Równania cząstkowe - wprowadzenie

Modele o parametrach rozłożonych

Klasyfikacja:
- r.eliptyczne, r.paraboliczne, r.hiperboliczne
- rząd, liniowość

Zjawiska (zastosowanie):
r.Laplace'a i Poissona, r.przewodnictwa, r.falowe

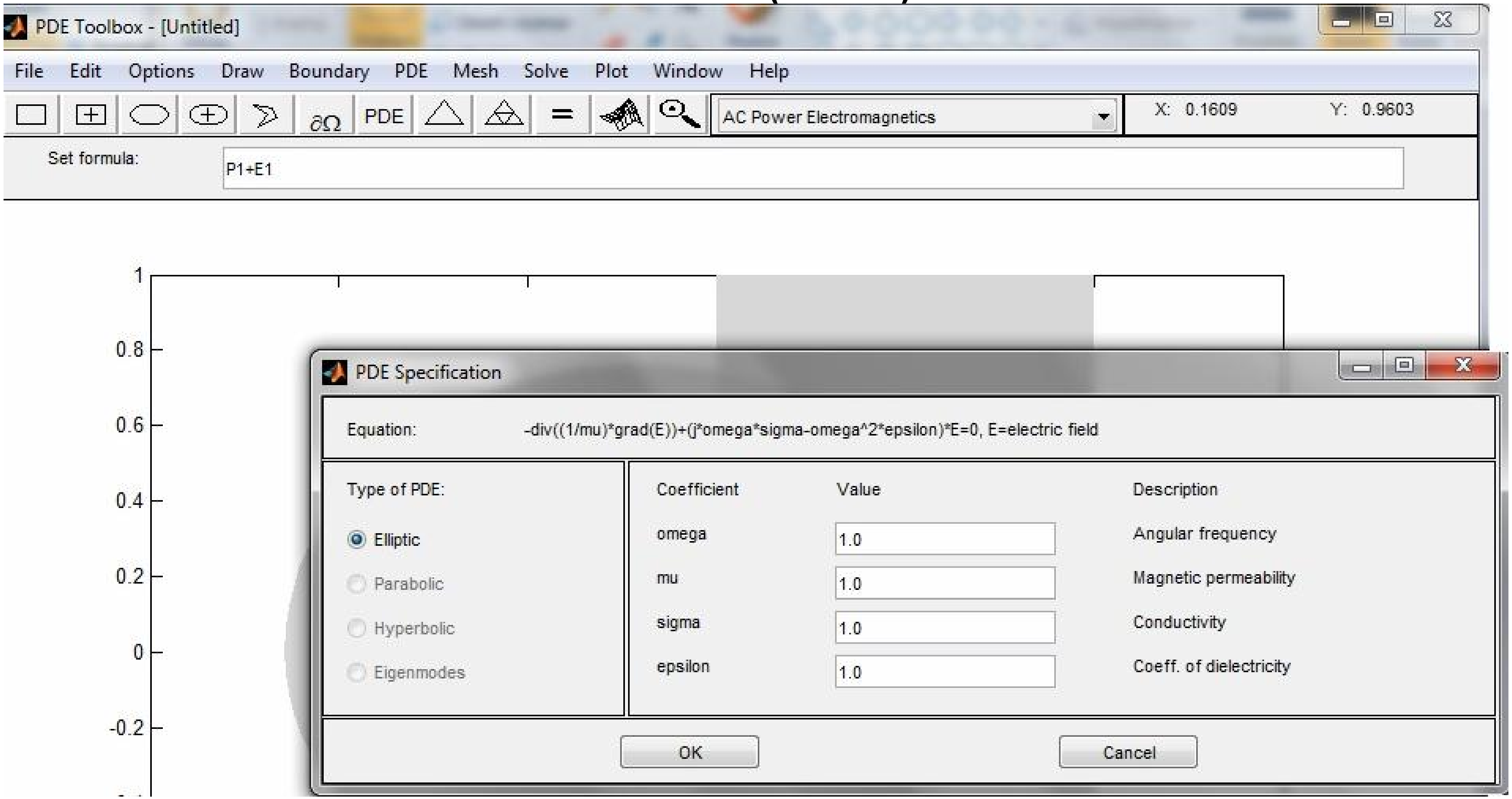
Układanie, klasyfikacja i rozwiązywanie (analityczne) równań cząstkowych:

https://www.impan.pl/swiat-matematyki/notatki-z-wyklado~/skrypt07.pdf

http://www.ikb.poznan.pl/almamater/wyklady/metody_komputerowe_03-04/09.pdf

https://**epodreczniki.open.agh.edu**.pl/openagh-podreczniki_view.php?mode=view&categId=4&handbookId=67&moduleId=625

PDEtool (Matlab)



PDEToolbx rozwiązuje równania skalarne postaci: $m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+d\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot\left(c\nabla u\right)+au=f$

i równania wartości własnych: $-\nabla\cdot\left(c\nabla u\right)+au=\lambda du$ $\qquad -\nabla\cdot\left(c\nabla u\right)+au=\lambda^2 mu$

dla zadanych warunków brzegowych

PDEtool (Matlab) - definicje

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(c\nabla u) + au = f$$

eliptyczne	paraboliczne	hiperboliczne
$-\nabla(c\nabla u) + au = f$	$d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(c\nabla u) + au = f$	$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla(c\nabla u) + au = f$
$Lu = f(x,y,t)$	$d(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x,y,t)$	$d(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f(x,y,t)$
-div(c*grad(u))+a*u=f	d*u'-div(c*grad(u))+a*u=f	d*u''-div(c*grad(u))+a*u=f
$-c\Delta u + au = f$	$du_t - c\Delta u + au = f$	$du_{tt} - c\Delta u + au = f$

gdzie: $Lu = -\nabla(c(x,y,t)\nabla u) + a(x,y,t)u$

Operatory różniczkowe - definicje

Operator Nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}$$

Gradient funkcji: $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}$

wektor wierszowy

Różniczka (pochodna) zupełna: $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ $\qquad \nabla f = (df)^T$

wektor kolumnowy

Dywergencja: $\operatorname{div} F(x,y,z) = \nabla\cdot F = \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z} = i\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} + j\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y} + k\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z}$

Dywergencja = iloczyn skalarny ($\cdot$) operatora nabla ∇ i pola wektorowego $F(F_1,F_2,F_3)$

$$-\nabla\cdot(c\nabla u) + au = f$$

Laplasjan: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ $\qquad \Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2$

Rotacja: $\nabla\times F = \operatorname{rot} F(x,y,z) = \ldots$

Rotacja = iloczyn wektorowy ($\times$) operatora nabla ∇ i pola wektorowego $F(F_1,F_2,F_3)$

PDEtool (Matlab) - interpretacje

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+d\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot\left(c\nabla u\right)+au=f$$

eliptyczne	paraboliczne	hiperboliczne
$-\nabla\left(c\nabla u\right)+au=f$	$d\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\left(c\nabla u\right)+au=f$	$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla\left(c\nabla u\right)+au=f$
-div(c*grad(u))+a*u=f	d*u'-div(c*grad(u))+a*u=f	d*u''-div(c*grad(u))+a*u=f

Pole skalarne – obszar (2D,3D), w którym każdemu punktowi przypisujemy pewną wartość wielkości skalarnej, np.:
pole temperatur, pole gęstości, pole natężenia dźwięku, pole natężenia światła

Pole wektorowe – obszar (2D,3D) w którym w każdym punkcie istnieje pewien wektor, np.:
natężenie pola grawitacyjnego, natężenie pola elektrycznego, wektor siły

Gęstość pewnej wielkości (skalarnej/wektorowej) - u

Gradient funkcji: $\mathrm{grad}(u)=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial z}$

Gradient wielkości (skalarnej/wektorowej) - spadek lub narastanie tej wielkości w określonym kierunku.
Gradient jest wielkością wektorową (gradient wielkości skalarnej też jest wektorem – wynik działania operatora nabla na wielkość skalarną $u(x, y, z)$).
(W modelach o parametrach rozłożonych = pole wektorowe gradientów (wielkości wektorowych))

Od wartości gradientów zależą tzw. zjawiska transportu, np.: transport ładunku (prąd elektryczny), transport ciepła (przewodnictwo cieplne), transport masy (dyfuzja) i transport pędu (lepkość).
Przepływ odbywa się z obszarów o większej gęstości do obszarów o mniejszej gęstości:
– strumień (przepływ) F jest proporcjonalny do gradientu gęstości ∇u, lecz przeciwnie skierowany: $F=-c\nabla u$

