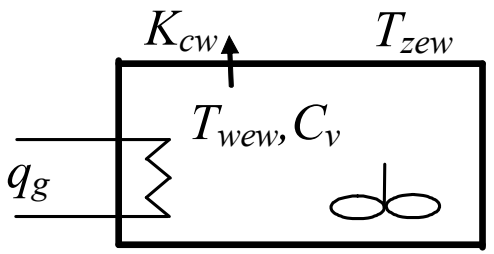
Podstawowe badania obiektu - model

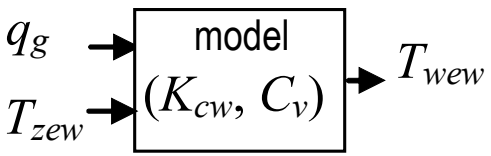


Model dynamiki (model własności dynamicznych)

$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right)$$

Model statyczny

$$0 = q_g - K_{cw}\left(T_{wew} - T_{zew}\right)$$



Zmienne (sygnały) wyjściowe: T_{wew}

Zmienne (sygnały) wejściowe: q_g, T_{zew}

Parametry: K_{cw}, C_v

Identyfikacja wartości parametrów

1) parametry „statyczne”

- równanie statyczne w warunkach nominalnych: $0 = q_{gN} - K_{cw}\left(T_{wewN} - T_{zewN}\right)$
- znamy: T_{zewN}=-20°C, T_{wewN}=+20°C, q_N=2kW
- współczynniki: $K_{cw} = \dfrac{q_{gN}}{T_{wewN} - T_{zewN}}$

2) parametry „dynamiczne” (pojemności cieplne)

$$C_v = c_p \rho V_w$$

Podstawowe badania obiektu – ch-ki.statyczne

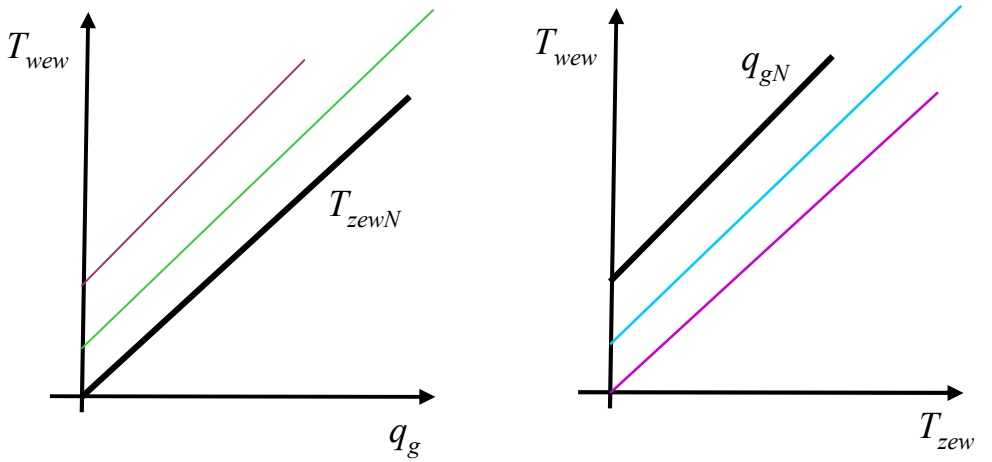
Model statyczny

$$0 = q_g - K_{cw}\left(T_{wew} - T_{zew}\right)$$

Stan równowagi

$$T_{wew} = \frac{q_g}{K_{cw}} + T_{zew}$$

Charakterystyki statyczne



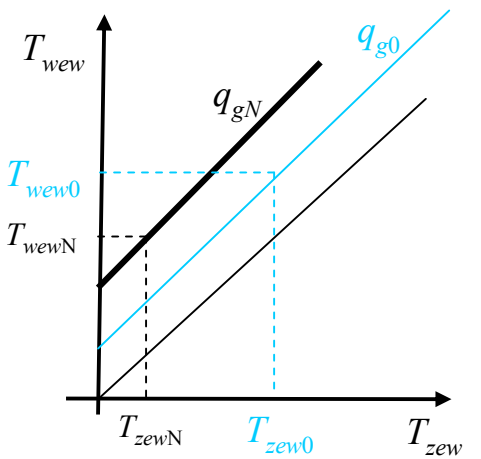
Punkt równowagi (stan równowagi przy stałym wymuszeniu)

