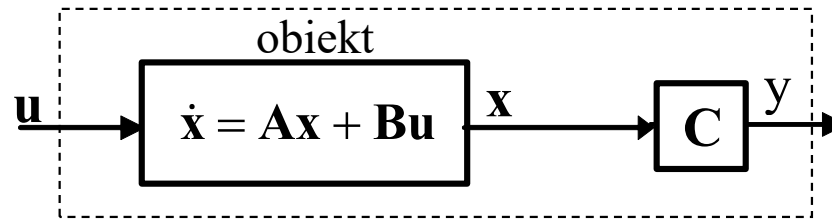


Sterowanie w przestrzeni stanów

(Sterowanie wielowymiarowe)

state-space control design (modern control design)



A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

B. Dostępna część zmiennych stanu

I. Lokowanie biegunów

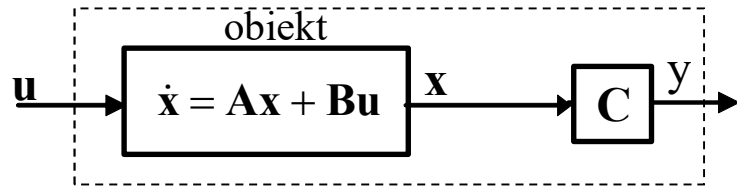
II. Regulator liniowo-kwadratowy (LQR- Linear-quadratic regulator)

A. Dostępne wszystkie zmienne stanu

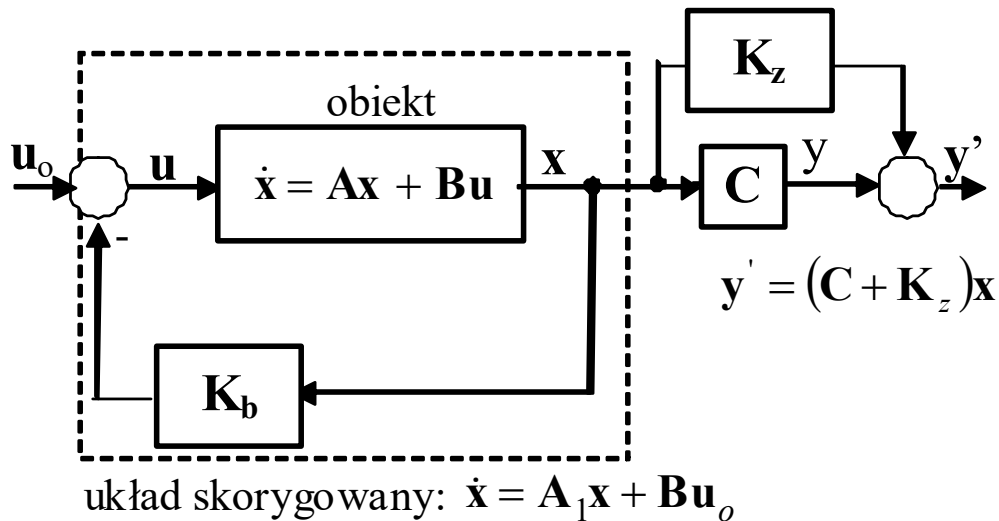
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} s\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Bu}$$



I.A. Dostępne wszystkie zmienne stanu x obiektu



bieguny układu zamkniętego

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b \mathbf{x} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{Bu} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b \mathbf{x} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(\mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_b)\mathbf{x} + \mathbf{Bu}_o \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Bu} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b \mathbf{x} \end{array} \right.$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{Bu}_o$$

$$\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{u}_o - \mathbf{K}_b \mathbf{x})$$

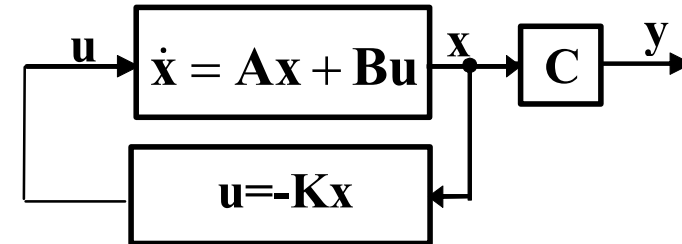
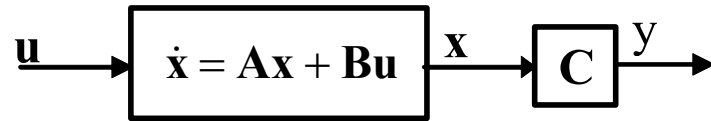
$$\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Bu}_o - (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{BK}_b \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{BK}_b \mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Bu}_o$$

$$\left(1 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{BK}_b\right) \mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Bu}_o$$