Dywergencja: $\mathrm{div}\,F(x,y,z)=\nabla\cdot F=\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}=i\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x}+j\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y}+k\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z}$

Dywergencja - „wypływ, wydajność, rozbieżność" pola wektorowego.
Dywergencja pola F (skalarnego/wektorowego) to pole skalarne = suma pochodnych cząstkowych funkcji składowych F_i pola F

https://www.if.pw.edu.pl/~anadam/WykLadyFO/FoWWW_41.html (Wykłady i Animacje z Fizyki Ogólnej https://www.if.pw.edu.pl/~anadam/WykLadyFO.html)
https://www.if.pw.edu.pl/~anadam/WykLadyFO/FoWWW_19.html
http://pbc.gda.pl/Content/4404/wymiana-i-wymienniki-final.pdf (Wymiana ciepła i wymienniki)

PDEtool (Matlab) - przykłady

eliptyczne

$$-\nabla(c\nabla u)+au=f$$

stacjonarny rozkład w obszarze (2D/3D)

gęstość pewnej wielkości (np. stężenie chemiczne, temperatura, potencjał)

- **r. Laplace'a** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
- **r.Poissona** (niejednorodne równanie Laplace'a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x), \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

pole elektryczne

$$-\nabla(\varepsilon\nabla V)=\rho \quad , E=-\nabla V$$

pole magnetyczne

$$-\nabla\left(\frac{1}{\mu}\nabla A\right)=J$$

przewodzenie ciepła (pole temperatur)

$$-\nabla(k\nabla T)=Q+h(T_{ext}-T)$$

dyfuzja

$$-\nabla(D\nabla c)=Q$$

paraboliczne

$$d\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla(c\nabla u)+au=f$$

zjawisko propagacji, (dyfuzji)

(zmiana rozkładu w funkcji czasu)

zmiana gęstości pewnej wielkości (np. stężenie chemiczne, temperatura)

- r.ciepła (r.przewodnictwa cieplnego) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- r.dyfuzji

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-\nabla(k\nabla T)=Q+h(T_{ext}-T)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}-\nabla(D\nabla c)=Q$$

hiperboliczne

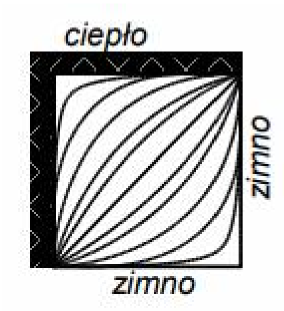
$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla(c\nabla u)+au=f$$

równania falowe

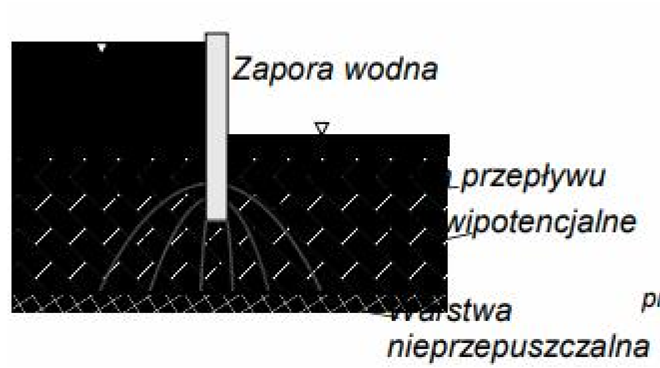
np. drgania struny, membrany, bryły

Przykłady równań eliptycznych

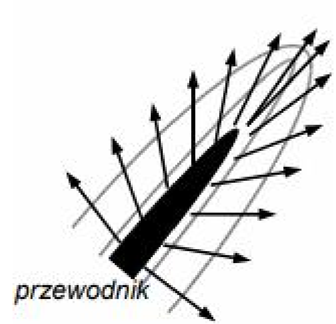
Równania Laplace'a / Poissona



Rozkład temperatur na podgrzewanej płycie



Stan ustalony przepływu wody pod tamą

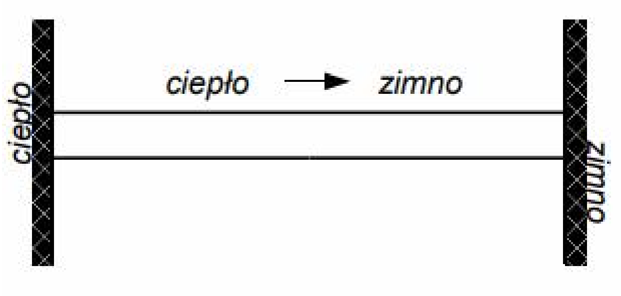


Rozkład pola elektrycznego
w okolicy izolatora

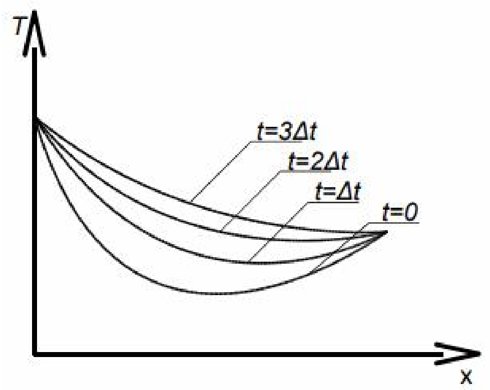
Przykłady równań parabolicznych

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(c\nabla u) + au = f$$

Przewodzenie ciepła przez pręt

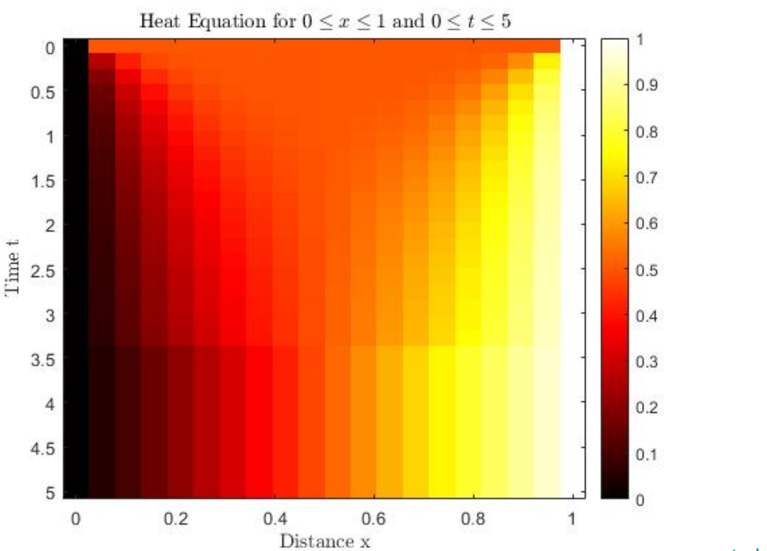


Długi izolowany pręt podgrzewany z jednej strony



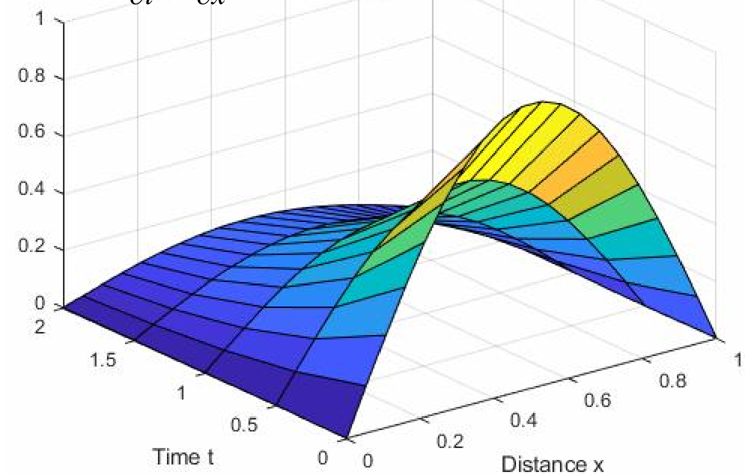
Opis: http://www.ikb.poznan.pl/almamater/wyklady/metody_komputerowe_03-04/09.pdf
Wyprowadzenie: http://www.if.pw.edu.pl/~labfiz1p/cmsimple2_4/1instrukcje_pdf/38.pdf

