Systemy dynamiczne

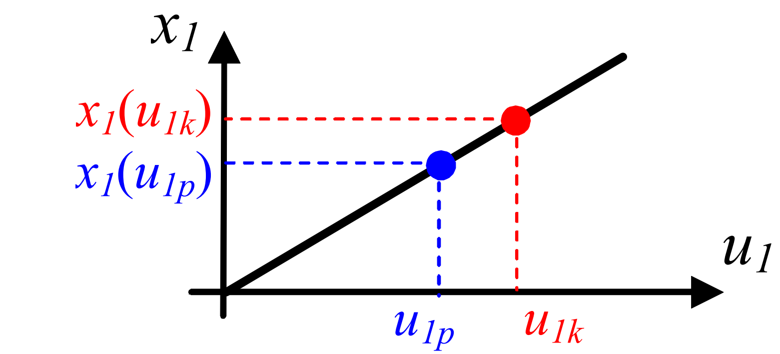
- Co opisuje dynamika obiektu?
- Co powoduje, że zmiany w rzeczywistych układach nie zachodzą natychmiast?
- Po co zajmować się dynamiką zjawisk?

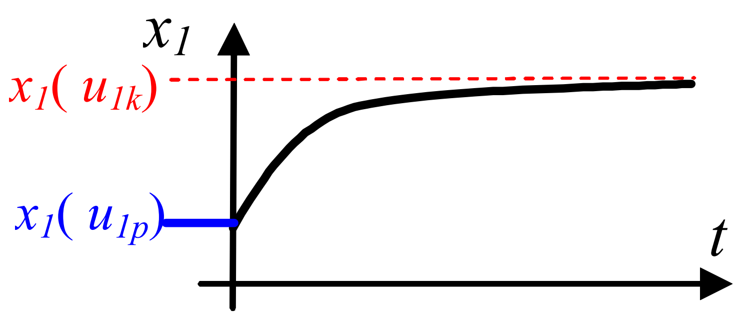
Systemy dynamiczne

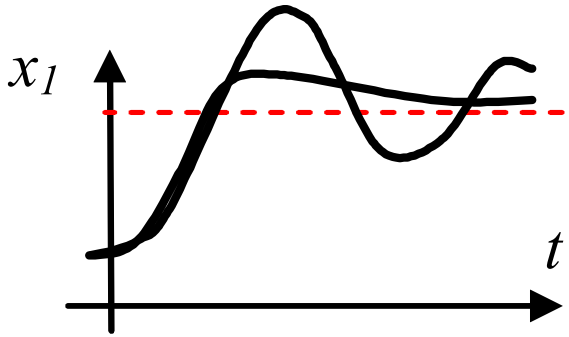
CO?

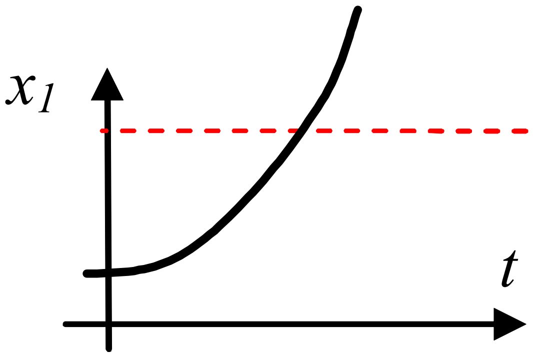
DLACZEGO?
PO CO?

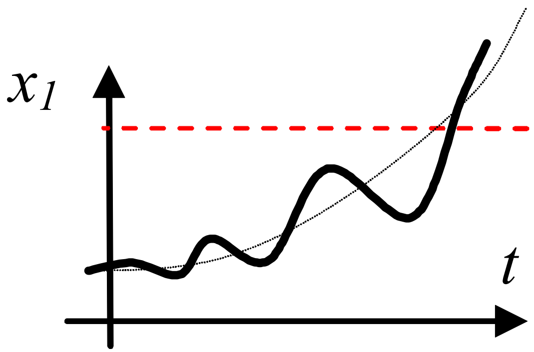
JAK?