- r.stat.: $0 = q_{g0} - K_c\left(T_{wew0} - T_{zew0}\right)$

- wejścia: T_{zew0}, q_0

- wyjścia:

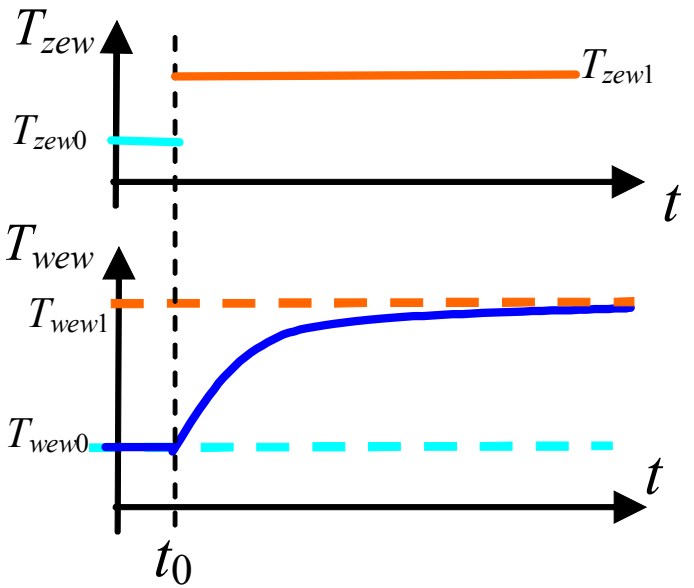
$$T_{wew0} = \frac{q_{g0}}{K_{cw}} + T_{zew0}$$

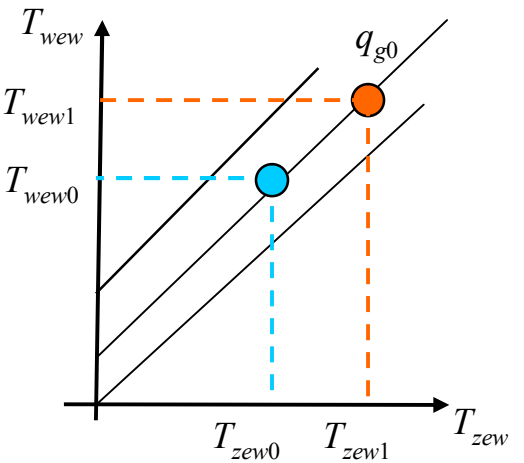


Doświadczalne (eksperymentalne, symulacyjne) wyznaczanie charakterystyk statycznych

Podstawowe badania obiektu – ch-ki.czasowe

Odpowiedź skokowa





Doświadczalne (eksperymentalne) wyznaczanie charakterystyk czasowych:

1) układ w punkcie równowagi (stałe wymuszenia, stan ustalony),
2) wymuszenie skokowe na 1 wejściu,
3) rejestracja odpowiedzi

Podstawowe własności dynamiczne:

1) stabilność,
2) czas dochodzenia do stanu równowagi,
3) oscylacje,

Podstawowe badania obiektu – ch-ki.czasowe

Odpowiedź skokowa – analiczne badanie obiektów liniowych

Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe

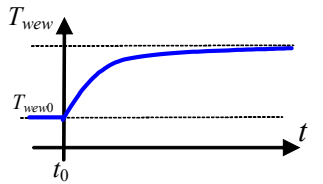
$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right)$$

$$T_{wew}(t) = ...$$

Wymuszenie – skok jednostkowy 1(*t*), skokowa zmiana sygnału wejściowego

Warunki początkowe - stan równowagi, czyli pochodne = 0: $\dot{T}_{wew}(t) = 0$

- wejścia: T_{zew0}, q_0,
- wyjścia: $T_{wew0} = \dfrac{q_{g0}}{K_{cw}} + T_{zew0}$



Klasyczna metoda rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

$$C_v \dot{T}_{wew}(t) + K_{cw} T_{wew}(t) = q_g(t) + K_{cw} T_{zew}(t)$$

$$a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u(t) \longrightarrow a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Zasada superpozycji - analityczne metody rozwiązywania

Własności dynamiczne – równanie charakterystyczne

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Wymuszenie – funkcja zmiennej wejściowej