Równanie ciepła $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$



https://www.mathworks.com/help/matlab/math/partial-differential-equations.html

$$\pi^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

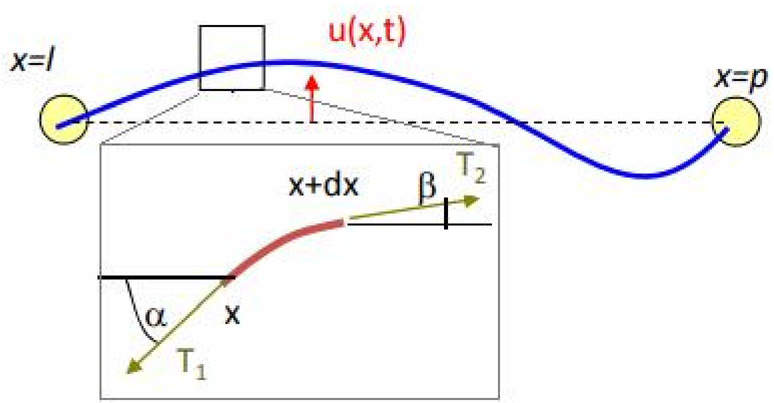


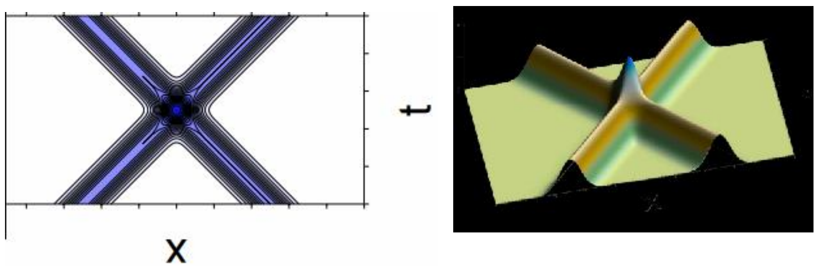
https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-single-pde.html

Inne przykłady w Matlab: https://www.mathworks.com/help/matlab/math/partial-differential-equations.html#brfhecb

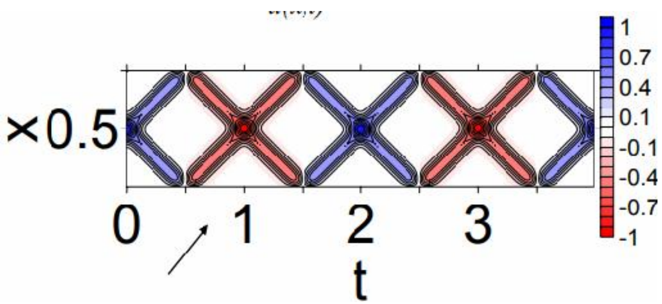
Przykłady równań hiperbolicznych

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla(c\nabla u) + au = f$$

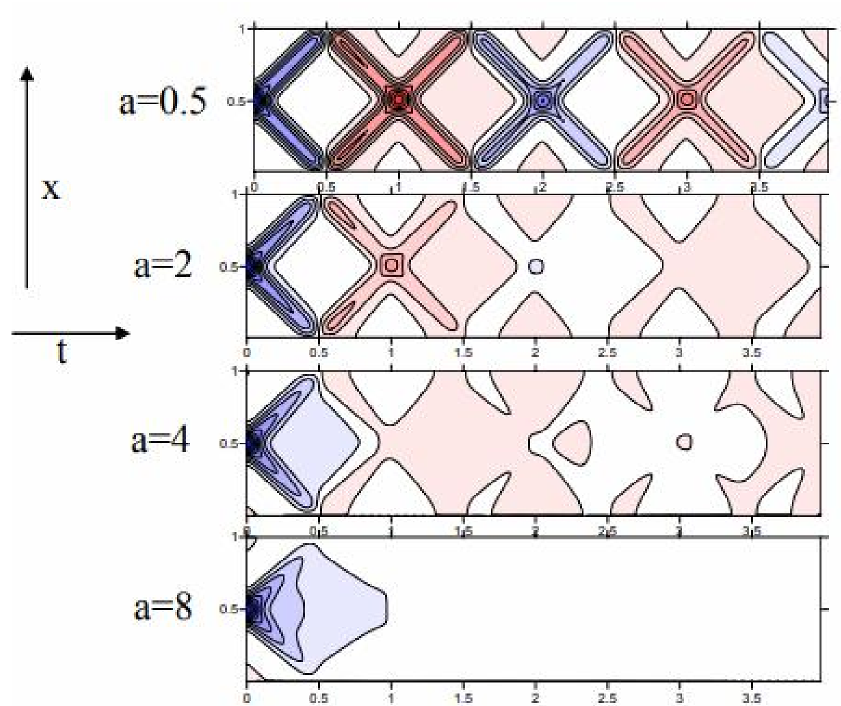




Sygnały mijają się bez zmiany kształtu (jedna fala przenika drugą)



Odbicie ze zmianą fazy (idzie górą, wraca dołem)



Fala tłumiona

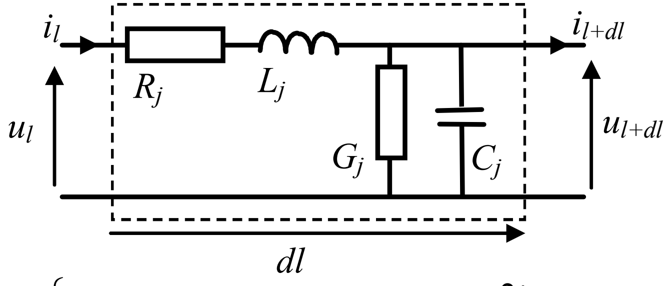
Wyprowadzenia i przykłady dla równania struny: http://home.agh.edu.pl/~chwiej/imn/imn1/18/wyk/12_rownanie_falowe.pdf

Linia długa (jednorodna linia elektryczna)

Linia długa - elektryczna linia dwuprzewodowa, której wymiar jest porównywalny z długością fali.
Przykłady minimalnych długości przewodów, które można traktować już jako linie długą :

- 50 Hz (częstotliwość sieci energetycznej) – 954 km
- 1 GHz (częstotliwość pracy procesora) – 4,77 cm

Elementarny odcinek linii



Parametry na jednostę długości:
R_j – opór czynny
L_j – indukcyjność
G_j – upływność
C_j – pojemność

Zmienne:

$$u_l = u(t,l)$$

$$u_{l+dl} = u(t,l) + \frac{\partial u(t,l)}{\partial l} dl$$

$$i_l = i(t,l)$$

$$i_{l+dl} = i(t,l) + \frac{\partial i(t,l)}{\partial l} dl$$

$$\begin{cases} u_l = u_{l+dl} + R_j dl \cdot i_l + L_j dl \cdot \dfrac{\partial i_l}{\partial t} & \text{równanie napięć} \\ i_l = i_{l+dl} + G_j dl \cdot u_l + C_j dl \cdot \dfrac{\partial u_l}{\partial t} & \text{równanie prądów} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t,l) = \left(u(t,l) + \dfrac{\partial u(t,l)}{\partial l} dl \right) + R_j dl \cdot i(t,l) + L_j dl \cdot \dfrac{\partial i(t,l)}{\partial t} \\ i(t,l) = \left(i(t,l) + \dfrac{\partial i(t,l)}{\partial l} dl \right) + G_j dl \cdot u(t,l) + C_j dl \cdot \dfrac{\partial u(t,l)}{\partial t} \end{cases}$$

Podzielić przez *dl* i uporządkować

$$\boxed{\begin{cases} -\dfrac{\partial u(t,l)}{\partial l} = R_j i(t,l) + L_j \dfrac{\partial i(t,l)}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i(t,l)}{\partial l} = G_j u(t,l) + C_j \dfrac{\partial u(t,l)}{\partial t} \end{cases}}$$

Model dynamiki

(opóźnienie i zniekształcenie sygnałów)

Przewód rurowy

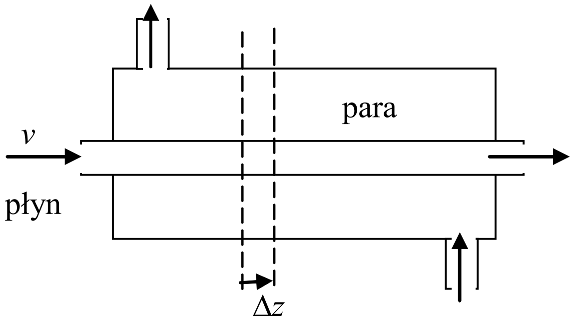
$$\begin{cases} m\dfrac{\partial f}{\partial t} + rf = -\dfrac{\partial P}{\partial x} & \text{spadek ciśnienia} \\ c\dfrac{\partial P}{\partial t} + 0 = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} & \text{zmiana przepływu} \end{cases}$$

http://home.agh.edu.pl/~jamro/tc/Lin_dluga_teor.doc
http://layer.uci.agh.edu.pl/maglay/wrona/pl/podstrony/dydaktyka/TiC-zaoczne/Linia_Dluga/LinDluga_teor.pdf

Wymiennik ogrzewany parą

Właściwości wymiennika ogrzewanego parą:
- na jej zewnętrznej ścianie rury skrapla się para,
- objętość pary otaczającej rurę jest idealnie mieszana.
- temperatura kondensatu (pary) zależy bezpośrednio od ciśnienia pary.

