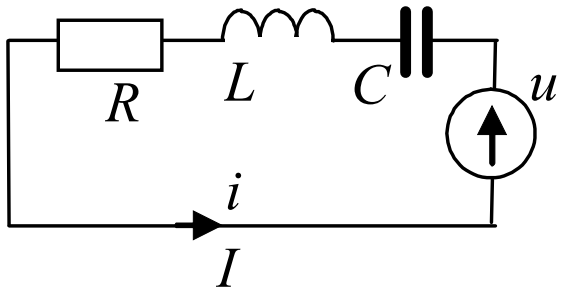
Modele obwodów elektrycznych



równania różniczkowe
równania operatorowe
równania symboliczne
transmitancje

(1) $$j\omega L\, I + R\, I + \frac{1}{j\omega C} I = U$$

(2) $$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = u(t)$$

(3) $$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

(4) $$sL\, i(s) + R\, i(s) + \frac{1}{sC} i(s) = u(s)$$

(5) $$i(s) = \frac{sC}{s^2 LC + sRC + 1} u(s)$$

$$i(t) = I\sin(\omega t) \qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Modele ogólnie - równania różniczkowe zwyczajne liniowe

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + b_{11} u_1 + b_{12} u_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + b_{21} u_1 + b_{22} u_2 \\ \dot{x}_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + b_{31} u_1 + b_{32} u_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}\mathbf{u}$ równania stanu

$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ równania wyjściowe

Transmitancja

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = f(s)$	$\mathcal{L}\left[af_1(t) + bf_2(t)\right] = af_1(s) + bf_2(s)$	$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sf(s) - f(0_+)$
Transformata funkcji	*Twierdzenie o liniowości*	*Transformata funkcji pochodnej* *Założenie:* $f(0_+) = 0$

$$a_n s^n X(s) + \ldots + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_m s^m U(s) + \ldots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

Równanie operatorowe

$$\left(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0\right) X(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0\right) U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = \frac{L(s)}{M(s)}}$$

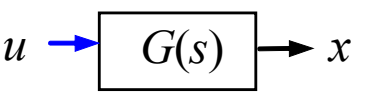
Transmitancja

SISO

Transmitancja = transformata funkcji wyjściowej do transformaty funkcji wejściowej

Warunki: liniowość, zerowe warunki początkowe

$$X(s) = G(s)U(s) = \boxed{\frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0}} U(s)$$



Transmitancja:

- funkcja przejścia
- funkcja operatorowa opisująca zależność sygnału na wyjściu układu od sygnału na wejściu
- funkcja zmiennej zespolonej s, opisująca przetwarzanie sygnałów przez układ

Transmitancje układów wielowymiarowych (MIMO)

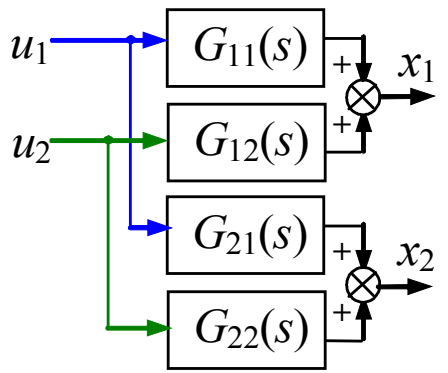
Przykład $\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$

$$x_1(s) = \frac{m_2 s + b_2}{M(s)} u_1(s) + \frac{a_2}{M(s)} u_2(s)$$

$$x_2(s) = \frac{b_1}{M(s)} u_1(s) + \frac{m_1 s + a_1}{M(s)} u_2(s)$$

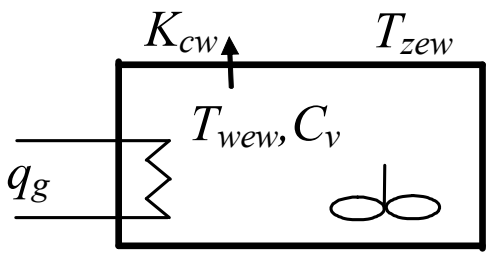
$$M(s) = (m_1 s + a_1)(m_2 s + b_2) - b_1 a_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$