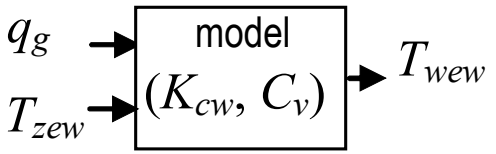
N warunków początkowych – wybór: $x^{(n)}(0) = x_{0n}; x^{(n-1)}(0) = x_{0n-1}; \ldots; \dot{x}(0) = x_{01}; x(0) = x_0$

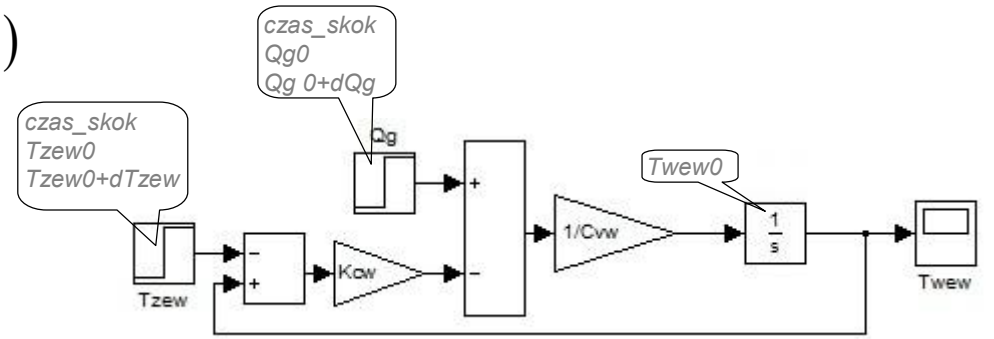
Rozwiązanie - funkcja zmiennej wyjściowej

Podstawowe badania obiektu – ch-ki.czasowe

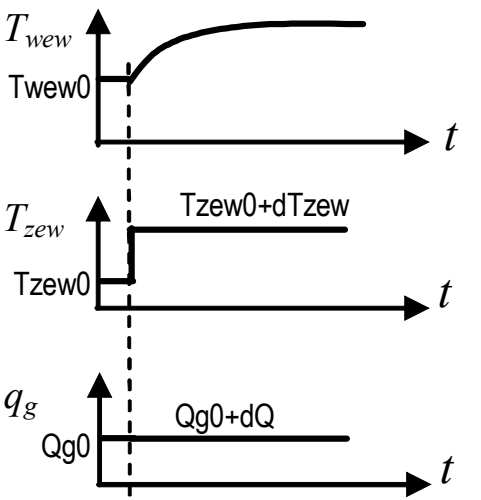
Odpowiedź skokowa – badania symulacyjne (Simulink/Integrator)

$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right)$$



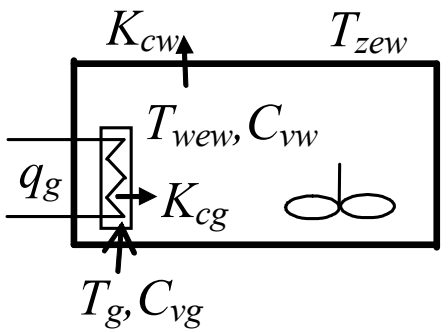


Zasady konstrukcji schematów (modeli liniowych/nieliniowych)
Weryfikacja poprawności (stan ustalony)
Wyznaczanie odpowiedzi skokowych



Simulink: Integrator, Sum, Gain, Step, Scope

Podstawowe badania obiektu – modele MIMO



$$\begin{cases} C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \\ C_{vg}\dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) \end{cases}$$

Zmienne (sygnały) wyjściowe: T_{wew}, T_g

Zmienne (sygnały) wejściowe: q_g, T_{zew}

MIMO

Identyfikacja

- rów.statyczne: (war.nominal.)

$$\begin{cases} 0 = K_{cg}\left(T_{gN} - T_{wewN}\right) - K_{cw}\left(T_{wewN} - T_{zewN}\right) \\ 0 = q_{gN} - K_{cg}\left(T_{gN} - T_{wewN}\right) \end{cases}$$

- znamy: T_{zewN}=-20°C, T_{wewN}=+20°C,

q_{gN}=2kW, T_{gN}=40°C

-współczynniki: $K_{cg} = \dfrac{q_g}{T_g - T_{wew}}, K_{cw} = \dfrac{q_g}{T_{wew} - T_{zew}}$