Modele obiektów dynamiki

CO? **DLACZEGO? PO CO?** **JAK?**

- opis statyczny
- opis dynamiczny

  - reakcje – stabilność,oscylacje
  - własności – obiektu, u.regulacji

    - teoretycznie
    - eksperymentalnie

Słowniczek …

- równania (model) dynamiki układu, opis dynamiczny i statyczny
- wymuszenie, zakłócenie, sterowanie
- równania stanu, zmienna stanu, obserwator
- transmitancja
- stabilność, sterowalność, obserwowalność
- rozwiązanie równania różniczkowego (swobodne, wymuszone, ogólne)
- punkt równowagi, stan ustalony (z r.różniczkowego, z transmitancji)
- równanie charakterystyczne i statyczne
- pierwiastki równania charakterystycznego
- bieguny i zera transmitancji
- charakterystyka statyczna
- odpowiedzi czasowe
- podstawowe człony dynamiki: proporcjonalny, całkujący, różniczkujący, inercyjny, oscylacyjny, opóźniający

Skąd wziąć opis systemu dynamicznego?

Równania różniczkowe

zwyczajne cząstkowe

Równania różniczkowe zwyczajne

nieliniowe liniowe

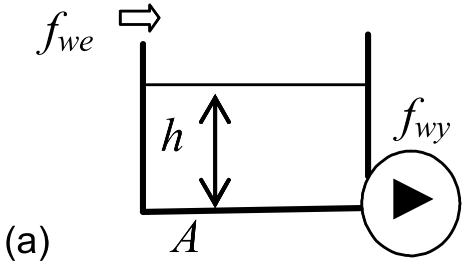
$$f\left(x^{(n)},\ \ldots,\ \dot{x},\ x,\ u^{(m)},\ \ldots,\ \dot{u},\ u\right) = 0$$

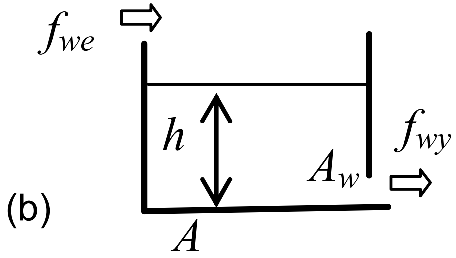
Równania operatorowe

$$x(s) = G(s)u(s)$$

Modelowanie Identyfikacja

Otwarte układy hydrauliczne





1) Zawartość magazynu $V(t) = Ah(t)$ $\quad m^3$

2) Zmiana zawartości magazynu $\dfrac{dV(t)}{dt} = A\dfrac{dh(t)}{dt} = A\dot{h}(t)$ $\quad \dfrac{m^3}{s} = m^2\dfrac{m}{s}$

3) Bilans strumieni wpływających i wypływających: $A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t)$

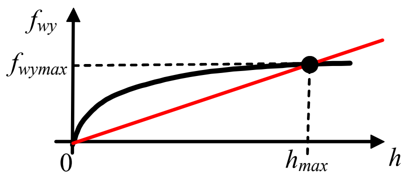
(a) $f_{wy}(t)$

(a) $A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t)$

(b) $f_{wy}(t) = A_w\sqrt{2gh(t)} \approx ah(t)$

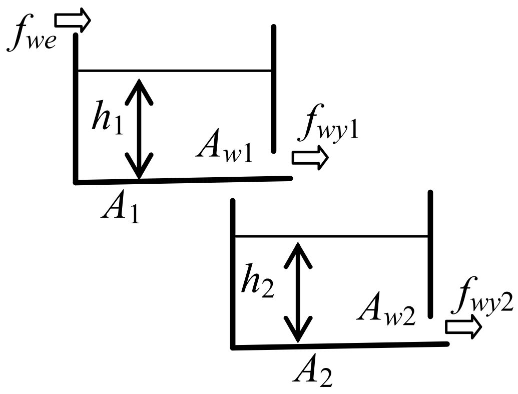
(b_1) $A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w\sqrt{2gh(t)}$

(b_2) $A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - ah(t)$



4) Zmienne wejściowe i wyjściowe, kompletność modelu

Otwarte układy hydrauliczne



$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{wy1}(t) \\ A_2\dot{h}_2(t) = f_{wy1}(t) - f_{wy2}(t) \end{cases}$$

$$f_{wy1}(t) = A_{w1}\sqrt{2gh_1(t)} \approx a_1 h_1(t)$$

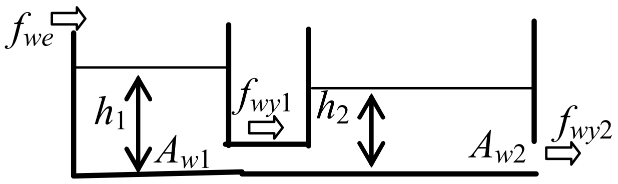
$$f_{wy2}(t) = A_{w2}\sqrt{2gh_2(t)} \approx a_2 h_2(t)$$

