Równanie różniczkowe zwyczajne - klasyfikacja

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Współczynniki a_i i b_i	*Równanie różniczkowe*
stałe	liniowe stacjonarne
stałe lub funkcje czasu	liniowe niestacjonarne
zależne od x, u lub ich pochodnych	nieliniowe

Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe - rozwiązanie

zasada superpozycji

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t)$$

rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa)

rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona)

Metoda klasyczna $b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$

$u(t) = u_0$

I. Rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa)

1) równanie jednorodne: $b\dot{x}_s(t) + cx_s(t) = 0$

2) zakładana postać $x_s(t)$: $x_s(t) = A\mathrm{e}^{\lambda t}$

$\dot{x}_s(t) = \lambda A\mathrm{e}^{\lambda t}$

3) podstawienie $x_s(t)$: $b\lambda A\mathrm{e}^{\lambda t} + cA\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \quad / : A\mathrm{e}^{\lambda t}$

4) równanie charakterystyczne: $b\lambda + c = 0$

5) pierwiastki równania charakt.: $\lambda_1 = -c / b$

rozwiązanie swobodne: $x_s(t) = A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}$

Metoda klasyczna $b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$

II. Rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona)

$u(t) = u_0$

1) równanie niejednorodne: $b\dot{x}_w(t) + cx_w(t) = u_0$

2) wymuszenie i pochodne: $u_0,\ 0$

3) postać $x_w(t)$: $x_w(t) = C_1 u_0$

$\dot{x}_w(t) = 0$

4) podstawienie $x_w(t)$: $b \cdot 0 + c \cdot C_1 u_0 = u_0$

5) stąd $C_1 = 1/c$

rozwiązanie wymuszone: $x_w(t) = u_0 / c$

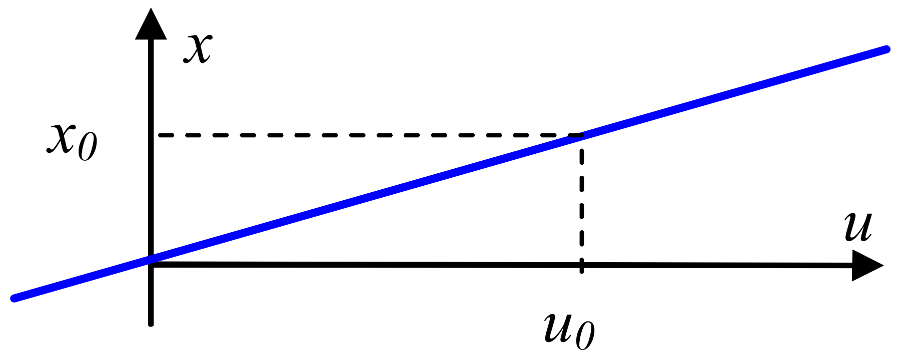
$$\dot{x}(t) = 0$$

$$0 + cx(t) = u(t)$$

$$0 + cx = u$$

$$x = u/c$$

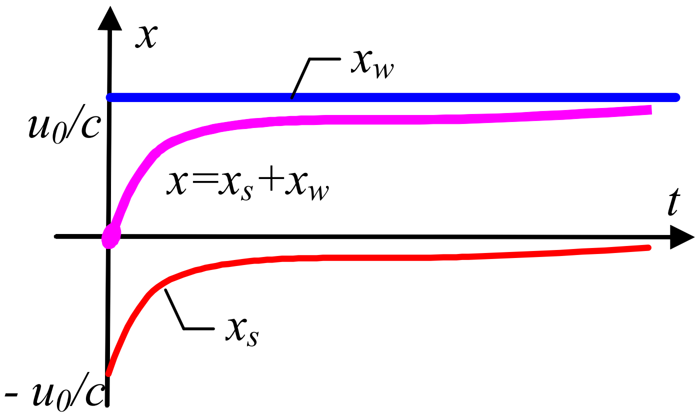
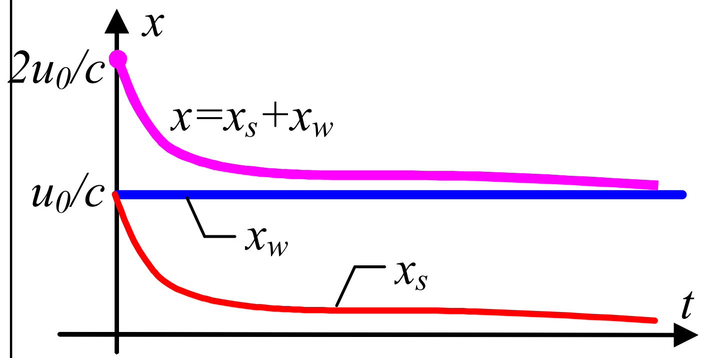
$$x_0 = u_0 / c$$