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C} + \mathbf{K}_z) \frac{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}}{1 + \mathbf{K}_b (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}}$$

bieguny i zera układu zamkniętego

1) Opracowanie zasady sterowania (macierz K)

obiekt $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{u}$ i sterowanie $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = [K_1 \quad \dots \quad K_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

układ zamknięty $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}$

r.charakterystyczne $\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$

- obiekt n -tego rzędu (n biegunów)

- wszystkie elementy \mathbf{x} są dostępne (mierzone)
- układ zamknięty n -tego rzędu (n biegunów)

1a) Określ położenie biegunów, które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego

Założmy bieguny: $s=s_1, \dots, s=s_n \rightarrow$ r.charakterystyczne: $(s-s_1)\dots(s-s_n)=0$

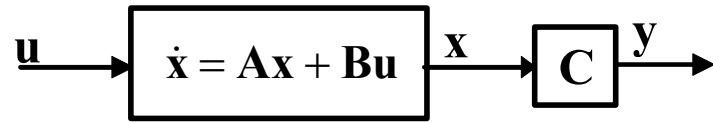
(lokowanie biegunów)

1b) Opracuj zasadę sterowania (macierz sprzężeń)

Wyznacz elementy macierzy \mathbf{K} tak aby oba równania charakterystyczne były takie same

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0 \quad (s-s_1)\dots(s-s_n)=0$$

Przykład 1.

wahadło o pulsacji ω_0 i tłumieniu $\zeta=0$

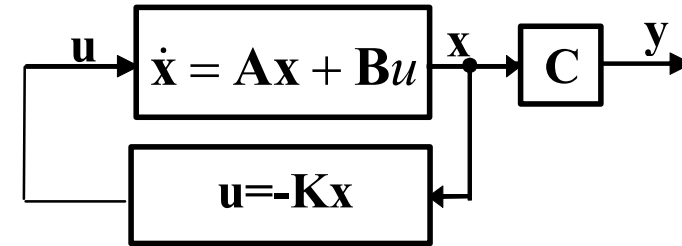
$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = u$$

$$x = x_1 = x$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



układ zamknięty $\dot{x} = Ax - BKx$
 r.charakterystyczne $\det(sI - (A - BK)) = 0$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] \right) \right\}$$

$$s^2 + K_2 s + \omega_0^2 + K_1 = 0$$

1a) Bieguny układu zamkniętego (lokowanie biegunów) - podwójny biegun o wartości $-2\omega_0$ r.charakterystyczne: $(s + 2\omega_0)^2 = 0$

$$s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2 = 0$$

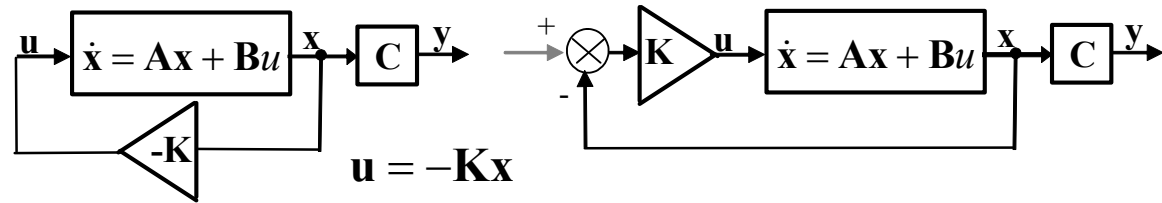
1b) Zasada sterowania (macierz sprzężeń)

$$K_2 = 4\omega_0$$

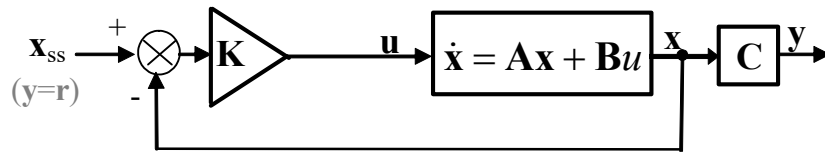
$$\omega_0^2 + K_1 = 4\omega_0^2$$

$$\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2] = [3\omega_0^2 \quad 4\omega_0]$$

