LISTA02: Rozwiązywanie i własności równań różniczkowych

Przygotowanie teoretyczne

1. Na czym polega całkowanie równań różniczkowych? Co to jest całka ogólna i szczególna r.r.?
2. Przedstaw procedurę rozwiązywania równań różniczkowych – na czym polega klasyczna metoda rozwiązywania równań różniczkowych? Kiedy można ją zastosować?
3. Co oznacza stabilność układu?
4. Co są bieguny układu? Jaki mają wpływ na stabilność układu?
5. Co to jest odpowiedź skokowa, impulsowa, częstotliwościowa?

Oznaczenia: u – wejście, wymuszenie; x – wyjście, rozwiązanie; a, b – parametry

Zadania 1. Dla podanych przykładów, przedstaw rozwiązanie ogólne i szczególne dla:
a) $u(t) = 2$, warunki początkowe to stan równowagi,
b) $u(t) = 2$, warunki początkowe $x(0) = 2$ (jeśli potrzeba więcej, to wybrać dowolne),
c) $u(t) = 3\cdot\sin(2t)$, zerowe warunki początkowe,
d) $u(t) = 3\cdot 1(t)$, czyli odpowiedź skokowa,
e) $u(t) = \delta(t)$, czyli odpowiedź impulsowa.

1) $3\dot{x}(t) + 2x(t) = 3u(t)$
2) $2\dot{x}(t) + 5x(t) = 2u(t)$
3) $a\dot{x}(t) + 2x(t) = 3u(t)$
4) $2\dot{x}(t) + ax(t) = 2u(t)$

W przypadkach a ÷ c zastosuj ogólną metodę rozwiązywania równań różniczkowych liniowych. Odpowiedzi skokowe i impulsowe wyznacz wykorzystując własności równań liniowych oraz podobieństwo do wymuszeń stałych.
Wykonaj sprawdzenie rozwiązania szczególnego $x(t)$, licząc warunki początkowe, czyli $x(t)$ dla $t = 0$

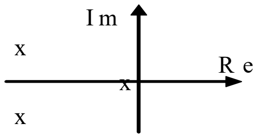
Zadania 2. Każde równanie rozwiąż dla a) stałego wymuszenia, b) dla $u(t) = 1(t)$ lub $\delta(t)$,

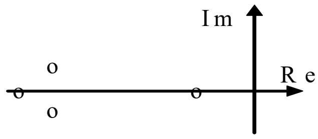
Równanie	a) wymuszenie i warunki początkowe		b) odpowiedź
1) $\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$	$u(t)$=2;	$x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 1$;	impulsowa
2) $\ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 7x(t) = u(t)$	$u(t)$=14;	$x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 1$;	impulsowa
3) $2\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$	$u(t)$=1;	$x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = 0$;	skokowa
4) $3\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 3x(t) = u(t)$	$u(t)$=6;	$x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = 0$;	skokowa
5) $\ddot{x}(t) + 7\dot{x}(t) + 12x(t) = u(t)$	$u(t)$=6;	$x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 1$;	impulsowa
6) $\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 8x(t) = u(t)$	$u(t)$=16;	$x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 1$;	impulsowa
7) $2\ddot{x}(t) + 9\dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$	$u(t)$=4;	$x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = 0$;	skokowa
8) $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 6x(t) = u(t)$	$u(t)$=12;	$x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = 0$;	skokowa
9) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - 8x(t) = u(t)$	$u(t)$=16;	$x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = 0$;	skokowa
10) $\ddot{x}(t) - 7\dot{x}(t) + 12x(t) = u(t)$	$u(t)$=12;	$x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 1$;	impulsowa

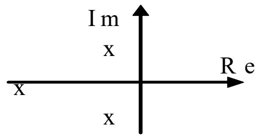
Zadania 4. Dla podanego równania różniczkowego
a) podaj czy jest liniowe, stacjonarne, jaki ma rząd,
b) napisz równanie statyczne i charakterystyczne,
c) wyznacz punkt/punkty równowagi,
d) podaj przykłady warunków początkowych,