Wyznaczanie transmitancji

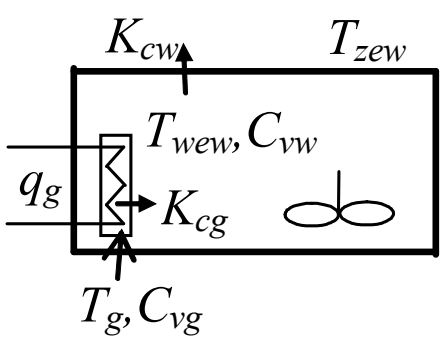
1) Opis teoretyczny na podstawie znajomości zjawisk fiz.
2) Równanie operatorowe
3) Wyznaczenie tramnsmitancji (rozwiązanie równania/układu)



$$C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right)$$

$$C_{vw}sT_{wew}(s) = q_g(s) - K_{cw}\left(T_{wew}(s) - T_{zew}(s)\right)$$

$$T_{wew}(s) = \frac{1}{C_{vw}s + K_{cw}} q_g(s) + \frac{K_{cw}}{C_{vw}s + K_{cw}} T_{zew}(s)$$



$$\begin{cases} C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \\ C_{vg}\dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{vw}sT_{wew}(s) = K_{cg}\left(T_g(s) - T_{wew}(s)\right) - K_{cw}\left(T_{wew}(s) - T_{zew}(s)\right) \\ C_{vg}sT_g(s) = q_g(s) - K_{cg}\left(T_g(s) - T_{wew}(s)\right) \end{cases}$$

$$T_{wew}(s) = G_{11}(s)T_{zew}(s) + G_{12}(s)q_g(s)$$

$$T_g(s) \quad = G_{21}(s)T_{zew}(s) + G_{22}(s)q_g(s)$$

Transmitancje układów wielowymiarowych – przekształcenia (1)

Przykład $\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$

Równania operatorowe

$$\begin{cases} (m_1 s + a_1) x_1(s) = a_2 x_2(s) + u_1(s) \\ (m_2 s + b_2) x_2(s) = b_1 x_1(s) + u_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1(s) x_1(s) = a_2 x_2(s) + u_1(s) \\ M_2(s) x_2(s) = b_1 x_1(s) + u_2(s) \end{cases} \longrightarrow \quad x_1(s) = \frac{a_2 x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)}$$

$$M_2(s) x_2(s) = b_1 \frac{a_2 x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)} + u_2(s) \quad \Big| \cdot M_1(s)$$

$$M_1(s) M_2(s) x_2(s) = b_1 a_2 x_2(s) + b_1 u_1(s) + M_1(s) u_2(s)$$

$$\boxed{x_2(s) = \frac{b_1 u_1(s) + M_1(s) u_2(s)}{M_1(s) M_2(s) - b_1 a_2}}$$

$$M_1(s) x_1(s) = a_2 x_2(s) + u_1(s) = \quad a_2 \frac{b_1 u_1(s) + M_1(s) u_2(s)}{M_1(s) M_2(s) - b_1 a_2} + u_1(s)$$

$$x_1(s) = \frac{a_2 b_1 u_1(s) + a_2 M_1(s) u_2(s) + (M_1(s) M_2(s) - b_1 a_2) u_1(s)}{M_1(s)(M_1(s) M_2(s) - b_1 a_2)}$$

$$\boxed{x_1(s) = \frac{M_2(s) u_1(s) + a_2 u_2(s)}{M_1(s) M_2(s) - b_1 a_2}}$$

Transmitancje układów wielowymiarowych – przekształcenia (2)

Przykład
$$\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

Operacje macierzowe

$$s\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{m_1} & \frac{a_2}{m_1} \\ \frac{b_1}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{x}(s) = \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{a_1}{m_1} & \frac{-a_2}{m_1} \\ \frac{-b_1}{m_2} & s + \frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