Metoda klasyczna $b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$

$$u(t) = u_0$$

Rozwiązanie ogólne: $x(t) = \underline{A_1 e^{-(c/b)t}} + \underline{u_0 / c}$

$x(0)=0$	$x(0)=2u_0/c$	$\dot{x}(0) = 0$
$0 = A_1 e^{-(c/b)0} + \dfrac{u_0}{c}$ $A_1 = -\dfrac{u_0}{c}$ $x(t) = -\dfrac{u_0}{c} e^{-(c/b)t} + \dfrac{u_0}{c}$	$\dfrac{2u_0}{c} = A_1 e^{-(c/b)0} + \dfrac{u_0}{c}$ $A_1 = \dfrac{u_0}{c}$ $x(t) = \dfrac{u_0}{c} e^{-(c/b)t} + \dfrac{u_0}{c}$	$\dot{x}(t) = -\dfrac{c}{b} A_1 e^{-(c/b)t}$ $0 = -\dfrac{c}{b} A_1 e^{-(c/b)0}$ $A_1 = 0$ $x(t) = \dfrac{u_0}{c}$
		

Wybór warunków początkowych

$$b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t); \quad u(t)=u_0 \qquad x(t)=A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}+u_0/c$$

stan ustalony: $\dot{x}(0)=0$ $\qquad x(t)=\dfrac{u_0}{c}$ $\qquad b\dot{x}_0+ax(0)=u_0$

---

inny stan : $\dot{x}(0)=k$ $\qquad bk+cx(0)=u_0 \rightarrow x(0)=\dfrac{u_0-bk}{c}$

$$x(0)=m$$

$$\dot{x}(t)=-\frac{c}{b}A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}$$

$$k=-\frac{c}{b}A_1\mathrm{e}^{-(c/b)0} \qquad m=A_1\mathrm{e}^{-(c/b)0}+u_0/c$$

$$A_1=-\frac{bk}{c} \qquad A_1=m-\frac{u_0}{c}=-\frac{bk}{c}$$

$$x(t)=\frac{-bk}{c}\mathrm{e}^{-(c/b)t}+\frac{u_0}{c}$$

$$a_n x^{(n)}(t)+\ldots+a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=b_0u(t)$$

$$x^{(n)}(0)=x_{0n};\ x^{(n-1)}(0)=x_{0n-1};\ \ldots;\ \dot{x}(0)=x_{01};\ x(0)=x_0$$

Metoda klasyczna $b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$

$$u(t) = \sin \omega t$$

1) równanie jednorodne: $b\dot{x}_s(t) + cx_s(t) = 0$

4) równanie charakterystyczne: $b\lambda + c = 0$

5) pierwiastki równania charakt.: $\lambda_1 = -c/b$

rozwiązanie swobodne: $x_s(t) = A_1 \mathrm{e}^{-(c/b)t}$

---

1) równanie niejednorodne: $b\dot{x}_w(t) + cx_w(t) = \sin \omega t$

2) wymuszenie i pochodne: $\sin \omega t,\ \omega \cos \omega t$

3) postać $x_w(t)$:

$$x_w(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

$$\dot{x}_w(t) = \omega C_1 \cos \omega t - \omega C_2 \sin \omega t$$

4) podstawienie $x_w(t)$:

$$b(\omega C_1 \cos \omega t - \omega C_2 \sin \omega t) + c(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) = \sin \omega t$$