→ Temperatura jednej strony ścianek jest stała



Parametry:
A – powierzchnia przekroju rury
a_1 – elementarna powierzchnia przenoszenia ciepła
c_p – ciepło właściwe płynu, ρ – gęstość płynu
h – współczynnik wymiany ciepła

Zmienne:
v – prędkość przepływu płynu
T – temperatura płynu
T_s – temperatura pary

Założenia:
- jedynym oporem w przenoszeniu ciepła jest nieruchoma warstwa powierzchni rury
- jedyna ważniejsza akumulacja zachodzi w przepływającym płynie
- ciepło właściwe i gęstość płynu są stałe
- profil prędkości przepływu płynu jest płaski (ciecz ślizga się po ścianach rury) i stały wzdłuż rury
- nie występują gradienty temperatury w kierunku promieniowym

Bilans energii dla elementarnej objętości Δz

$$\frac{d}{dt}\left(A\Delta z\rho c_p T\right) = Av\rho c_p\left(T(z) - T(z+\Delta z)\right) + ha\Delta z\left(T_s - T\right)$$

akumulacja = dopływ - odpływ + wymiana przez ścianki

Podzielić przez Δz

$$A\rho c_p \frac{dT}{dt} = Av\rho c_p \frac{-\left(T(z+\Delta z) - T(z)\right)}{\Delta z} + ha\left(T_s - T\right)$$

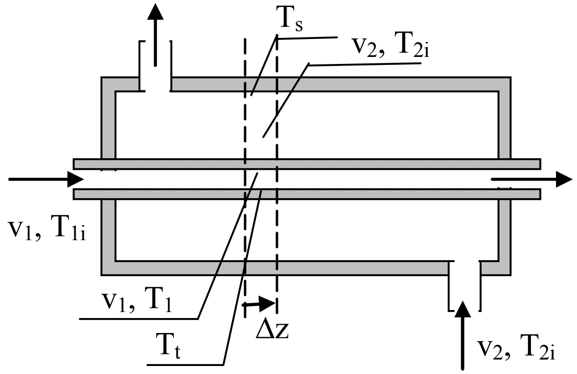
Przejść do granicy

$$\boxed{A\rho c_p \frac{dT}{dt} = -Av\rho c_p \frac{\partial T}{\partial z} + ha\left(T_s - T\right)}$$

Model dynamiki wymiennika

Przeciwprądowy wymiennik ciepła typu rura w rurze (1)

Przy założeniach pozwalających ograniczyć się do rozpatrywania jednego kierunku przestrzennego



Parametry:

A_1 - powierzchnia przekroju rury
A_2 - powierzchnia przekroju płaszcza
A_t - powierzchnia przekroju ścianek rury
A_s - powierzchnia przekroju ścianek płaszcza
a_1 - elementarna powierzchnia kontaktu czyn.1 i rury
a_2 - elementarna powierzchnia kontaktu czyn.2 i rury
a_s - elementarna powierzchnia kontaktu czyn.2 i płaszcza
c_{p1}, c_{p2} – ciepło właściwe czynników
C_t, C_s – ciepło właściwe materiału rury i płaszcza
ρ_1, ρ_2 – gęstość czynników
ρ_t, ρ_s – gęstość materiału rury i płaszcza
h_1, h_2 – współczynniki wymiany ciepła

Zmienne:

v_1, v_2 – prędkość czynnika
T_{i1}, T_{i2} – temperatura czynnika na wejściu
T_1, T_2 - temperatura elementarnej objętości czynnika
T_t, T_s - temperatura elementarnej objętości ścianek

Założenia:

- przepływ płynów odbywa się z całkowitym wypełnieniem
- prędkości przepływu są stałe na całej długości rur
- gęstości i pojemności cieplne są stałe
- nie występuje przewodzenie ciepła w kierunku osiowym (stała temperatura elementarnej objętości czynników, rury i płaszcza)
- nie występują gradienty temperatury w kierunku promieniowym
- płaszcz jest całkowicie izolowany

Akumulacja ciepła (czynnik 1, ściana rury, ściana 2, ściana płaszcza):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(A_1 \Delta z \rho_1 c_{p1} T_1) = A_1 v_1 \rho_1 c_{p1}(T_{1(z)} - T_{1(z+\Delta z)}) + h_1 a_1 \Delta z (T_t - T_1) \\ \frac{d}{dt}(A_t \Delta z \rho_t c_t T_t) = h_2 a_2 \Delta z (T_2 - T_t) - h_1 a_1 \Delta z (T_t - T_1) \\ \frac{d}{dt}(A_2 \Delta z \rho_2 c_{p2} T_2) = A_2 v_2 \rho_2 c_{p2}(T_{2(z)} - T_{2(z+\Delta z)}) - h_2 a_2 \Delta z (T_2 - T_t) - h_s a_s \Delta z (T_2 - T_s) \\ \frac{d}{dt}(A_s \Delta z \rho_s c_s T_s) = h_s a_s \Delta z (T_2 - T_s) \end{cases}$$

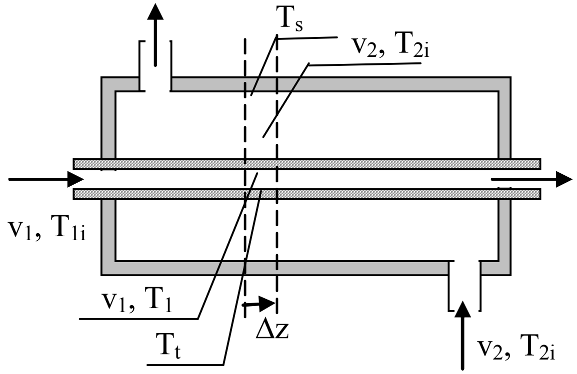
Podzielić przez Δz *i* przejść do granicy

Model dynamiki wymiennika

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} + b_1 (T_t - T_1) \\ \frac{\partial T_t}{\partial t} = b_1' (T_1 - T_t) + b_2' (T_2 - T_t) \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} = v_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} + b_2 (T_t - T_2) + b_s (T_s - T_2) \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = b_s' (T_2 - T_s) \end{cases}$$

Przeciwprądowy wymiennik ciepła typu rura w rurze (2)

Przy założeniach pozwalających ograniczyć się do rozpatrywania jednego kierunku przestrzennego



Model dynamiki wymiennika

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial T_1}{\partial t} = -v_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial z} + b_1 (T_t - T_1) \\
\dfrac{\partial T_t}{\partial t} = b_1^{'} (T_1 - T_t) + b_2^{'} (T_2 - T_t) \\
\dfrac{\partial T_2}{\partial t} = v_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial z} + b_2 (T_t - T_2) + b_s (T_s - T_2) \\
\dfrac{\partial T_s}{\partial t} = b_s^{'} (T_2 - T_s)
\end{cases}
$$

$$
b_1 = \frac{h_1 a_1}{A_1 \rho_1 C_{p1}} \qquad b_1^{'} = \frac{h_1 a_1}{A_t \rho_t C_t}
$$

$$
b_2 = \frac{h_2 a_2}{A_2 \rho_2 C_{p2}} \qquad b_2^{'} = \frac{h_2 a_2}{A_t \rho_t C_t}
$$

$$
b_s = \frac{h_s a_s}{A_2 \rho_2 C_{p2}} \qquad b_s^{'} = \frac{h_s a_s}{A_s \rho_s C_s}
$$