Transmitancje układów wielowymiarowych – przekształcenia (2)

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \dfrac{a_1}{m_1} & \dfrac{-a_2}{m_1} \\ \dfrac{-b_1}{m_2} & s + \dfrac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \dfrac{\det\left(\dfrac{m_2 s + b_2}{m_2}\right)}{\det(sI - A)} & (-1)^{2+1} \dfrac{\det\left(\dfrac{-a_2}{m_1}\right)}{\det(sI - A)} \\ (-1)^{1+2} \dfrac{\det\left(\dfrac{-b_1}{m_2}\right)}{\det(sI - A)} & (-1)^{2+2} \dfrac{\det\left(\dfrac{m_1 s + a_1}{m_1}\right)}{\det(sI - A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \left(\frac{m_1 s + a_1}{m_1}\right)\left(\frac{m_2 s + b_2}{m_2}\right) - \frac{b_1 a_2}{m_1 m_2}$$

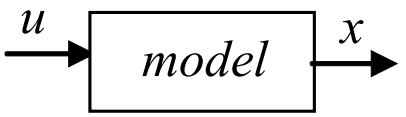
$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_2 s + b_2}{M(s)} & \dfrac{a_2}{M(s)} \\ \dfrac{b_1}{M(s)} & \dfrac{m_1 s + a_1}{M(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$M(s) = (m_1 s + a_1)(m_2 s + b_2) - b_1 a_2$$

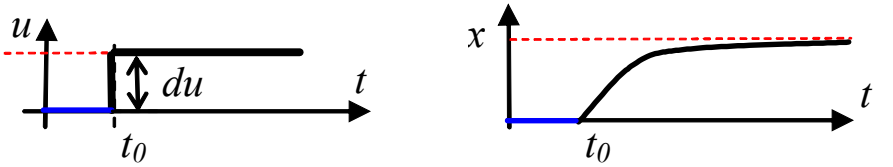
Podstawowe badania obiektu – ch-ki.czasowe

Odpowiedź skokowa – badania symulacyjne (Simulink/Transfer Fcn)

SISO

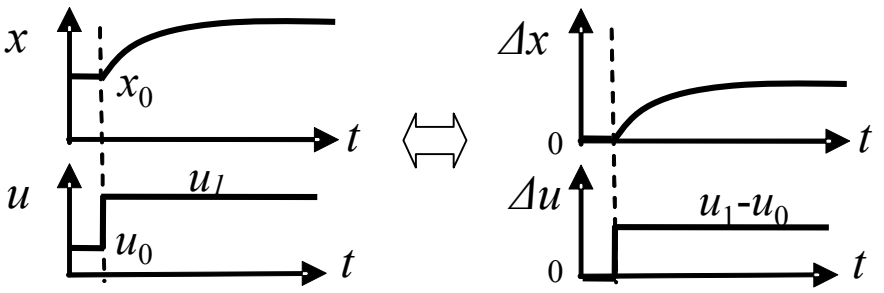


$$x(s) = G(s)u(s) = \frac{L(s)}{M(s)}u(s)$$



Simulink: Transfer Fcn

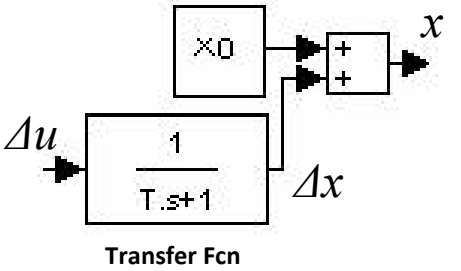
Przesunięcie układu odniesienia



Dowolny punkt pracy (równowagi)

1) Porównanie reakcji
2) Zerowe warunki początkowe (transmitancja)

Ustalenie punktu pracy w modelu



Układy liniowe: rekacje nie zależą od punktu pracy
Reakcje układu nie zależą od formy modelu (równanie różniczkowe, transmitancja)