5) uporządkowanie 6) układ równań 7) wyznaczenie stałych

rozwiązanie wymuszone:
$$x_w(t) = \frac{c}{b^2\omega^2 + c^2} \sin \omega t - \frac{b\omega}{b^2\omega^2 + c^2} \cos \omega t$$

$$x_w(t) = 1/\sqrt{b^2\omega^2 + c^2}\, \sin\left(\omega t - arctg\, \frac{b\omega}{c}\right)$$

Metoda klasyczna $b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$

$$u(t)=\sin\omega t$$

$$x(t)=A_1e^{-(c/b)t}+\frac{c}{b^2\omega^2+c^2}\sin\omega t-\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}\cos\omega t$$

$$x(t)=A_1e^{-(c/b)t}+1/\sqrt{b^2\omega^2+c^2}\sin\left(\omega t-arctg\frac{b\omega}{c}\right)$$

$x(0)=0$

$$0=A_1e^{-(c/b)0}+\frac{c}{b^2\omega^2+c^2}\sin\omega 0-\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}\cos\omega 0$$

$$A_1=\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}$$

$$x(t)=\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}e^{-(c/b)t}+\frac{c}{b^2\omega^2+c^2}\sin\omega t-\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}\cos\omega t$$

$$x(t)=\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}e^{-(c/b)t}+1/\sqrt{b^2\omega^2+c^2}\sin\left(\omega t-\mathrm{arctg}\frac{b\omega}{c}\right)$$

Metoda klasyczna

$$\ddot{x}(t)+6\dot{x}(t)+8x(t)=u(t)$$

$$u(t)=at^2$$

I. Rozwiązanie swobodne $x_s(t)$

1) równanie jednorodne: $$\ddot{x}_s(t)+6\dot{x}_s(t)+8x_s(t)=0$$

2) zakładana postać $x_s(t)$: $$x_s(t)=Ae^{\lambda t}$$

3) podstawienie $x_s(t)$: $$\dot{x}_s(t)=\lambda Ae^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}_s(t)=\lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t}+6\lambda Ae^{\lambda t}+8Ae^{\lambda t}=0 \quad /:Ae^{\lambda t}$$

4) równanie charakterystyczne: $$\lambda^2+6\lambda+8=0$$

5) pierwiastki równania charakt.: $$\lambda_1=-2 \qquad \lambda_2=-4$$

rozwiązanie swobodne: $$x_s(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-4t}$$

Metoda klasyczna

$$\ddot{x}(t)+6\dot{x}(t)+8x(t)=u(t)$$
$$u(t)=at^2$$

II. Rozwiązanie wymuszone $x_w(t)$ dla $u(t)=at^2$

1) równanie niejednorodne: $$\ddot{x}_w(t)+6\dot{x}_w(t)+8x_w(t)=at^2$$

2) wymuszenie i jego pochodne: $$t^2,\ t,\ 1$$

3) postać $x_w(t)$: $$x_w(t)=C_1t^2+C_2t+C_3$$
$$\dot{x}_w(t)=2C_1t+C_2 \qquad \ddot{x}_w(t)=2C_1$$

4) podstawienie $x_w(t)$: $$2C_1+6(2C_1t+C_2)+8(C_1t^2+C_2t+C_3)=at^2$$

5) uporządkowanie: $$8C_1t^2+(12C_1+8C_2)t+2C_1+6C_2+8C_3=at^2$$

6) układ równań:

7) wyznaczenie stałych:

$$\begin{cases} 8C_1=a \\ 12C_1+8C_2=0 \\ 2C_1+6C_2+8C_3=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} C_1&=a/8 \\ C_2&=-3a/16 \\ C_3&=7a/64 \end{aligned}$$

rozwiązanie wymuszone: $$x_w(t)=a(8t^2-12t+7)/64$$

Metoda klasyczna

$$\ddot{x}(t)+6\dot{x}(t)+8x(t)=u(t)$$

$$u(t)=at^2$$

I. Rozwiązanie swobodne $\quad x_s(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-4t}$

II. Rozwiązanie wymuszone *dla $u(t)=at^2$* $\quad x_w(t)=a(8t^2-12t+7)/64$

Rozwiązanie pełne (ogólne)

$$x(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-4t}+a(8t^2-12t+7)/64$$

Rozwiązanie szczególne dla $\quad x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=0$

$$\begin{cases} x(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-4t}+\dfrac{a}{64}(8t^2-12t+7) \\ \dot{x}(t)=-2A_1\mathrm{e}^{-2t}-4A_2\mathrm{e}^{-4t}+\dfrac{a}{64}(16t-12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=A_1\mathrm{e}^{0}+A_2\mathrm{e}^{0}+\dfrac{a}{64}(8\cdot 0-12\cdot 0+7) \\ 0=-2A_1\mathrm{e}^{0}-4A_2\mathrm{e}^{0}+\dfrac{a}{64}(16\cdot 0-12) \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1+A_2=-7a/64 \\ 2A_1+4A_2=-12a/64 \end{cases}$$

$$A_1=-a/8$$
$$A_2=a/64$$

Metoda klasyczna

$$\ddot{x}(t)+6\dot{x}(t)+8x(t)=u(t)$$

$$u(t)=at^2$$

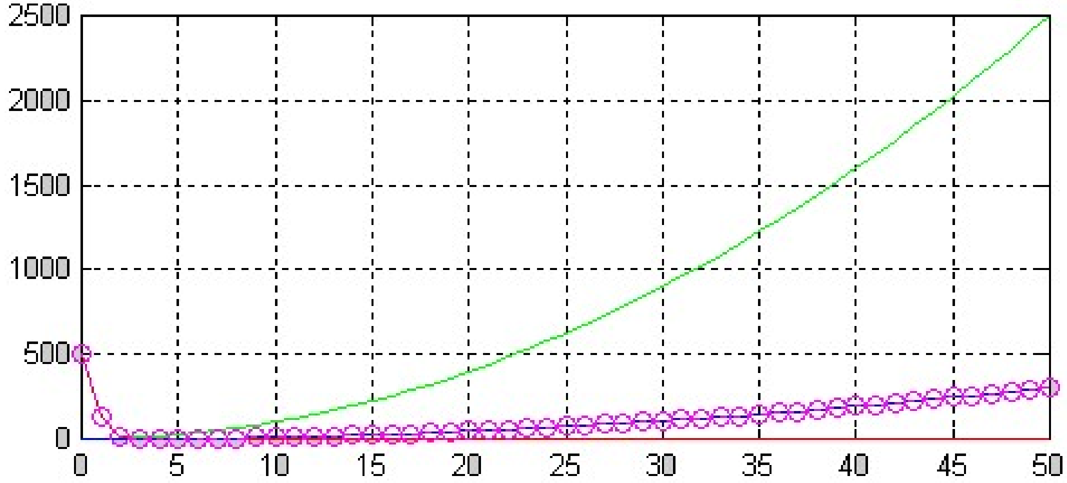
r.ogólne $\quad x(t)=A_1 e^{-2t}+A_2 e^{-4t}+a(8t^2-12t+7)/64$

r.szczególne dla $\quad x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=0$

$$x(t)=-\frac{a}{8}e^{-2t}+\frac{a}{64}e^{-4t}+a(8t^2-12t+7)/64$$

r.szczególne dla $\quad x(0)=k \qquad \dot{x}(0)=0$

$$x(t)=\left(2k-\frac{a}{8}\right)e^{-2t}+\left(-k+\frac{a}{64}\right)e^{-4t}+a(8t^2-12t+7)/64$$



$u(t)$

$x_s(t)$

$x_w(t)$

$x(t)$, $x(0)=500$, $x'(0)=0$

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

Rozwiązanie równania jednorodnego

$$a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Pierwiastki równania charakterystycznego