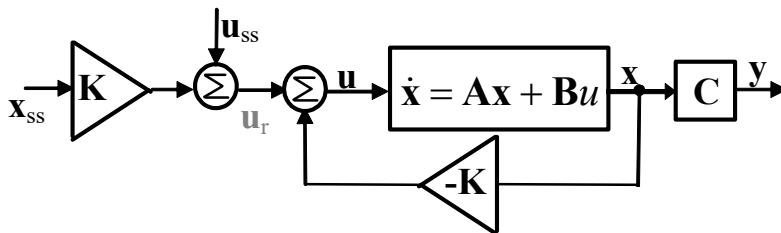
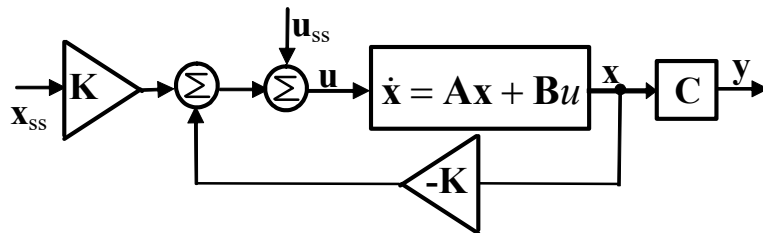
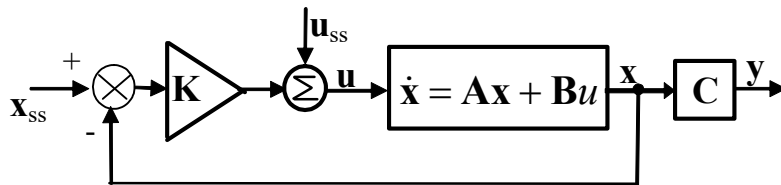
- 1) Opracowanie zasady sterowania
 - a) bieguny układu zamkniętego
 - b) zasada sterowania



- 2) Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)



niezerowy uchyb e_{ss}



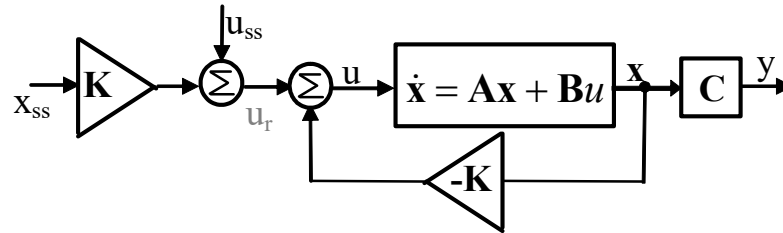
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss})$$

gdy $e_{ss} = 0$ ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$) to $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{ss} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{ss}$$

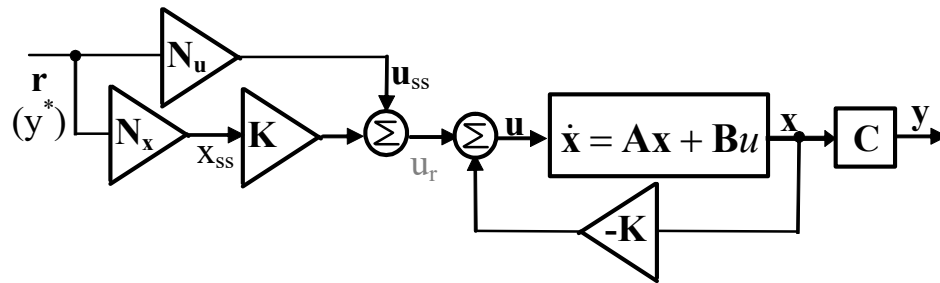
$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{u}_r$$

2) Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss})$$

gdy $\mathbf{e}_{ss} = 0$ ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$) to $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{ss}$$

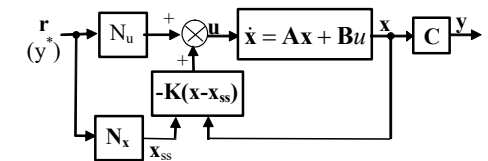
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\mathbf{N}_u \mathbf{r} \quad \mathbf{N}_x \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{N}_x \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + (\mathbf{N}_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x) \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{r}$$



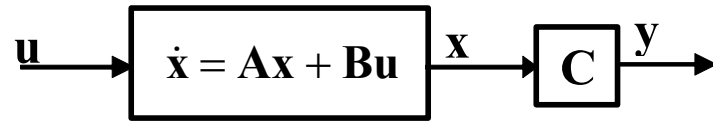
(\mathbf{N} - jak przeliczyć w zadane \mathbf{r} na wartości wektora \mathbf{x}_{ss} i \mathbf{u}_{ss})