Uproszczona wersja liniowa kaskady niewspółdziałającej:

$$\boxed{\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1 h_1(t) \\ A_2\dot{h}_2(t) = a_1 h_1(t) - a_2 h_2(t) \end{cases}}$$

Zmienne wejściowe i wyjściowe?

$$\begin{cases} 0 = f_{we}(t) - a_1 h_1(t) \\ 0 = a_1 h_1(t) - a_2 h_2(t) \end{cases} \qquad f_{we} = a_1 h_1 = a_2 h_2 \;\rightarrow\; \begin{matrix} h_1 = f_{we}/a_1 \\ h_2 = f_{we}/a_2 \end{matrix}$$



$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{wy1}(t) \\ A_2\dot{h}_2(t) = f_{wy1}(t) - f_{wy2}(t) \end{cases}$$

$$f_{wy1}(t) = A_{w1}\sqrt{2g\big(h_1(t) - h_2(t)\big)} \approx a_1\big(h_1(t) - h_2(t)\big)$$

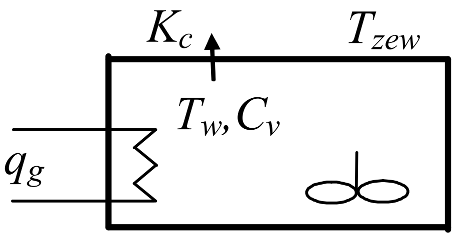
$$f_{wy2}(t) = A_{w2}\sqrt{2gh_2(t)} \approx a_2 h_2(t)$$

Uproszczona wersja liniowa kaskady współdziałającej:

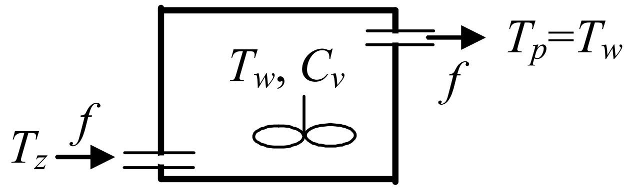
$$\boxed{\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1\big(h_1(t) - h_2(t)\big) \\ A_2\dot{h}_2(t) = a_1\big(h_1(t) - h_2(t)\big) - a_2 h_2(t) \end{cases}}$$

Zmienne wejściowe i wyjściowe?

$$\begin{cases} 0 = f_{we}(t) - a_1\big(h_1(t) - h_2(t)\big) \\ 0 = a_1\big(h_1(t) - h_2(t)\big) - a_2 h_2(t) \end{cases} \qquad f_{we} = a_1(h_1 - h_2) = a_2 h_2 \;\rightarrow\; \begin{matrix} h_1 = f_{we}(a_1 + a_2)/(a_1 a_2) \\ h_2 = f_{we}/a_2 \end{matrix}$$



(a)



(b)

Założenie o doskonałym mieszaniu

1) Zawartość magazynu $$Q(t) = c_p \rho V T(t) = C_V T(t)$$ $$\frac{J}{kg \cdot K} \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot m^3 \cdot K = J$$

2) Zmiana zawartości magazynu $$\frac{dQ(t)}{dt} = C_V \frac{dT_w(t)}{dt} = C_V \dot{T}_w(t)$$ $$\frac{J}{s} = \frac{Ws}{s} = W$$

3) Bilans strumieni wpływających i wypływających [W] $$C_v \dot{T}_w(t) = q_{we}(t) - q_{wy}(t)$$