Algebra: Wielomian rzeczywisty stopnia n:

$$\lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

- n pierwiastków
- pierwiastki pojedyncze i wielokrotne;
- pierwiastki rzeczywiste i zespolone (pary liczb sprzężonych)
- rozkład na wielomiany rzeczywiste stopnia co najwyżej drugiego
  - wielomiany stopnia pierwszego
  - wielomiany stopnia drugiego z ujemnym wyróżnikiem

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda^2 + b_1 \lambda + b_0)\cdots = 0$$

a) jednokrotne rzeczywiste λ_i

b) m-krotne λ_k

c) pary pierwiastków zespolonych $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$

Równanie charakterystyczne

$$a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Składowe rozwiązania swobodnego

a) pierwiastki jednokrotne rzeczywiste λ_i

$$x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t}$$

b) pierwiastek m-krotny λ_k

$$\left(A_{k1} + A_{k2}t + \ldots + A_{km}t^{m-1}\right)e^{\lambda_k t}$$

c) para pierwiastków zespolonych $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$

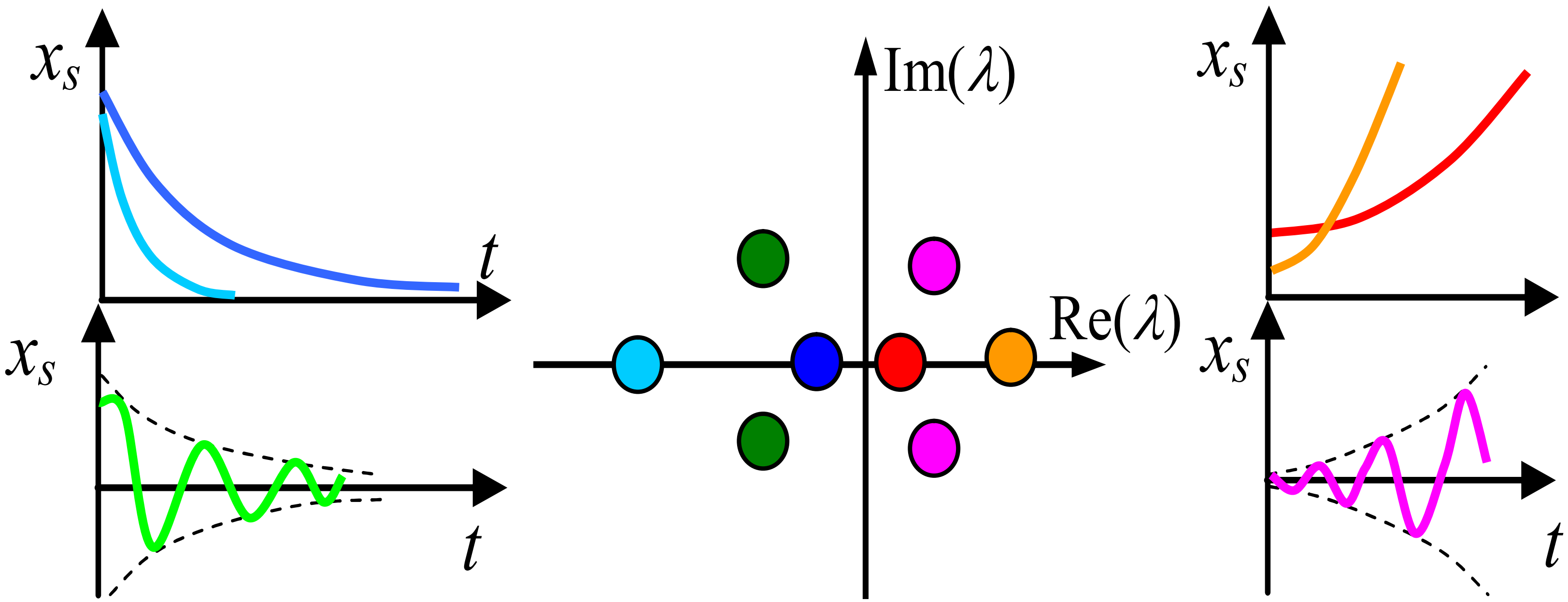
$$A_1 e^{(\alpha + j\omega)t} + A_2 e^{(\alpha - j\omega)t} \qquad B_1 = A_1 + A_2 \qquad B_2 = A_1 - A_2$$

$$e^{\alpha t}\left(B_1 \cos\omega t + jB_2 \sin\omega t\right) \qquad A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

$$Ae^{\alpha t}\cos(\omega t - \varphi) = Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi_1) \qquad \varphi = arc\,tg\frac{B_2}{B_1} \qquad \varphi_1 = arc\,ctg\frac{B_2}{B_1}$$