W stanie ustalonym, gdy $\mathbf{e}_{ss} = 0$: $\mathbf{y} = \mathbf{r}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss}$,

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{0} & \mathbf{x}_{ss} = \mathbf{N}_x \mathbf{r} \\ \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{y}_{ss} & \mathbf{u}_{ss} = \mathbf{N}_u \mathbf{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{N}_x + \mathbf{B}\mathbf{N}_u = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{N}_x + \mathbf{D}\mathbf{N}_u = \mathbf{1} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\mathbf{N} = \mathbf{N}_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x}$$

Przykład 1(cd.)



wahadło o pulsacji ω_0 i tłumieniu $\zeta=0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

1a) Biegony układu zamkniętego (lokowanie biegunów) - podwójny biegun $= -2\omega_0$

1b) Zasada sterowania (macierz sprzężeń): $\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2] = [3\omega_0^2 \quad 4\omega_0]$

2) Wprowadzenie wejścia odniesienia (wartość zadana)

Na wyjściu obserwujemy zmienną $y=x_1$

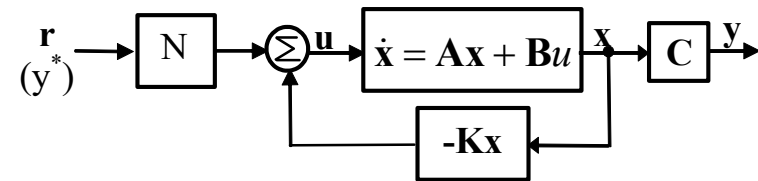
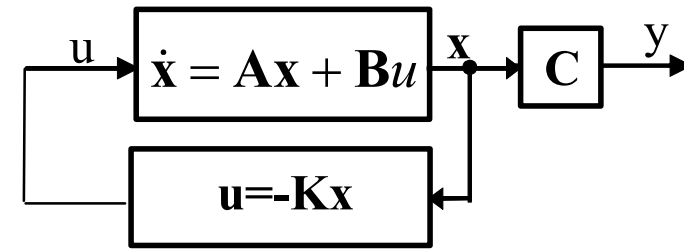
$$[y_1] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

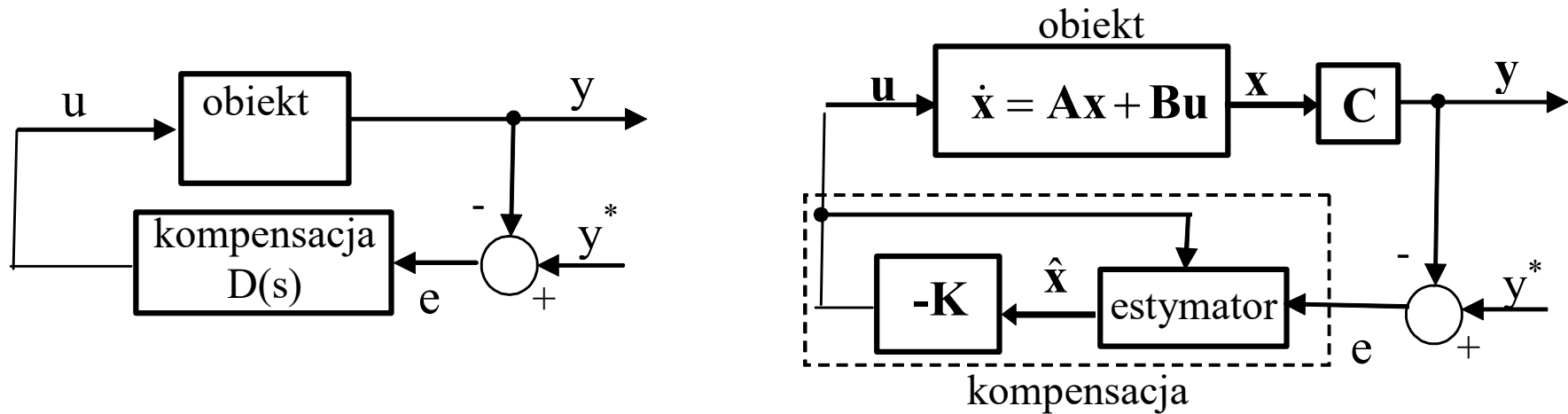
Zmienna y powinna osiągnąć w.zadana r

Obliczenie macierzy do przeskalowania w.zadanej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & | & 1 \\ \hline 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Dla } \omega_0=1} \mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_u = 1$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_u + \mathbf{K}\mathbf{N}_x = 4$$