$$C_v \dot{T}_w(t) = q_g(t) - K_c\left(T_w(t) - T_{zew}(t)\right)$$

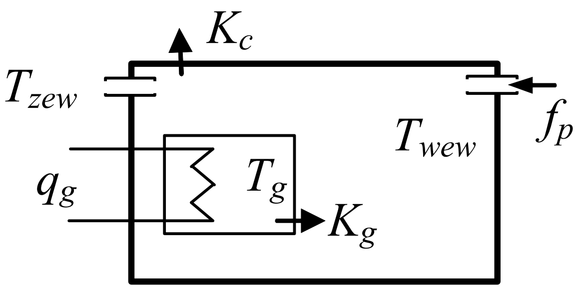
$$W \quad - \quad \frac{W}{K} \cdot K$$

$$C_v \dot{T}_w(t) = c_p \rho\, f(t) T_z(t) - c_p \rho\, f(t) T_w(t)$$

$$C_v \dot{T}_w(t) = c_p \rho\, f_0 T_z(t) - c_p \rho\, f_0 T_w(t)$$

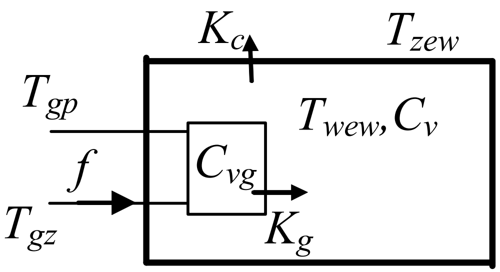
$$\frac{J}{kg \cdot K} \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m^3}{s} K = W$$

4) Zmienne wejściowe i wyjściowe, kompletność modelu



$$\begin{cases} C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_g\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) - K_c\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) - c_{pp}\rho_p f_{p0}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \\ C_{vg}\dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_g\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = K_g\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) - K_c\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) - c_{pp}\rho_p f_{p0}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \\ 0 = q_g(t) - K_g\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} C_{vg}\dot{T}_{gp}(t) = c_{pw}\rho_{pw} f_0 T_{gz}(t) - c_{pw}\rho_{pw} f_0 T_{gp}(t) - K_g\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) \\ C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_g\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) - K_c\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{vg}\dot{T}_{gp}(t) = c_{pw}\rho_{pw} f_0\left(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)\right) - K_g\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) \\ C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_g\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) - K_c\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \end{cases}$$

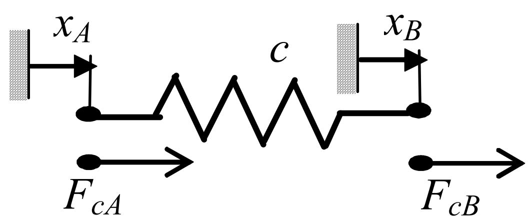
$$\begin{cases} 0 = c_{pw}\rho_{pw} f_0\left(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)\right) - K_g\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) \\ 0 = K_g\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) - K_c\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \end{cases}$$

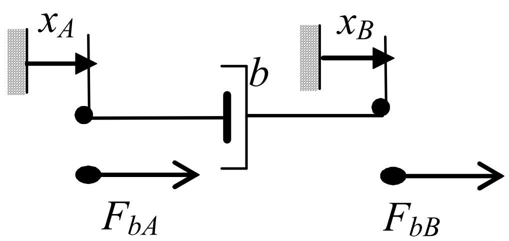
Zmienne wejściowe i wyjściowe? Stan równowagi?

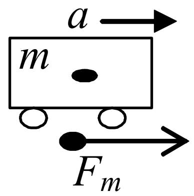
Proste układy mechaniczne

Założenie – jeden kierunek działania sił

1) Opis działania układu za pomocą idealnych elementów







$$F_{cA}(t) = c\left(x_A(t) - x_B(t)\right)$$

$$F_{cB}(t) = c\left(x_B(t) - x_A(t)\right)$$

(F = cx)

$$F_{bA}(t) = b\left(\dot{x}_A(t) - \dot{x}_B(t)\right)$$

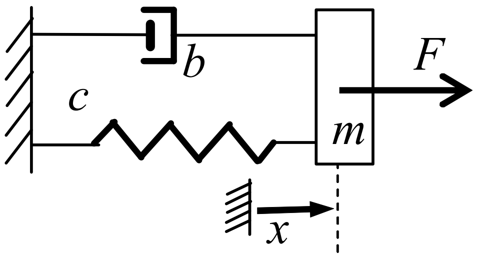
$$F_{bB}(t) = b\left(\dot{x}_B(t) - \dot{x}_A(t)\right)$$

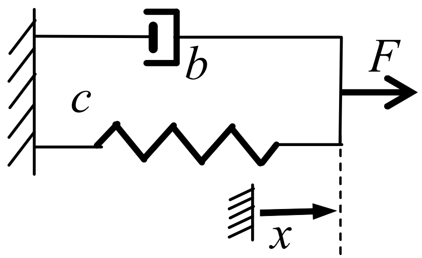
(F = bv)