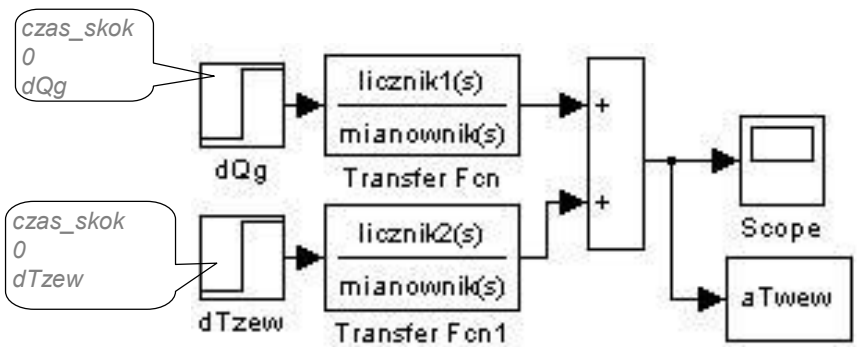
Podstawowe badania obiektu – ch-ki.czasowe

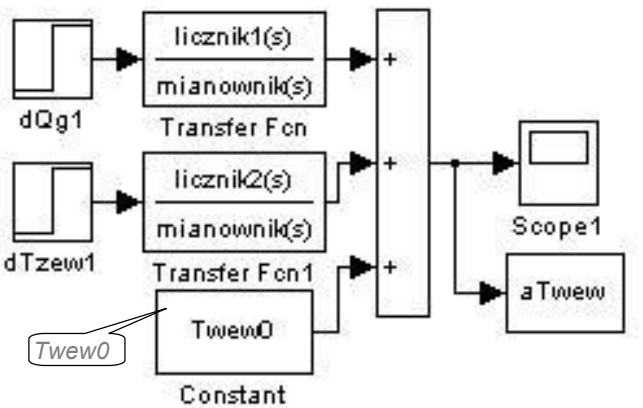
Odpowiedź skokowa – badania symulacyjne (Simulink/Transfer Fcn)

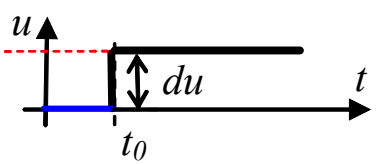
MISO

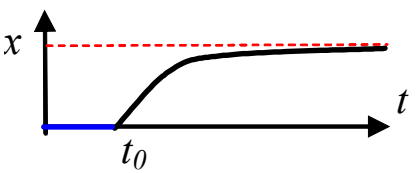
$$C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right)$$

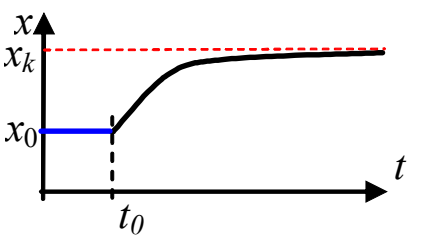
$$T_{wew}(s) = \frac{1}{C_{vw}s + K_{cw}} q_g(s) + \frac{K_{cw}}{C_{vw}s + K_{cw}} T_{zew}(s)$$











Podstawowe badania obiektu – ch-ki.czasowe

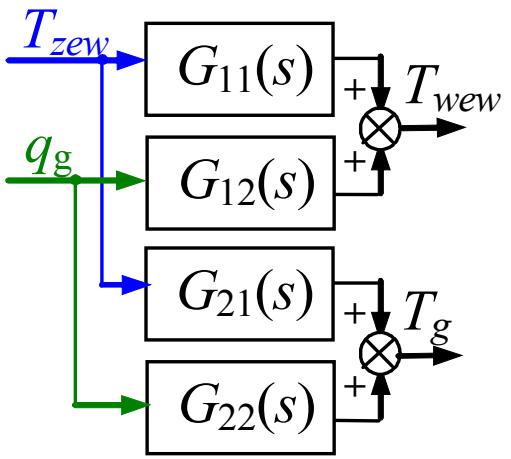
Odpowiedź skokowa – badania symulacyjne (Simulink/Transfer Fcn)