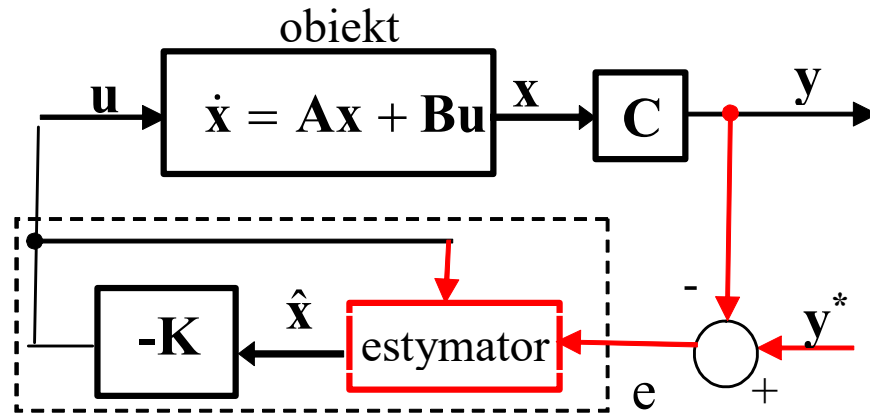


Cztery niezależne etapy:

- Etap 1:** Określenie położenie biegunów i opracowanie zasady sterowania, które zapewnią zakładane własności układu zamkniętego
- Etap 2:** Opracowanie estymatora (gdy nie wszystkie x są dostępne)
- Etap 3:** Połączenie zasady sterowania i estymatora
- Etap 4:** Wprowadzenie wejścia odniesienia

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \rightarrow \text{oznaczenia wg [Franklin]} \quad \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{u}$$

Obserwator (estymator)



1° Konstrukcja estymatora (\hat{x}) na podstawie modelu obiektu

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu, \text{ gdzie macierze } A, B \text{ i wejścia } u \text{ są znane}$$

- Odtwarzamy estymaty w układzie otwartym
- Jednak nie znamy poprawnych w.początkowych $x(0)$

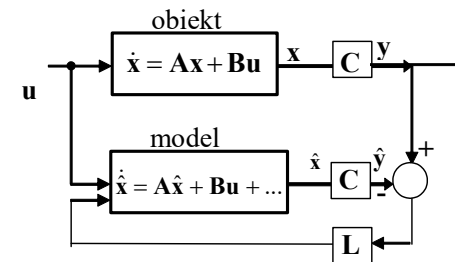
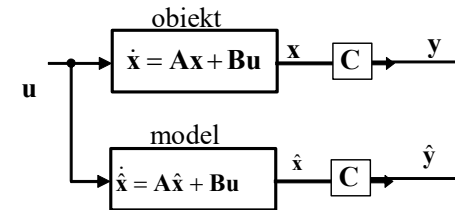
Niedokładne oszacowanie $x(0)$ -> błąd oszacowania stale rośnie lub zbyt wolno zanika (nie mamy wpływu na szybkość tego zanikania)

Rozwiązanie problemu – użyć sprzężenia zwrotnego

2° jw. + sprzężenie zwrotne (obserwator Luenbergera)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

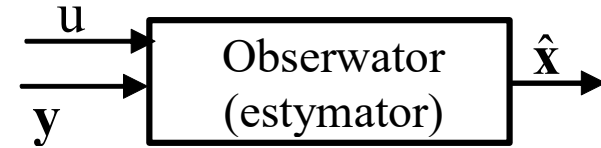
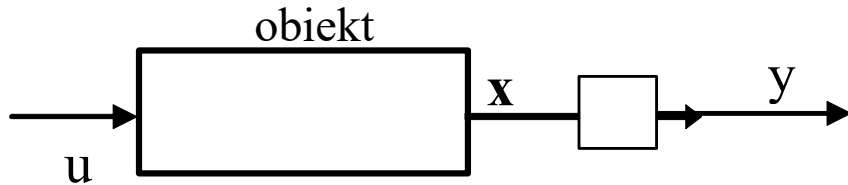
gdzie $L = [l_1, \dots, l_n]^T$ wektor współczynników