Rozwiązanie w stanie ustalonym

$$
T_1 = T_{1i} e^{mz} + A(1 - e^{mz})
$$

$$
T_2 = \frac{v_1 U_2 a_2}{v_2 U_1 a_1} T_{1i} e^{mz} + A\left(1 - \frac{v_1 U_2 a_2}{v_2 U_1 a_1} e^{mz}\right)
$$

$$
T_t = \frac{b_1^{'}}{b_1^{'} + b_2^{'}} T_1 + \frac{b_1^{'}}{b_1^{'} + b_2^{'}} T
$$

$$
T_s = T_2
$$

$$
U_1 a_1 = \frac{b_1 b_2^{'}}{b_1^{'} + b_2^{'}} \qquad U_2 a_2 = \frac{b_2 b_1^{'}}{b_1^{'} + b_2^{'}}
$$

$$
A = \frac{T_{2i} - \dfrac{v_1}{v_2} \dfrac{U_2 a_2}{U_1 a_1} T_{i1} e^{ml}}{1 - \dfrac{v_1}{v_2} \dfrac{U_2 a_2}{U_1 a_1} e^{ml}}
$$

Model uproszczony - pojemności cieplne obu ścian są pomijalne

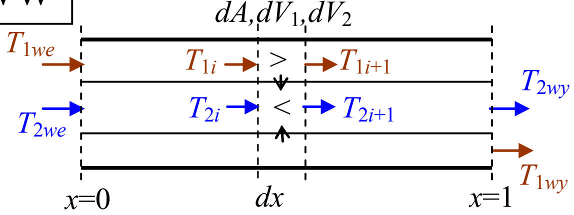
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial T_1}{\partial t} = -v_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial z} + U_1 a_1 (T_2 - T_1) \\
\dfrac{\partial T_2}{\partial t} = v_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial z} + U_2 a_2 (T_1 - T_2)
\end{cases}
$$

$$
U_1 a_1 = b_1 \frac{h_2 a_2}{h_1 a_1 + h_2 a_2}
$$

$$
U_2 a_2 = b_2 \frac{h_1 a_1}{h_1 a_1 + h_2 a_2}
$$

Dynamiczny model wymienników WW/WP (1)

WW

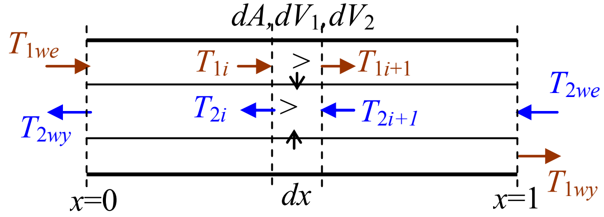


$$\lambda \cdot dA = \lambda A_c \cdot dx = k_c \cdot dx$$

$$c_p \rho \; dV_1 = c_p \rho V_1 \; dx = C_{v1} dx$$

$$c_p \rho \; dV_2 = c_p \rho V_2 \; dx = C_{v2} dx$$

WP



$$\begin{cases} C_{v1} dx \dfrac{dT_{1i}}{dt} = m_1 \left(T_{1i} - T_{1i+1}\right) - k_c dx \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ C_{v2} dx \dfrac{dT_{2i}}{dt} = k_c dx \left(T_{1i} - T_{2i}\right) - m_2 \left(T_{2i+1} - T_{2i}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{v1} dx \dfrac{dT_{1i}}{dt} = m_1 \left(T_{1i} - T_{1i+1}\right) - k_c dx \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ C_{v2} dx \dfrac{dT_{2i}}{dt} = k_c dx \left(T_{1i} - T_{2i}\right) - m_2 \left(T_{2i} - T_{2i+1}\right) \end{cases}$$

Podzielić przez dx i uporządkować

$$\begin{cases} C_{v1} \dfrac{dT_{1i}}{dt} = m_1 \dfrac{T_{1i} - T_{1i+1}}{dx} - k_c \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ C_{v2} \dfrac{dT_{2i}}{dt} = -m_2 \dfrac{T_{2i+1} - T_{2i}}{dx} + k_c \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{v1} \dfrac{dT_{1i}}{dt} = m_1 \dfrac{T_{1i} - T_{1i+1}}{dx} - k_c \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ C_{v2} \dfrac{dT_{2i}}{dt} = -m_2 \dfrac{T_{2i} - T_{2i+1}}{dx} + k_c \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT_{1i}}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}} \dfrac{T_{1i+1} - T_{1i}}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}} \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ \dfrac{dT_{2i}}{dt} = \dfrac{-m_2}{C_{v2}} \dfrac{T_{2i+1} - T_{2i}}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}} \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT_{1i}}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}} \dfrac{T_{1i+1} - T_{1i}}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}} \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ \dfrac{dT_{2i}}{dt} = \dfrac{m_2}{C_{v2}} \dfrac{T_{2i+1} - T_{2i}}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}} \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT_{1i}}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}} \dfrac{dT_{1i}}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}} \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ \dfrac{dT_{2i}}{dt} = \dfrac{-m_2}{C_{v2}} \dfrac{dT_{2i}}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}} \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT_{1i}}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}} \dfrac{dT_{1i}}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}} \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ \dfrac{dT_{2i}}{dt} = \dfrac{m_2}{C_{v2}} \dfrac{dT_{2i}}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}} \left(T_{1i} - T_{2i}\right) \end{cases}$$

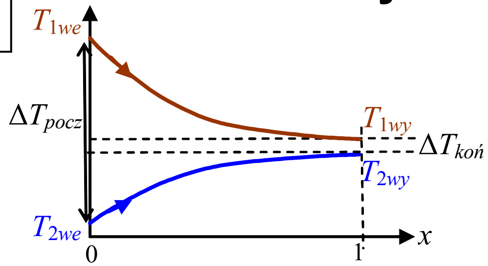
Inne oznaczenia

$$\begin{cases} \dfrac{dT_1(t,x)}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}} \dfrac{dT_1(t,x)}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}} \left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \\ \dfrac{dT_2(t,x)}{dt} = \dfrac{-m_2}{C_{v2}} \dfrac{dT_2(t,x)}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}} \left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT_1(t,x)}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}} \dfrac{dT_1(t,x)}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}} \left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \\ \dfrac{dT_2(t,x)}{dt} = \dfrac{m_2}{C_{v2}} \dfrac{dT_2(t,x)}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}} \left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \end{cases}$$

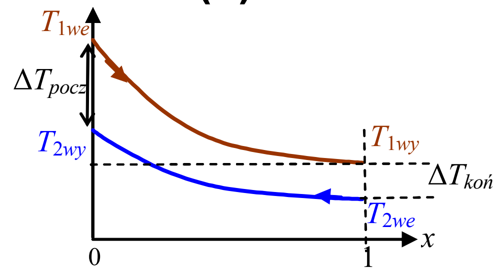
Dynamiczny model wymienników WW/WP (2)

WW



$$\begin{cases} \dfrac{dT_1(t,x)}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}} \dfrac{dT_1(t,x)}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}}\left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \\ \dfrac{dT_2(t,x)}{dt} = \dfrac{-m_2}{C_{v2}} \dfrac{dT_2(t,x)}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}}\left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \end{cases}$$

WP



$$\begin{cases} \dfrac{dT_1(t,x)}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}} \dfrac{dT_1(t,x)}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}}\left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \\ \dfrac{dT_2(t,x)}{dt} = \dfrac{m_2}{C_{v2}} \dfrac{dT_2(t,x)}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}}\left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \end{cases}$$

Warunki brzegowe – rozkład temperatur wzdłuż wymiennika (stan ustalony) – wg *3

$$T_1(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_1 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{1we}$$

$$T_2(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{-m_2 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{2we}$$

WW: $\Delta T_{pocz} = T_1(0) - T_2(0)$

$m = 1/m_1 + 1/m_2$,

$T_1(0) = 135$ $\quad$ $T_1(1) = 95$

$T_2(0) = 70$ $\quad$ $T_2(1) = 90$

$$T_1(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_1 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{1we}$$

$$T_2(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_2 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{2wy}$$