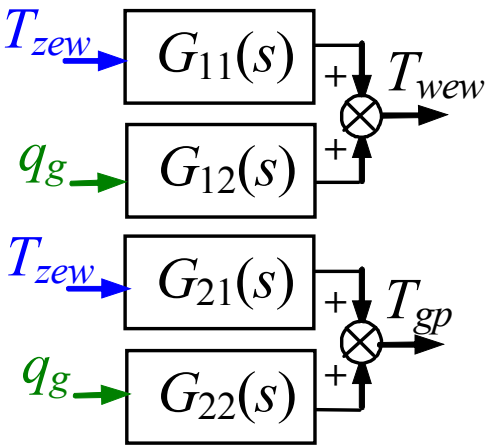
MIMO

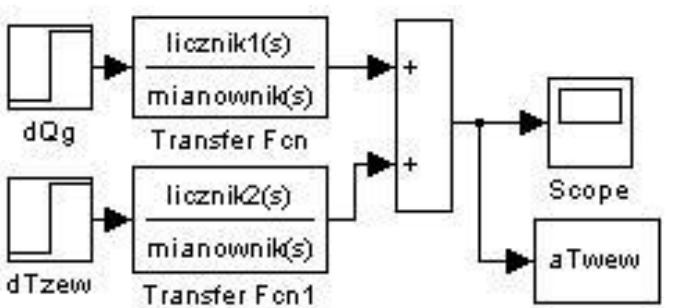
$$\begin{cases} C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \\ C_{vg}\dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) \end{cases}$$

$$T_{wew}(s) = G_{11}(s)T_{zew}(s) + G_{12}(s)q_g(s)$$

$$T_g(s) \quad = G_{21}(s)T_{zew}(s) + G_{22}(s)q_g(s)$$

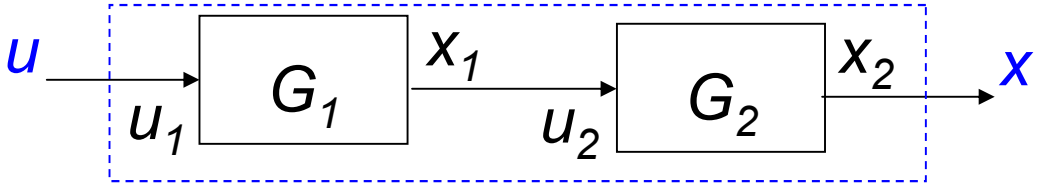






Zastosowanie transmitancji (wybrane)

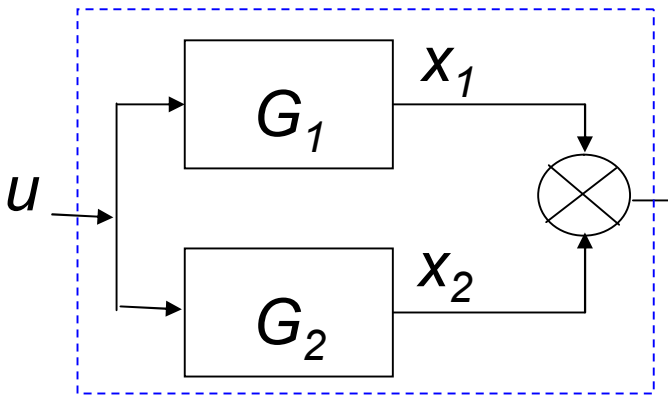
Blokowe schematy układów



$$X = G_1 G_2 U$$

$$X_1 = G_1 U_1 \qquad X_2 = G_2 U_2 = G_2 X_1$$

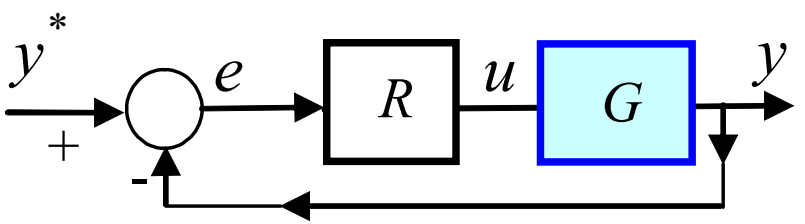
$$X_2 = G_1 G_2 U_1$$



$$X = (G_1 + G_2)U$$

$$X = X_1 + X_2$$

$$X = G_1 U + G_2 U$$



$$\begin{cases} Y(s) = G(s)U(s) \\ U(s) = R(s)E(s) \\ E(s) = Y^*(s) - Y(s) \end{cases} \longrightarrow Y = \frac{RG}{1+RG} Y^*$$