- pojemności cieplne:

$$C_{vw} = c_{pp}\rho_p V_w, \qquad C_{vg} = c_{po}\rho_o V_g$$

Punkt pracy

- rów.statyczne:

$$\begin{cases} 0 = K_{cg}\left(T_{g0} - T_{wew0}\right) - K_{cw}\left(T_{wew0} - T_{zew0}\right) \\ 0 = q_{g0} - K_{cg}\left(T_{g0} - T_{wew0}\right) \end{cases}$$

- wejścia: T_{zew0}, q_{g0}

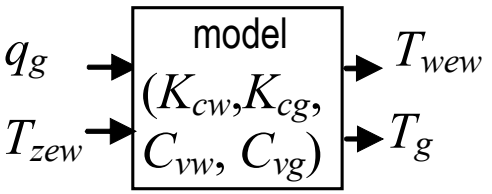
- wyjścia: $T_{wew0} = \dfrac{q_{g0}}{K_{cw}} + T_{zew0}$

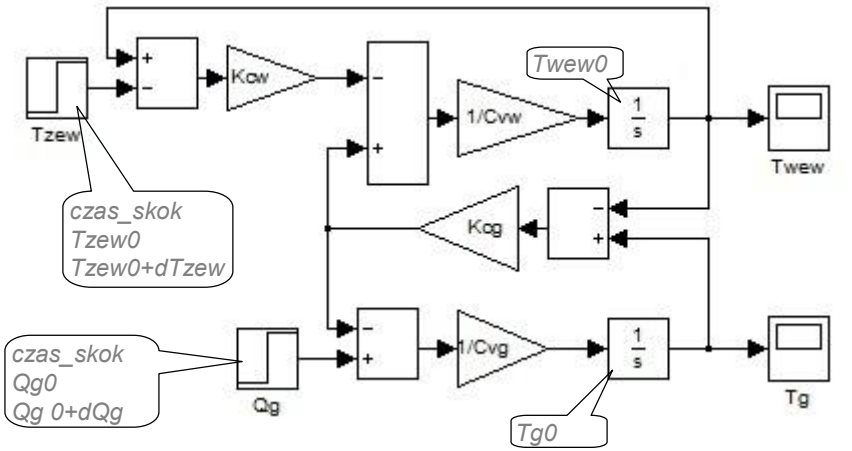
$$T_{g0} = \frac{q_{g0}}{K_{cg}} + T_{wew0}$$

Podstawowe badania obiektu – ch-ki.czasowe

Odpowiedź skokowa – badania symulacyjne (Simulink/Integrator, Simulink/State-Space)

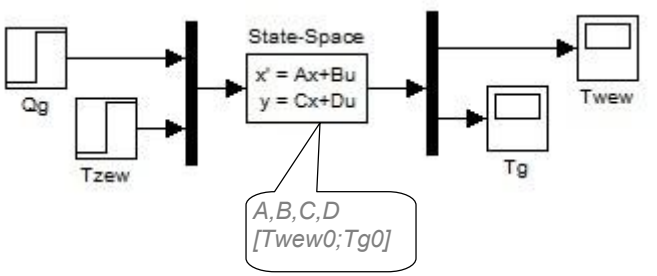
$$\begin{cases} C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \\ C_{vg}\dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) \end{cases}$$





$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{wew}(t) \\ \dot{T}_g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\left(K_{cg}+K_{cw}\right)}{C_{vw}} & \dfrac{K_{cg}}{C_{vw}} \\ \dfrac{K_{cg}}{C_{vg}} & \dfrac{-K_{cg}}{C_{vg}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{wew}(t) \\ T_g(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{K_{cw}}{C_{vw}} \\ \dfrac{1}{C_{vg}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_g(t) \\ T_{zew}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$0 = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$