WP: $\Delta T_{pocz} = T_1(0) - T_2(0)$

$m = 1/m_1 - 1/m_2$,

$T_1(0) = 135$ $\quad$ $T_1(1) = 85$

$T_2(0) = 90$ $\quad$ $T_2(1) = 70$

$$-\nabla(c\nabla u) + au = f$$

-div(c*grad(u))+a*u=f

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(c\nabla u) + au = f$$

d*u’-div(c*grad(u))+a*u=f

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla(c\nabla u) + au = f$$

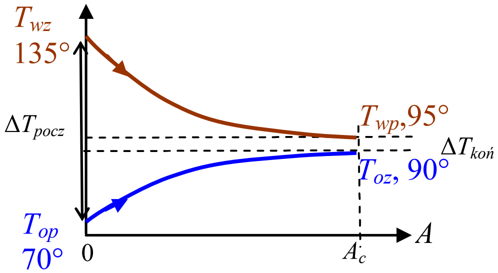
d*u’’-div(c*grad(u))+a*u=f

Dywergencja: $\operatorname{div} F(x,y,z) = \nabla \cdot F = \dfrac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}$

Gradient funkcji: $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

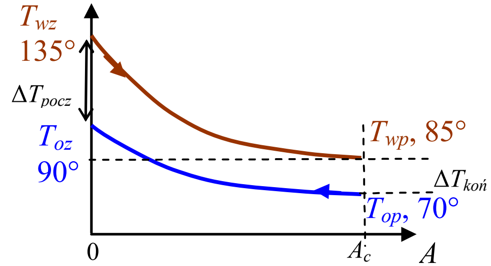
Statyczny model wymienników WW/WP (1)

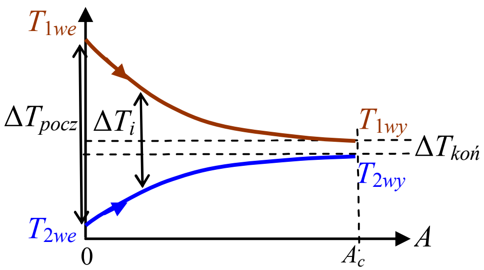
WW



Zastosowanie – np.:
dobór wymienników w instalacji c.o.

WP





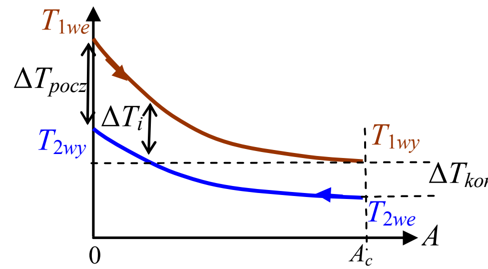
$$\boxed{m_1\left(T_{1we} - T_{1wy}\right) = m_2\left(T_{2wy} - T_{2we}\right) = k_c\ \Delta T_{śr}}$$

$$m_1\left(T_{1we} - T_{1wy}\right) = c_{p1} f_1\left(T_{1we} - T_{1wy}\right),$$

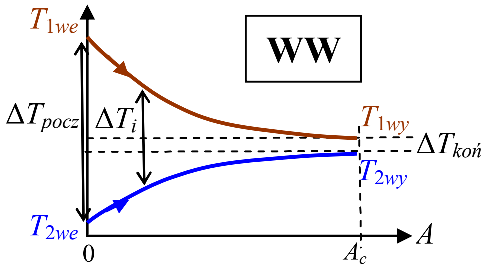
$$m_2\left(T_{2wy} - T_{2we}\right) = c_{p2} f_2\left(T_{2wy} - T_{2we}\right)$$

$$k_c\ \Delta T_{śr} = \lambda A_c\ \Delta T_{śr}$$

$\boldsymbol{\Delta T_{śr}}$ **?**



Statyczny model wymienników WW/WP (2)

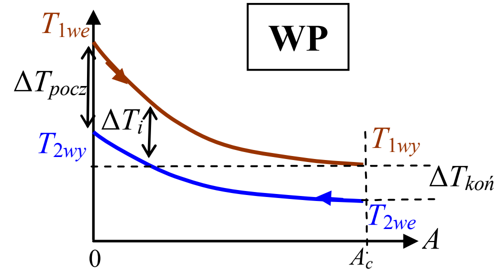


$$\boxed{m_1\left(T_{1we}-T_{1wy}\right)=m_2\left(T_{2wy}-T_{2we}\right)=k_c\,\Delta T_{śr}}$$

$$m_1\left(T_{1we}-T_{1wy}\right)=c_{p1}f_1\left(T_{1we}-T_{1wy}\right),$$

$$m_2\left(T_{2wy}-T_{2we}\right)=c_{p2}f_2\left(T_{2wy}-T_{2we}\right)$$

$$k_c\,\Delta T_{śr}=\lambda A_c\,\Delta T_{śr}$$



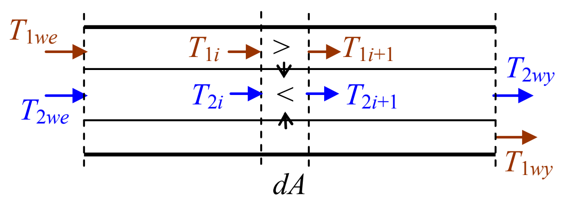
Jak wyznaczyć $\Delta T_{śr}$:

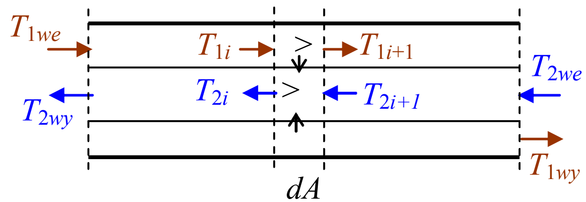
• strumień ciepła przenikającego przez *i*-ty przekrój: $dq_i=\lambda\,\Delta T_i\,dA$

• całkowity strumień ciepła: $q=\int_0^{A_c}\lambda\,\Delta T_i\,dA$

• średnia różnica temperatur $\Delta T_{śr:}$ $\Delta T_{śr}=\frac{1}{A_c}\int_0^{A_c}\Delta T_i\,dA$

Jak wyznaczyć rozkład ΔT_i





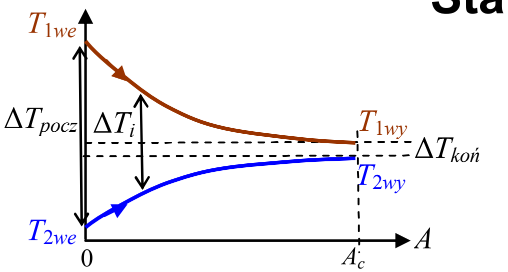
$$\begin{cases} m_1T_{1i}=m_1T_{1i+1}+\lambda\left(T_{1i}-T_{2i}\right)dA \\ m_2T_{2i}+\lambda\left(T_{1i}-T_{2i}\right)dA=m_2T_{2i+1} \end{cases}$$

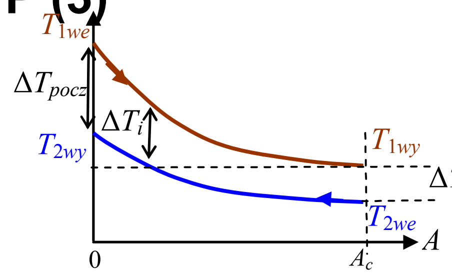
$$m_1\left(T_{1i}-T_{1i+1}\right)=m_2\left(T_{2i+1}-T_{2i}\right)=\lambda\left(T_{1i}-T_{2i}\right)dA$$

$$\begin{cases} m_1T_{1i}=m_1T_{1i+1}+\lambda\left(T_{1i}-T_{2i}\right)dA \\ m_2T_{2i+1}+\lambda\left(T_{1i}-T_{2i}\right)dA=m_2T_{2i} \end{cases}$$

$$m_1\left(T_{1i}-T_{1i+1}\right)=m_2\left(T_{2i}-T_{2i+1}\right)=\lambda\left(T_{1i}-T_{2i}\right)dA$$

Statyczny model wymienników WW/WP (3)





$$m_1(T_{1i} - T_{1i+1}) = m_2(T_{2i+1} - T_{2i}) = \lambda\,(T_{1i} - T_{2i})dA$$

$$m_1(T_{1i} - T_{1i+1}) = m_2(T_{2i} - T_{2i+1}) = \lambda\,(T_{1i} - T_{2i})dA$$

1) Różnica temperatur ΔT_i wzdłuż powierzchni wymiany A

Nowe oznaczenia:

$\Delta T_i = T_{1i} - T_{2i}$ (różnica temperatur w i-tym przekroju) $\Delta T_i = T_{1i} - T_{2i}$