Obserwator (estymator) stanu – model, który na podstawie pomiaru we (u) i wy (y) dostarcza estymaty (\hat{x}) wewnętrznego stanu układu (x)

Obserwator (estymator) - obserwator Luenbergera

Wersja dyskretna



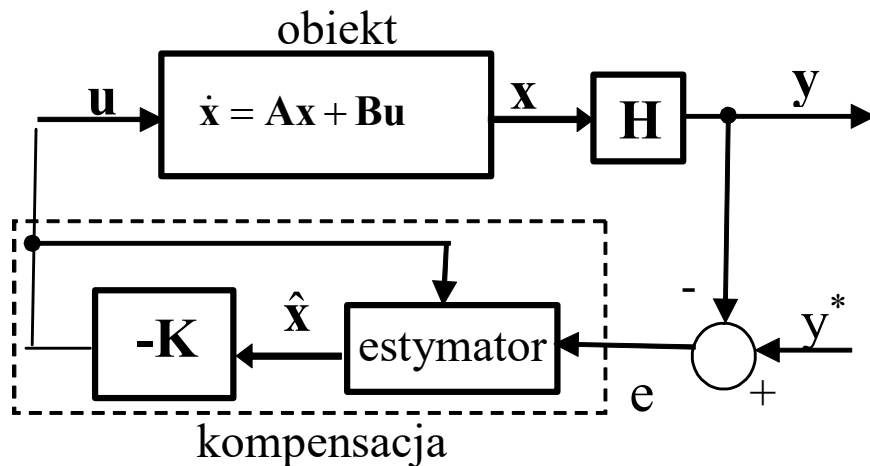
Typowy estymator

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Obserwator Luenbergera

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + L|\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)| + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Część korekcyjna L (poprawa zbieżność)
 L - macierz wzmocnienia błędu zbieżności.



$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + L|\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)| + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

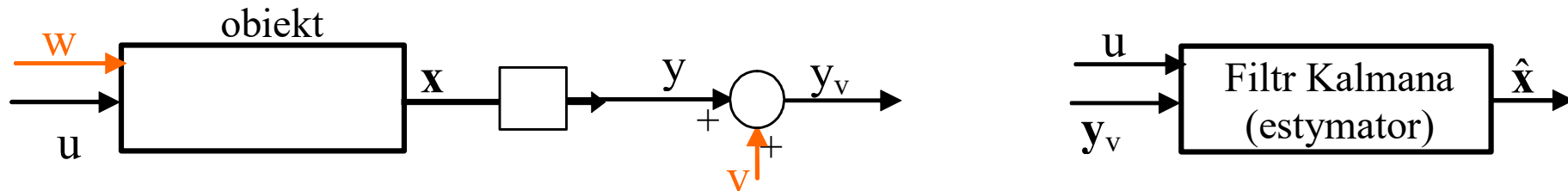
$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + L|\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)| + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

Obserwator (estymator) - filtr Kalmana

3° Rekurencyjne wyznaczanie estymaty (filtr Kalmana)

Odtworzenie zmiennych stanu w warunkach występowania zakłóceń

Założenie: pomiar i proces przetwarzania obarczone błędem o rozkładzie gaussowskim



$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{G}\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}_v = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}\mathbf{w}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases}$$

Macierze kowariancji zakłóceń:

$$E(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) = \mathbf{Q}_n \quad \mathbf{Q}_n - \text{miara poziomu zakłóceń działających na obiekt} \\ \text{(miara niepewności obiektu)}$$

$$E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \mathbf{R}_n \quad \mathbf{R}_n - \text{miara poziomu zakłóceń działających na czujniki pomiarowe}$$

$$E(\mathbf{w}\mathbf{v}^T) = \mathbf{N}_n$$

Dla zadanych macierzy kowariancji zakłóceń (\mathbf{Q}_n , \mathbf{R}_n , \mathbf{N}_n)

filtr Kalmana minimalizuje kowariancję błędów estymacji w stanie ustalonym

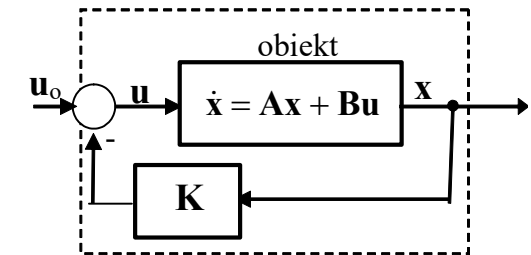
$$\lim_{t \rightarrow \infty} E((x - \hat{x})(x - \hat{x})^T) \\ \text{(estymator optymalny)}$$