Simulink: State-Space, Mux, Demux, Step, Scope

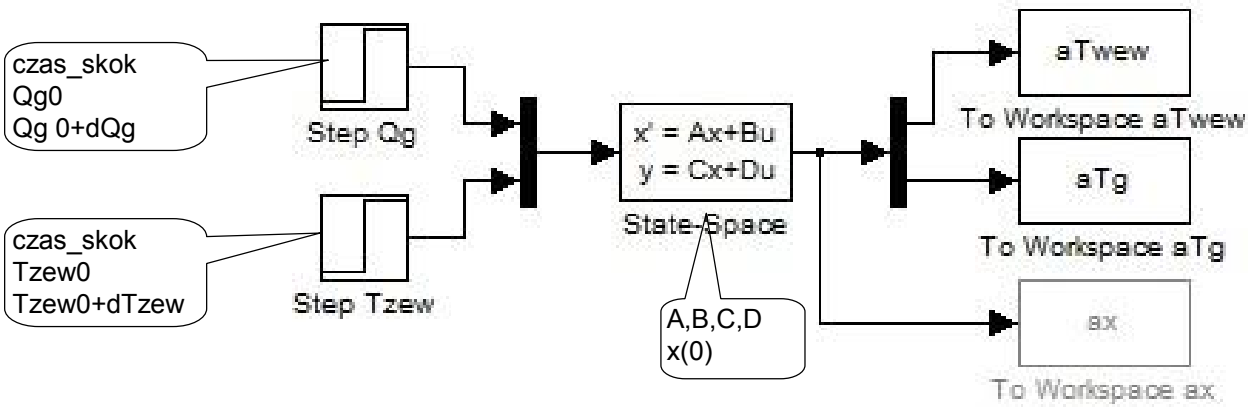
Podstawowe badania obiektu – równania stanu

$$\begin{cases} C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \\ C_{vg}\dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_{cg}\left(T_g(t) - T_{wew}(t)\right) \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} T_{wew}(t) \\ T_g(t) \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} q_g(t) \\ T_{zew}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\left(K_{cg} + K_{cw}\right)}{C_{vw}} & \dfrac{K_{cg}}{C_{vw}} \\ \dfrac{K_{cg}}{C_{vg}} & \dfrac{-K_{cg}}{C_{vg}} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{K_{cw}}{C_{vw}} \\ \dfrac{1}{C_{vg}} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} T_{wew0} \\ T_{g0} \end{bmatrix}$$



Równania różniczkowe - opis dynamiki układu

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + b_{11} u_1 + b_{12} u_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + b_{21} u_1 + b_{22} u_2 \\ \dot{x}_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + b_{31} u_1 + b_{32} u_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$ równania stanu

$$y = Cx + Du$$ równania wyjściowe

Równania statyczne - punkt równowagi układu (punkt pracy)

(stan równowagi przy stałym wymuszeniu)

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$a_0 x = b_0 u \longrightarrow x = \frac{b_0}{a_0} u$$

Równanie statyczne *Punkt równowagi*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ 0 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2 \end{cases}$$

Układ równań statycznych

$$x_1 = f_1(u_1, u_2),$$
$$x_2 = f_2(u_1, u_2)$$
$$x_3 = f_3(u_1, u_2)$$

Punkt równowagi

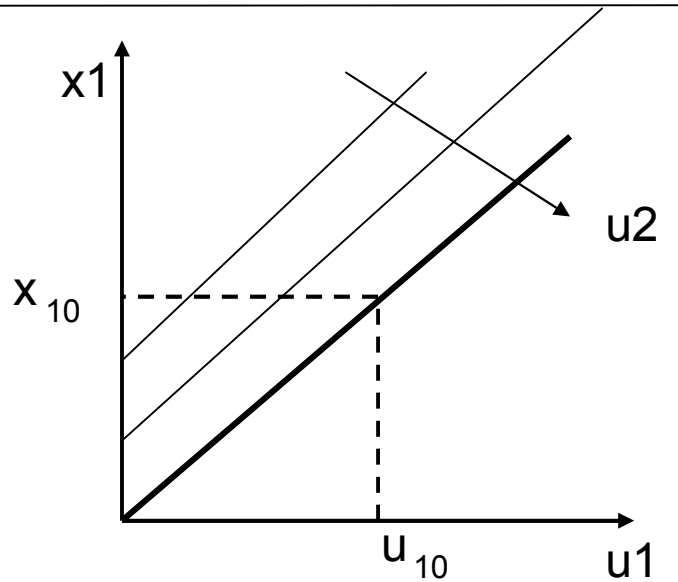
$$0 = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{Ax} = -\mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}$$

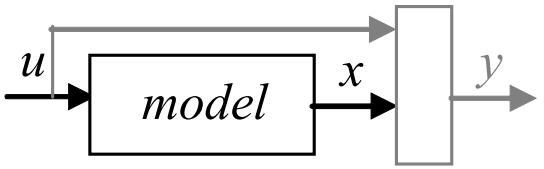
$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}$$