$dT_1 = T_{1i+1} - T_{1i}$ (zmiana na odc.dA) $dT_1 = T_{1i+1} - T_{1i}$

Po podstawieniu oznaczeń:

$$\begin{cases} -m_1\,dT_1 = \lambda\,\Delta T_i\,dA \\ m_2\,dT_2 = \lambda\,\Delta T_i\,dA \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dT_1 = \dfrac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{-m_1} \\ dT_2 = \dfrac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{m_2} \end{cases} \quad (*1)$$

$$\begin{cases} \lambda\,\Delta T_i\,dA = -m_1\,dT_1 \\ \lambda\,\Delta T_i\,dA = -m_2\,dT_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dT_1 = \dfrac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{-m_1} \\ dT_2 = \dfrac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{-m_2} \end{cases} \quad (*1)$$

Zmiana różnicy temperatur na odcinku dA, czyli: $d(\Delta T_i) = \Delta T_{i+1} - \Delta T_i = (T_{1i+1} - T_{2i+1}) - (T_{1i} - T_{2i}) = dT_1 - dT_2$

$$d(\Delta T_i) = \frac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{-m_1} - \frac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{m_2} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\lambda\,\Delta T_i\,dA$$

$$\frac{d(\Delta T_i)}{\Delta T_i} = -m\lambda\,dA \quad \text{, gdzie:} \quad m = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$d(\Delta T_i) = \frac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{-m_1} - \frac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{-m_2} = -\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)\lambda\,\Delta T_i\,dA$$

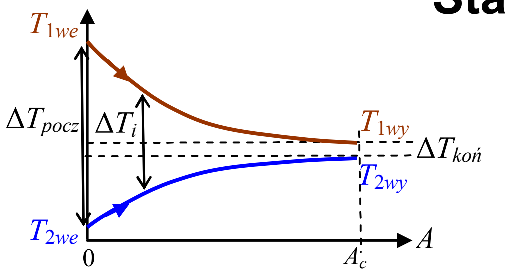
$$\frac{d(\Delta T_i)}{\Delta T_i} = -m\lambda\,dA \quad \text{, gdzie:} \quad m = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}$$

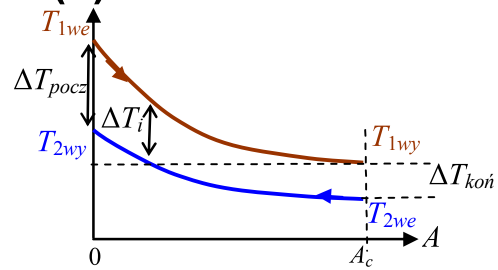
$$\int_{\Delta T_{pocz}}^{\Delta T_i} \frac{d(\Delta T_i)}{\Delta T_i} = \int_0^A -m\lambda\,dA \longrightarrow \int_{\Delta T_{pocz}}^{\Delta T_i} \frac{1}{\Delta T_i} d(\Delta T_i) = -m\lambda \int_0^A dA \longrightarrow \left(\frac{\Delta T_i}{\Delta T_{pocz}}\right) = -m\lambda A \longrightarrow e^{-m\lambda A} = \frac{\Delta T_i}{\Delta T_{pocz}} \quad (*2)$$

$\Delta T_i = \Delta T_{pocz} e^{-m\lambda A}$, gdzie: $\Delta T_{pocz} = T_{1we} - T_{2we}$, $m = 1/m_1 + 1/m_2$,

$\Delta T_i = \Delta T_{pocz} e^{-m\lambda A}$, gdzie: $\Delta T_{pocz} = T_{1we} - T_{2wy}$, $m = 1/m_1$ - $1/m_2$,

Statyczny model wymienników WW/WP (4)





1) Różnica temperatur ΔT_i wzdłuż powierzchni wymiany A

$\Delta T_i = \Delta T_{pocz} e^{-m\lambda A}$, gdzie: $\Delta T_{pocz} = T_{1we} - T_{2we}$, $m = 1/m_1 + 1/m_2$,

$\Delta T_i = \Delta T_{pocz} e^{-m\lambda A}$, gdzie: $\Delta T_{pocz} = T_{1we} - T_{2wy}$, $m = 1/m_1 - 1/m_2$,

2) Różnica temperatur ΔT_i na końcu wymiennika

$$\Delta T_{koń} = \Delta T_{pocz} e^{-m\lambda A_c} = \Delta T_{pocz} e^{-mk_c}$$

$$\Delta T_{koń} = \Delta T_{pocz} e^{-m\lambda A_c} = \Delta T_{pocz} e^{-mk_c}$$

3) Średnia różnica temperatur $\Delta T_{śr}$

$$\Delta T_{śr} = \frac{1}{A_c}\int_0^{A_c} \Delta T_i \, dA = \frac{1}{A_c}\int_0^{A_c} \Delta T_{pocz} e^{-m\lambda A} dA = \frac{\Delta T_{pocz}}{A_c}\int_0^{A_c} e^{-m\lambda A} dA = \frac{\Delta T_{pocz}}{A_c}\left[\frac{1}{-m\lambda} e^{-m\lambda A}\right]_0^{A_c} = \frac{\Delta T_{pocz}}{-m\lambda A_c}\left(e^{-m\lambda A_c} - 1\right)$$

$\boxed{\Delta T_{śr} = \frac{1 - e^{-mk_c}}{mk_c} \Delta T_{pocz}}$, a po podstawieniu (*2), czyli: $e^{-m\lambda A} = \frac{\Delta T_i}{\Delta T_{pocz}}$, mamy: $\boxed{\Delta T_{śr} = \frac{\Delta T_{koń} - \Delta T_{pocz}}{\ln\left(\Delta T_{koń} / \Delta T_{pocz}\right)}}$

dobór wymienników

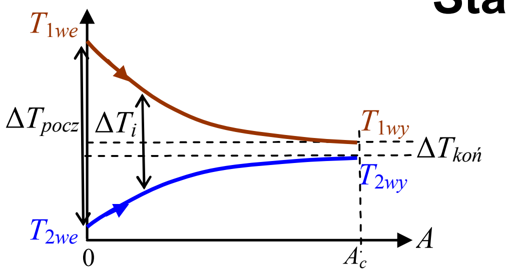
$$\boxed{m_1 \left(T_{1we} - T_{1wy}\right) = m_2 \left(T_{2wy} - T_{2we}\right) = k_c \, \Delta T_{śr}}$$

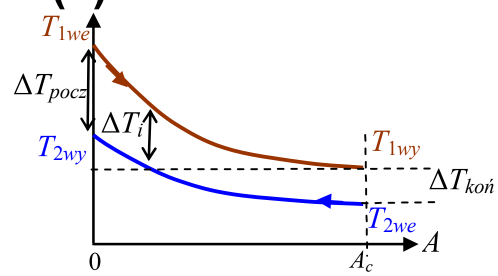
WW: $\Delta T_{pocz} = T_{1we} - T_{2we}$,
$\Delta T_{koń} = T_{1wy} - T_{2wy}$,
$m = 1/m_1 + 1/m_2$,

WP: $\Delta T_{pocz} = T_{1we} - T_{2wy}$,
$\Delta T_{koń} = T_{1wy} - T_{2we}$,
$m = 1/m_1 - 1/m_2$,

4) Temperatury nośników wypływających z wymiennika T_{1wy}, T_{2wy}?