LQR

Regulator liniowo-kwadratowy (LQR - Linear-Quadratic-Regulator)

1. Model układu: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$

2. Cel - minimalizowanie funkcji kosztów J:



Minimalizowana funkcja kosztów (miara jakości) ma postać funkcjonału kwadratowego:

ze skończonym horyzontem czasowym	z nieskończonym horyzontem czasowym
$J = x^T(t_1)F(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt.$	$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$

gdzie: Q i R - macierze wag (parametry funkcji kosztów podane przez inżyniera)

3. Opracowanie zasady sterowania - sterowanie minimalizujące koszt: $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$

- macierz sterowań \mathbf{K} jest dana równaniem:

$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)$	$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}.$
P(t) wynika z rozwiązania równania różniczkowego Riccatiego	
$\mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} = -\dot{\mathbf{P}}(t)$	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$
z warunkiem brzegowym $\mathbf{P}(t_1) = \mathbf{F}(t_1)$	

Algorytm LQR - zautomatyzowana metoda znajdowania nastaw, które minimalizują funkcję kosztów.

Zaleta: zautomatyzowana metoda doboru nastaw - zapewnia stabilność i optymalność

Wada: wymaga podania wag i sprawdzenia efektów (iteracyjnie)

(alternatywna metoda lokalizacji biegunów bardziej intuicyjnie pokazuje związek z własnościami dynamiki układu regulacji)

LQR Wersja dyskretna

1. Model układu: $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$

2. Cel - minimalizowanie funkcji kosztów J:

Minimalizowana funkcja kosztów:

ze skończonym horyzontem czasowym	z nieskończonym horyzontem czasowym
$J = \sum_{k=0}^N (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$	$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$
w notacji zwyczajowej zapisywana jako	
$J = \sum_{k=0}^N (\ \mathbf{x}_k\ _Q^2 + \ \mathbf{u}_k\ _R^2)$	

gdzie: $\|\mathbf{x}_k\|_Q^2 = x_k^T Q x_k$ $\|\mathbf{u}_k\|_R^2 = u_k^T R u_k$

3. Opracowanie zasady sterowania – sekwencja sterująca minimalizująca koszt: $\mathbf{u}_k = -\mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1}$
gdzie:

$F_k = (R + B^T P_k B)^{-1} B^T P_k A,$	$F = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$
P(t) można znaleźć poprzez iterację wstecz w czasie z wykorzystaniem dynamicznego równania Riccatiego	
$P_{k-1} = Q + A^T (P_k - P_k B (R + B^T P_k B)^{-1} B^T P_k) A$	$P = Q + A^T (P - P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P) A$
z warunkiem początkowym $P_N = Q$	

LQR

LQR a lokowanie biegunów - przykład

Najprostsza wersja LQR

1. Minimalizowany system:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ z = \mathbf{C}_1\mathbf{x} \end{cases}$$

2. Funkcja kosztów postaci:

$$J = \int_0^{\infty} [\rho z^2(t) + u^2(t)] dt$$

gdzie ρ współczynnik wagowy wybierany przez projektanta3. Opracowanie zasady sterowania – sterowanie minimalizujące koszt: $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ Optymalne rozwiązanie = macierz sterowań \mathbf{K} , która zapewnia

symetryczne położenie pierwiastków równania:

(SRL – Symmetric Root Locus)

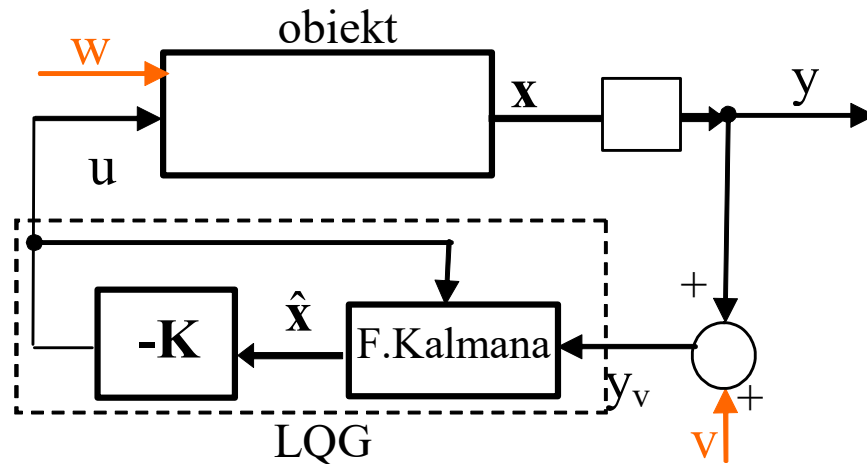
$$1 + \rho G_o(-s)G_o(s) = 0$$

gdzie G_o to transmitancja układu otwartego: $G_o(s) = \frac{z(s)}{u(s)} = \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{L(s)}{M(s)}$

cd [Franklin/475n]