Punkt równowagi



charakterystyka statyczna
i punkt równowagi

Symulacyjne rozwiązywanie równań różniczkowych



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

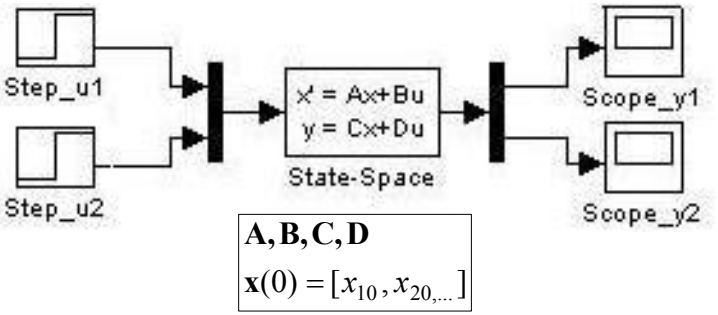
$$\mathbf{x}(0)$$

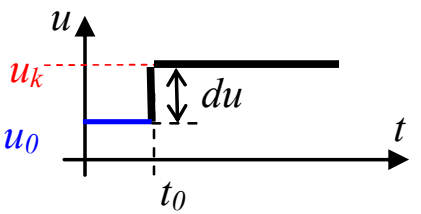
u_{10}

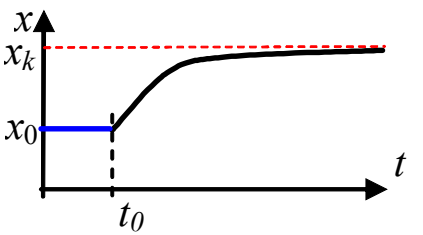
$u_{1k} = u_{10} + du_1$

u_{20}

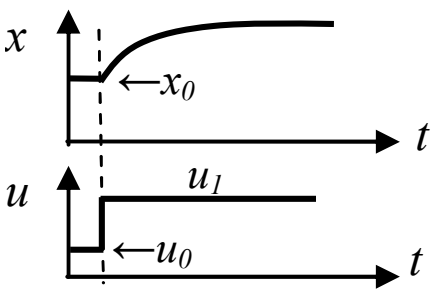
$u_{2k} = u_{20} + du_2$



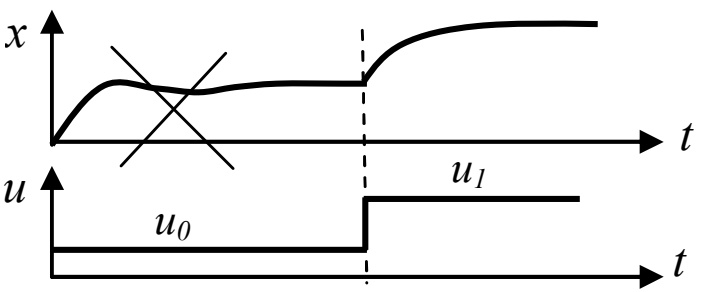




Symulacja od stanu ustalonego

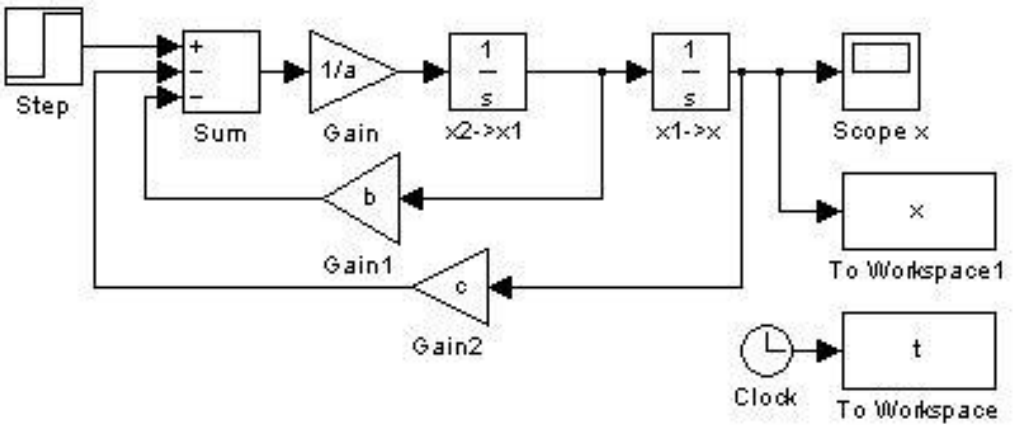


Symulacja od przypadkowego stanu

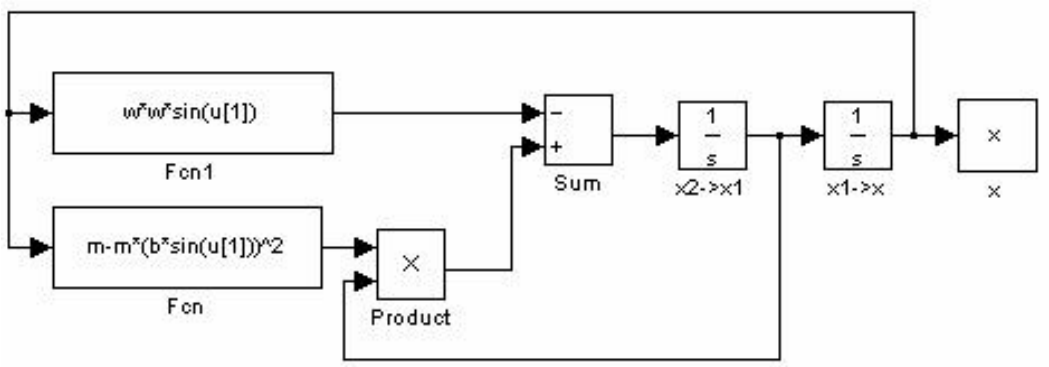


Rozwiązanie równania różniczkowego (bl.całkujące)

$$a\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t)=\left(u(t)-b\dot{x}(t)-cx(t)\right)/a$$

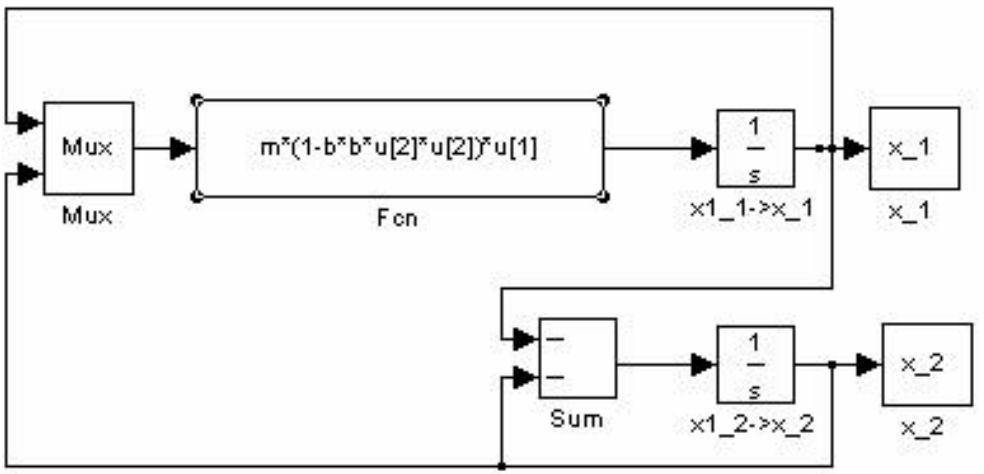


$$\ddot{x}-m(1-b^2\sin^2 x)\dot{x}+w^2\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}=m(1-b^2\sin^2 x)\dot{x}-w^2\sin x$$



Rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - m(1-b^2x_2^2)x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = m(1-b^2x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$



Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - rozwiązanie = składowa swobodna i wymuszona
- zawsze znana postać rozwiązania swobodnego
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- parametry rozwiązania swobodnego wyznaczane na podstawie algebraicznego równania charakterystycznego
- o stabilność układu decyduje położenie biegunów (pierwiastków równania charakterystycznego)
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia i warunków początkowych
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  - $u(t)=1(t)$ $x(t)$ $u(t)=\delta(t)$ $dx(t)/dt$
- jeden punkt równowagi
- stabilność / niestabilność globalna

  (jeśli stabilny to stabilny globalnie, a jeśli niestabilny to niestabilny globalnie)
- można przedstawić w postaci transmitancji (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)