Statyczny model wymienników WW/WP (5)





5) Rozkład temperatur T_{1i}, T_{2i} wzdłuż powierzchni wymiany A

Na podstawie (*1 i 2):

$$dT_1 = \frac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{-m_1} \quad\longrightarrow\quad dT_1 = \frac{\lambda}{-m_1}\Delta T_{pocz}e^{-m\lambda A}dA \quad\longrightarrow\quad \int_{T_{1we}}^{T_{1i}} dT_1 = \frac{\lambda}{-m_1}\Delta T_{pocz}\int_0^A e^{-m\lambda A}dA \quad\longrightarrow$$

$$dT_2 = \frac{\lambda\,\Delta T_i\,dA}{m_2} \qquad\qquad dT_2 = \frac{\lambda}{m_2}\Delta T_{pocz}e^{-m\lambda A}dA \qquad\qquad \int_{T_{2we}}^{T_{2i}} dT_2 = \frac{\lambda}{m_2}\Delta T_{pocz}\int_0^A e^{-m\lambda A}dA$$

$$T_{1i} = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_1 m}\left(e^{-m\lambda A} - 1\right) + T_{1we}$$
$$T_{2i} = \frac{\Delta T_{pocz}}{-m_2 m}\left(e^{-m\lambda A} - 1\right) + T_{2we} \qquad (*3)$$

$$T_{1wy} = T_{1i}(A_c)$$
$$T_{2wy} = T_{2i}(A_c)$$

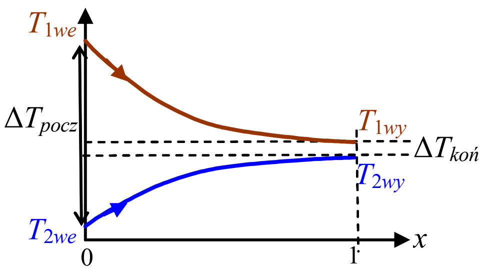
WW: $\boldsymbol{\Delta T_{pocz}} = T_{1we} - T_{2we}$,
$\Delta T_{koń} = T_{1wy} - T_{2wy}$,
$m = 1/m_1 + 1/m_2$,

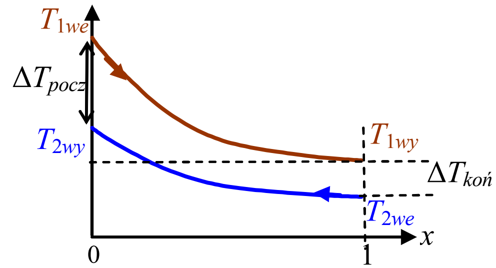
$$T_{1i} = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_1 m}\left(e^{-m\lambda A} - 1\right) + T_{1we}$$
$$T_{2i} = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_2 m}\left(e^{-m\lambda A} - 1\right) + T_{2wy} \qquad (*3)$$

$$T_{1wy} = T_{1i}(A_c)$$
$$T_{2wy} = T_{2i}(A_c)$$

WP: $\boldsymbol{\Delta T_{pocz}} = T_{1we} - T_{2wy}$,
$\Delta T_{koń} = T_{1wy} - T_{2we}$,
$m = 1/m_1 - 1/m_2$,

Statyczny model wymienników WW/WP (6)





WW: $\boldsymbol{\Delta T_{pocz}} = T_{1we} - T_{2we}$,
$\Delta T_{koń} = T_{1wy} - T_{2wy}$,
$m = 1/m_1 + 1/m_2$,

WP: $\boldsymbol{\Delta T_{pocz}} = T_{1we} - T_{2wy}$,
$\Delta T_{koń} = T_{1wy} - T_{2we}$,
$m = 1/m_1 - 1/m_2$,

$$m_1\left(T_{1we} - T_{1wy}\right) = m_2\left(T_{2wy} - T_{2we}\right) = k_c\,\Delta T_{śr}$$

$$\Delta T_{śr} = \frac{1 - e^{-mk_c}}{mk_c}\Delta T_{pocz} \qquad \left(\frac{\Delta T_{koń} - \Delta T_{pocz}}{\ln\left(\Delta T_{koń} / \Delta T_{pocz}\right)}\right)$$

Bilans mikro dla WW:

$$\begin{cases} C_{v1}dx\dfrac{dT_{1i}}{dt} = m_1\left(T_{1i} - T_{1i+1}\right) - k_c dx\left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ C_{v2}dx\dfrac{dT_{2i}}{dt} = k_c dx\left(T_{1i} - T_{2i}\right) - m_2\left(T_{2i+1} - T_{2i}\right) \end{cases}$$

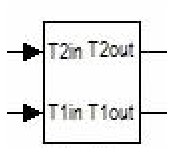
Bilans mikro dla WP:

$$\begin{cases} C_{v1}dx\dfrac{dT_{1i}}{dt} = m_1\left(T_{1i} - T_{1i+1}\right) - k_c dx\left(T_{1i} - T_{2i}\right) \\ C_{v2}dx\dfrac{dT_{2i}}{dt} = k_c dx\left(T_{1i} - T_{2i}\right) - m_2\left(T_{2i} - T_{2i+1}\right) \end{cases}$$

Bilans makro:

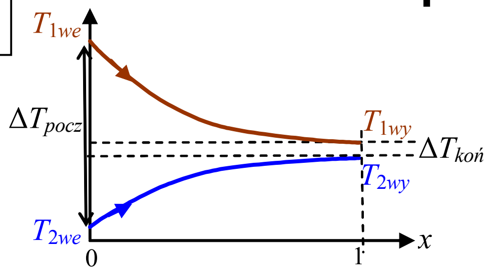
$$\begin{cases} C_1\dot{T}_{1wy} = m_1\left(T_{1we} - T_{1wy}\right) - k_c\,\Delta T_{śr} \\ C_2\dot{T}_{2wy} = k_c\,\Delta T_{śr} - m_2\left(T_{2wy} - T_{2we}\right) \end{cases}$$

$$\Delta T_{śr} = T_{wy1} - T_{wy2}$$

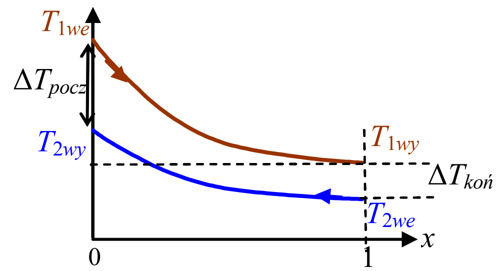


Odpowiedzi skokowe wymienników WW/WP

WW



WP



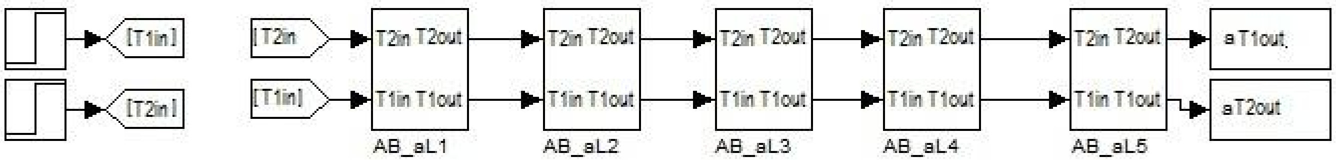
$$\begin{cases} \dfrac{dT_1(t,x)}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}}\dfrac{dT_1(t,x)}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}}\left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \\ \dfrac{dT_2(t,x)}{dt} = \dfrac{-m_2}{C_{v2}}\dfrac{dT_2(t,x)}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}}\left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT_1(t,x)}{dt} = \dfrac{-m_1}{C_{v1}}\dfrac{dT_1(t,x)}{dx} - \dfrac{k_c}{C_{v1}}\left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \\ \dfrac{dT_2(t,x)}{dt} = \dfrac{m_2}{C_{v2}}\dfrac{dT_2(t,x)}{dx} + \dfrac{k_c}{C_{v2}}\left(T_1(t,x) - T_2(t,x)\right) \end{cases}$$

Warunki brzegowe – rozkład temperatur wzdłuż wymiennika (stan ustalony) – wg *3

$$T_1(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_1 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{1we}$$
$$T_2(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{-m_2 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{2we}$$

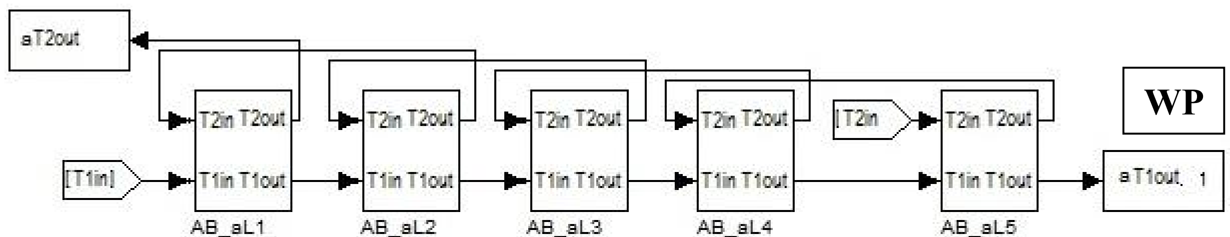
$$T_1(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_1 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{1we}$$
$$T_2(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_2 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{2wy}$$



WW

Gdzie w.początkowe w blokach:

$$T_1(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_1 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{1we}$$
$$T_2(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{-m_2 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{2we}$$



WP

$$T_1(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_1 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{1we}$$
$$T_2(x) = \frac{\Delta T_{pocz}}{m_2 m}\left(e^{-mk_c x} - 1\right) + T_{2wy}$$