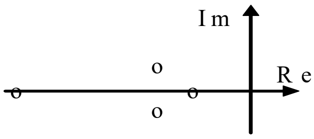
1) $a\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + bx(t) = \ddot{u}(t) + 2u(t)$
2) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + b\sqrt{x(t)} = u(t)$
3) $4\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + x^2(t) = u(t)$
4) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + ax^3(t) = u(t)$
5) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + ax(t) = u(t) + 2\dot{u}(t)$
6) $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t) + a\dot{u}(t)$
7) $a^2\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + u_1(t)x(t) = u_2(t)$
8) $2\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + a(t)x(t) = 2u_1(t) + 3u_2(t)$
9) $5\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + x(t)u_1(t) = u_2(t)$
10) $2\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + a^3x(t) = 2u_1(t) + 3u_2(t)$
11) $\ddot{x}^2(t) + 3\dot{x}(t) + ax(t) = u^2(t)$
12) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + ax(t) = u^2(t)$
13) $b^2\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = \sqrt{a}u(t) + \dot{u}(t)$
14) $3\dddot{x}(t) + 2\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = 2u_1(t) + \dot{u}_1(t)$
15) $a\,\dot{x}(t) + 2ab\,x(t) = 2\ddot{u}(t) + \dot{u}(t)$
16) $a\,\dot{x}(t) - 2ab\,x(t) = 2u(t) + \dot{u}(t)$
17) $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\,\dot{x}(t) + \omega_n^2\,x(t) = b_0u(t)$

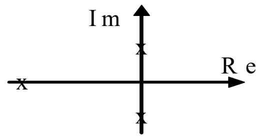
Zadania 5. Co można powiedzieć o własnościach układu, który ma następujące bieguny

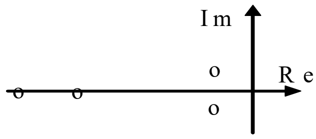
(1)


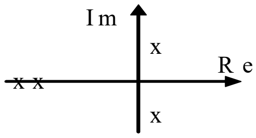
(2)


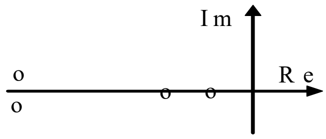
(3)


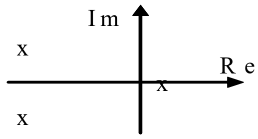
(4)


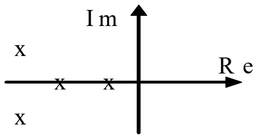
(5)


(6)


(7)


(8)


(9)


(10)


Podpowiedzi i/lub odpowiedzi

Zadanie 1

Zadanie 2

	Typ, rząd	R.statyczne	R.charakterystyczne	P.równowagi
1	ls, 2	$bx = 2u$	$a\lambda^2 + \lambda + b = 0$	
2	n, 2	$b\sqrt{x} = u$	-	
3	n, 3	$x^2 = u$	-	
4	n, 2	$ax^3 = u$	-	
5	ls, 2	$ax = u$	$\lambda^2 + 2\lambda + a = 0$	
6	ls, 2	$2x = u$	$\lambda^2 + a\lambda + 2 = 0$	
7	n, 3	$u_1 x = u_2$	-	
	lns, 3, gdy $u_1(t)$ można przyjąć jako parametr	$u_{10} x = u_2$		
	ls, 3, gdy $u_1(t)$ - stały parametr			
8	lns, 2	$a_0 x = 2u_1 + 3u_2$		
9	n, 3	$xu_1 = u_2$	-	
10	ls, 2	$a^3 x = 2u_1 + 3u_2$	$2\lambda^2 + 3\lambda + a^3 = 0$	
11	n, 2	$ax = u^2$	-	
12	n,2	$ax = u^2$	-	
	ls,2, gdy $u^2(t)$ jako $u_1(t)$	$ax = u_1$	$\lambda^2 + 3\lambda + a = 0$	
13	ls, 2	$x = \sqrt{au}$	$b^2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$	
14	ls, 3	$0 = 2u_1$	$3\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$	-
15	ls,1	$2abx = 0$	$a\lambda + 2ab = 0$	
16	ls, 1	$-2abx = 2u$	$a\lambda - 2ab = 0$	

Typ: ls – liniowe stacjopnarne, lns – liniowe niestacjonarne, n - nieliniowe

Sprawdzenie (część odpowiedzi): Zadanie 3