Transmitancja - warunki początkowe

Równanie różniczkowe n-tego rzędu:

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$$

n warunków początkowych:

$$x^{(n)}(0) = x_{0n}; x^{(n-1)}(0) = x_{0n-1}; \ldots; \dot{x}(0) = x_{01}; x(0) = x_0$$

Rozwiązanie i symulacja dla dowolnych warunków początkowych

$$a_n s^n X(s) + \ldots + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_0 U(s)$$

$$\mathscr{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = af_1(s) + bf_2(s)$$

$$\mathscr{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sf(s) - f(0_+) = sf(s)$$

$$f(0_+) = 0$$

Transmitancja:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$

Zerowe warunki początkowe:

$$x^{(n-1)}(0) = 0; \quad \ldots; \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$u(0) = 0; x(0) = 0$$

Rozwiązanie i symulacja tylko dla zerowych warunków początkowych

Transmitancja - stan ustalony (punkt równowagi)

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Punkt równowagi – stałe wymuszenie i wszystkie pochodne =0 $\longrightarrow$ $a_0 x = b_0 u$

$u(t)=u_0$ $\longrightarrow$ $\boxed{x = b_0 u_0 / a_0}$

$u(t)=0$ $\longrightarrow$ $x = 0$

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} \longrightarrow X(s) = G(s)U(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} sG(s)U(s)$$, jeśli pkt.równowagi istnieje

Twierdzenie o wartości końcowej

Dla $u(t)=1(t)$, czyli $U(s) = 1/s$	$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s}$	$\lim_{s\to 0} \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = b_0 / a_0$
Dla $u(t)=u_0$, czyli $U(s) = u_0/s$	$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{u_0}{s}$	$\lim_{s\to 0} \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} u_0 = \boxed{b_0 u_0 / a_0}$
Dla $u(t)=\delta(t)$, czyli $U(s) = 1$	$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)$	$\lim_{s\to 0} s \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = 0$
Dla $u(t)=\sin t$, czyli $U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	*Punkt równowagi nie istnieje*

Transmitancja - badanie stabilności

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Równanie różniczkowe liniowe

$$\boxed{a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

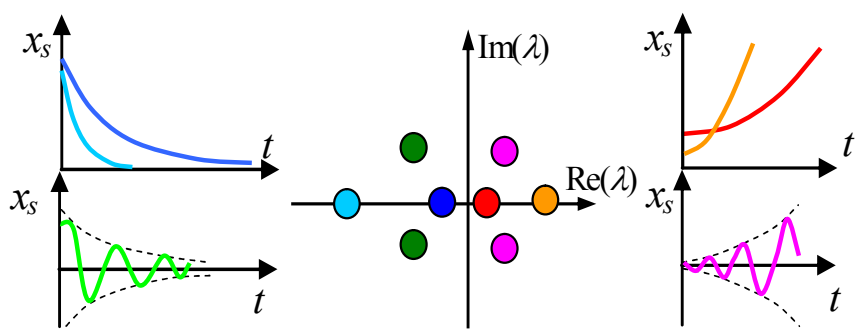
Równanie charakterystyczne

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0}$$

$$M(s) = 0 \longrightarrow \boxed{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0}$$

Równanie charakterystyczne

Transmitancja wyznaczona analitycznie:
- nie jest przybliżeniem (uproszczeniem) równań różniczkowych
- jest inną formą (postacią) modelu - ma te same własności, zmienia się forma (postać)



Bieguny układu