot{x}(t) + b_1 \dot{x}(t) = u(t)$$

$$\lambda^2 + b\lambda = \lambda(\lambda + b) = 0$$

$b_0 > 0$:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\, \omega_n\, \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = u(t)$$

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad ,\omega_n > 0$$

$b_0 < 0$:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\, \omega_n\, \dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) = u(t)$$

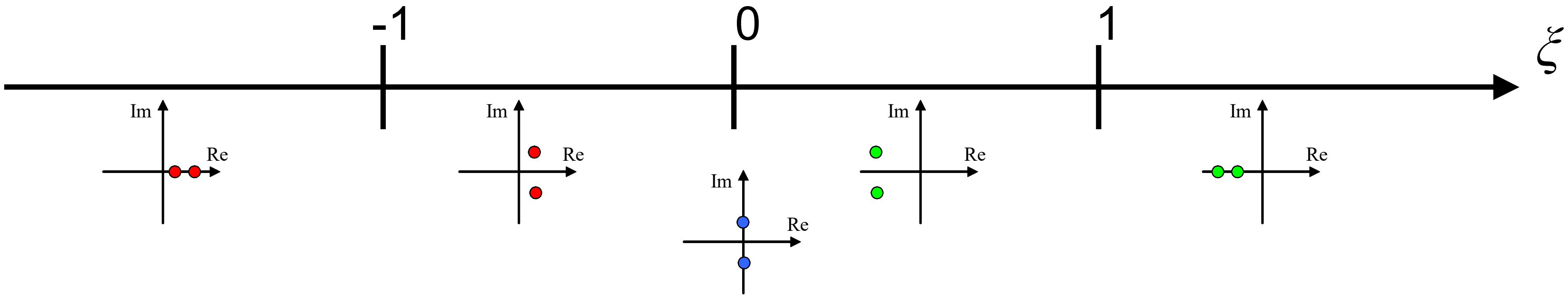
$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda - \omega_n^2 = 0 \quad ,\omega_n > 0$$

Równanie oscylacyjne

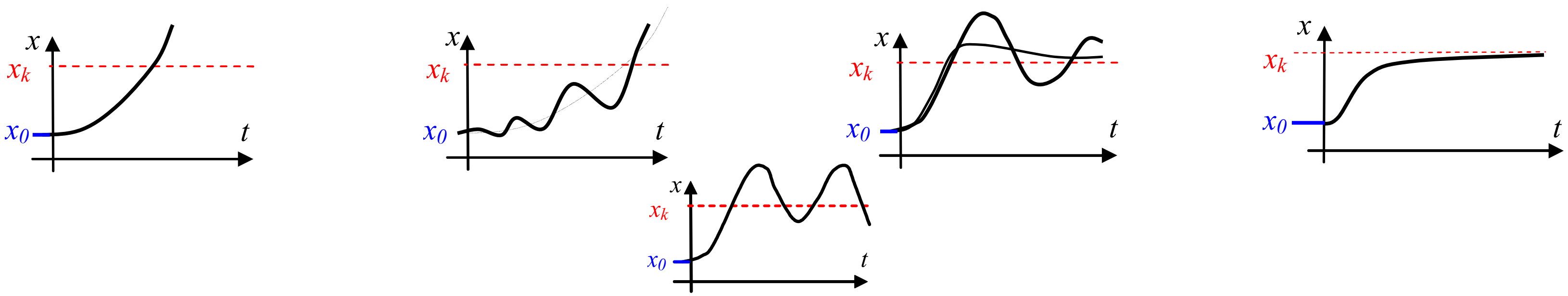
Równanie oscylacyjne

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\,\omega_n\,\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = u(t)$$

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \qquad \omega_n > 0 \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$



Odpowiedzi na wymuszenie skokowe (dla ω_n=1):

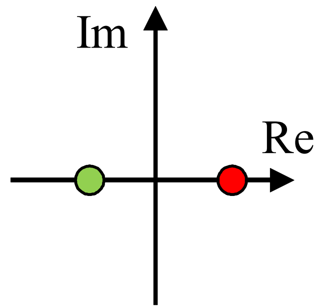


Równanie komplementarne do oscylacyjnego

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\,\omega_n\,\dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) = u(t)$$

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda - \omega_n^2 = 0 \qquad \omega_n > 0$$