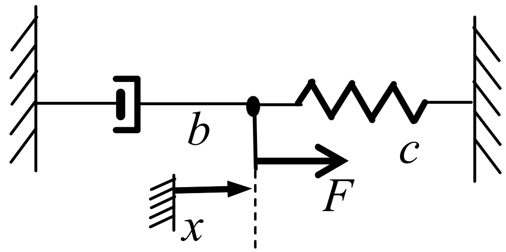
$$F_m(t) = m\ddot{x}(t)$$

(F = ma)

2) Punkt bilansowania sił





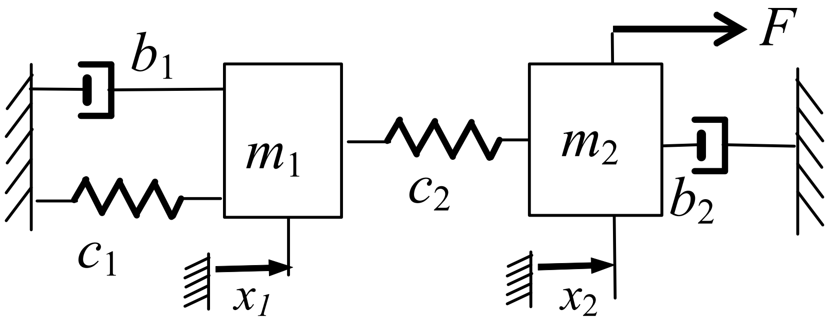


3) Bilans sił [N]

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

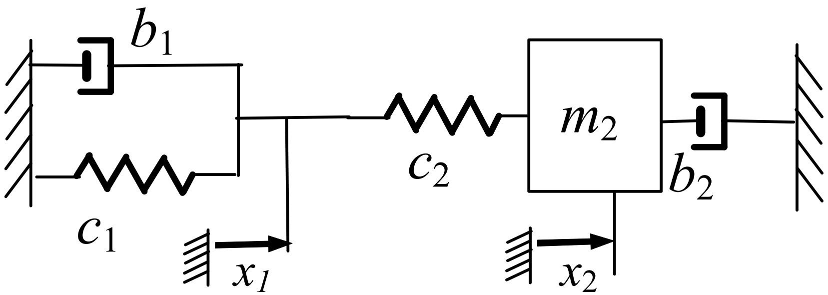
$$b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

$$b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$



$$\begin{cases} F(t) = m_2\ddot{x}_2(t) + b_2\dot{x}_2(t) + c_2\big(x_2(t) - x_1(t)\big) \\ 0 = m_1\ddot{x}_1(t) + b_1\dot{x}_1(t) + c_1x_1(t) + c_2\big(x_1(t) - x_2(t)\big) \end{cases}$$

(2 punkty, 2 masy)

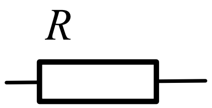


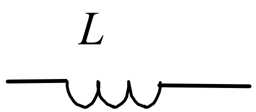
$$\begin{cases} 0 = m_2\ddot{x}_2(t) + b_2\dot{x}_2(t) + c_2\big(x_2(t) - x_1(t)\big) \\ 0 = b_1\dot{x}_1(t) + c_1x_1(t) + c_2\big(x_1(t) - x_2(t)\big) \end{cases}$$

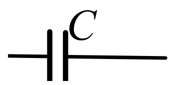
(2 punkty, 2 masy, bez zewnętrzbej siły)

Proste obwody elektryczne

1) Opis działania układu za pomocą idealnych elementów







$$u(t) = Ri(t)$$

$$e_L(t) = -L\frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

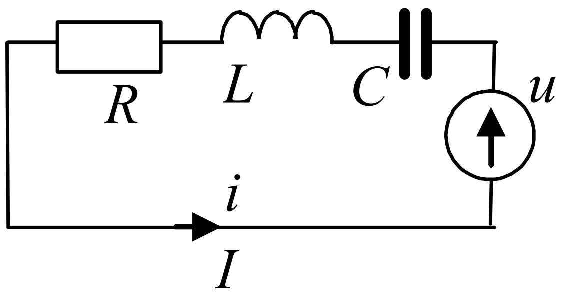
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$u(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$$

$$e_L(t) = -L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

$$u(t) = \frac{1}{C}q(t)$$

2) Bilans napięć w oczku / prądów w węźle



$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = u(t)$$

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$