Położenie pierwiastków, stabilność, charakter odpowiedzi

$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$



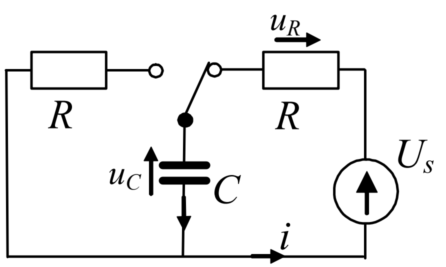
$$A e^{\alpha t} \cos(\omega t - \varphi)$$

Rozwiązane równania różniczkowego zwyczajnego liniowego

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t)$$

Rozwiązanie swobodne *xs(t)*		Rozwiązanie wymuszone *xw(t)*
	to rozwiązanie równania	
jednorodnego, czyli u(t)=0		niejednorodnego, czyli u(t)≠0
	zależy od	
parametrów układu		parametrów układu i wymuszenia
	decyduje o	
stabilności układu		uchybie ustalonym

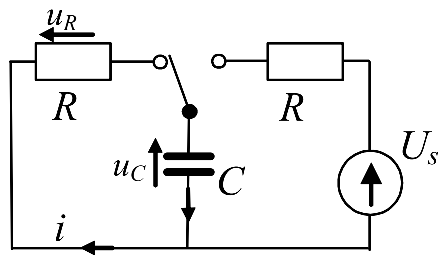
Ładowanie/rozładowanie kondensatora



$$u_R(t)+u_C(t)=U_s$$

$$Ri(t)+\frac{q(t)}{C}=U_s$$

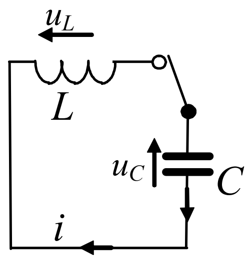
$$R\dot{q}(t)+\frac{1}{C}q(t)=U_s \quad , q(0)=0$$



$$u_R(t)+u_C(t)=0$$

$$Ri(t)+\frac{q(t)}{C}=0$$

$$R\dot{q}(t)+\frac{1}{C}q(t)=0 \quad , q(0)=q_{\max}=CU_s$$



$$u_L(t)+u_C(t)=0$$

$$L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=0$$

$$L\ddot{q}(t)+\frac{1}{C}q(t)=0$$

r.s.) $R\lambda+\frac{1}{C}=0 \;\rightarrow\; \lambda=-\frac{1}{RC}$

$$\ddot{q}(t)+\frac{1}{LC}q(t)=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

r.w.)	$\frac{1}{C}q(t)=U_s$ $q_w(t)=CU_s=q_{\max}$	$\frac{1}{C}q(t)=0$ $q_w(t)=0$
r.o.)	$q(t)=Ae^{-\frac{1}{RC}t}+CU_s$	$q(t)=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$
w.p.)	$0=Ae^{-\frac{1}{RC}0}+CU_s \;\rightarrow\; A=-CU_s$	$CU_s=Ae^{-\frac{1}{RC}0}{}_s \;\rightarrow\; A=CU_s$
r.s.)	$\boxed{q(t)=CU_s\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$	$\boxed{q(t)=CU_se^{-\frac{1}{RC}t}}$

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\frac{U_s}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} \quad , u_C(t)=\frac{q(t)}{C}=U_s\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=-\frac{U_s}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} \quad , u_C(t)=\frac{q(t)}{C}=U_se^{-\frac{1}{RC}t}$$