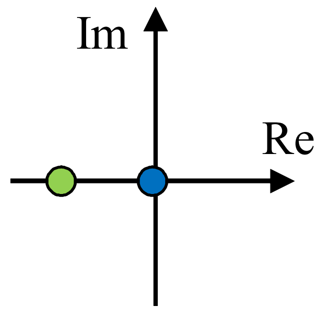
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 + 4\omega_n^2}}{2} \longrightarrow \lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 + 1}$$

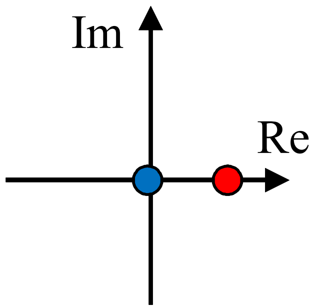


$$\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) = u(t)$$

$$\lambda^2 + b_1\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + b_1) = 0$$





$$x_s(t) = A_1 e^{0t} + A_2 e^{-b_1 t}$$

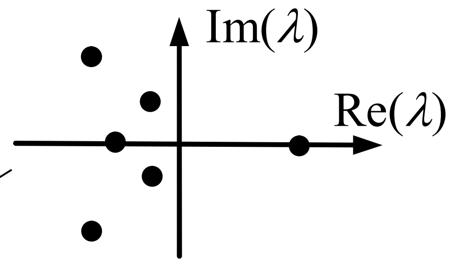
Równanie różniczkowe n-tego rzędu

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

Równanie charakterystyczne n-tego stopnia

$$a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \longrightarrow a_n(\lambda - \lambda_k)\ldots(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

Położenie biegunów



Badania podstawowe:

Odpowiedź skokowa = składowa swobodna + składowa wymuszona (stała)

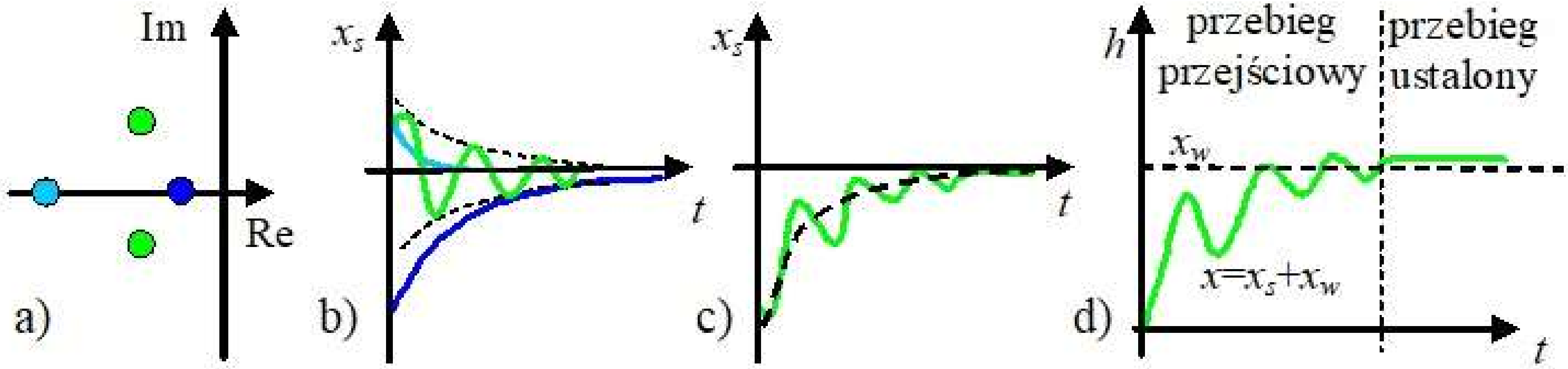
Odpowiedź impulsowa = składowa swobodna + składowa wymuszona (zerowa)

Własności układów liniowych

- zasada superpozycji – składowe swobodne i wymuszone
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- znana postać rozwiązania swobodnego
- parametry rozwiązania swobodnego – algebraiczne równanie charakterystyczne
- stabilność układu – na podstawie położenia pierwiastków równania charakter.
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  - $u(t)=1(t)$ $x(t)$ $u(t)=\delta(t)$ $dx(t)/dt$
- jeden punkt równowagi
- stabilność / niestabilność globalna
- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

Własności układów liniowych



Przykładowe wykresy układu stabilnego:
a) lokalizacja biegunów, b) składniki x_s, c) składowa x_s, d) odpowiedź skokowa

Czas ustalania odpowiedzi

Przeregulowanie

Najbardziej znaczące bieguny

Najmniej znaczące bieguny