LQG

Regulator liniowo-kwadratowy-Gausa (LQG - Linear-Quadratic-Gaussian)



w – biały szum działający na wejściu obiektu
 v – biały szum działający na wyjściu procesu

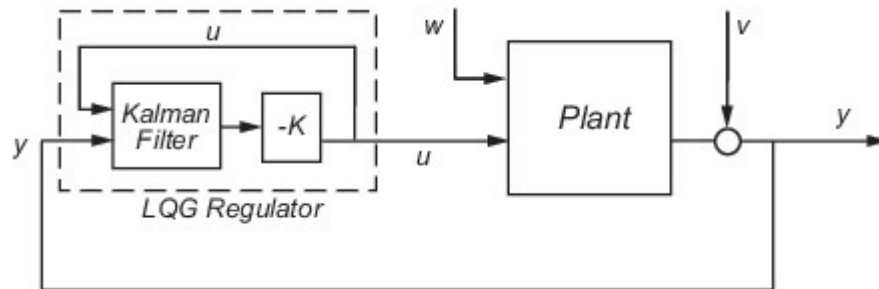
LQG dotyczy:

- systemów liniowych
- działających w warunkach niepewności, narażonych na zakłócenia addytywnym białym szumem Gaussa,
- posiadających niekompletne informacje o stanie (nie wszystkie zmiennne stanu są dostępne)
- poddanych optymalizacji z wykorzystaniem kwadratowej funkcji kosztów:
 - najczęściej suma pomierzonych odchyłek od wartości zadanych (minimalizacja niepożądanych odchyłek pomiarów)
 - czasami też wielkości związane z działaniem sterującym - minimalizacja zużytej energii

LQG = Filtr Kalmana + Regulator liniowo-kwadratowy (LQR)

LQG

Przykład (Matlab)



- w – zakłócenia działające na obiekt (Plant)
- u – sterowanie
- y – pomiar
- v – szumy pomiarowe

Równania stanu i zmiennych wyjściowych (pomiarowych):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{w}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{w} + \mathbf{v}$$

Definicja modelu za pomocą funkcji ss()

Wejścia w i v – biały szum

Funkcja kosztów

Etap 1. Opracowanie zasady sterowania – sterowanie minimalizujące koszt (LQ-optimal gain)

Etap 2. Opracowanie estymatora – konstrukcja filtru Kalmana

Etap 3. Połączenie zasady sterowania i estymatora – regulator LQG

Technika projektowania

szybka, jednoetapowa, gdy:

- optymalny regulator LQG oraz niezerowe $E(wv')$ i H
- wszystkie wejścia są sterujące,
- wszystkie wyjścia są mierzone
- stany integratora są ważone niezależnie od stanu obiektu i zmiennych sterujących

Rozwiązanie – funkcja **lqg**

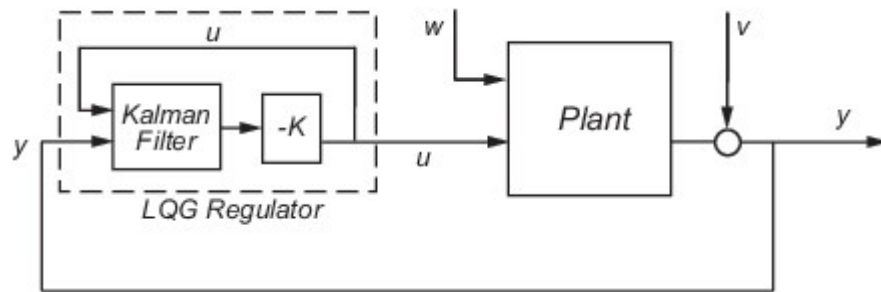
bardziej elastyczna, 3-etapowa, gdy:

- arbitralne G i H
- są wejścia, które nie są sterowaniem,
- są wyjścia, które nie są mierzone,
- elastyczny system wag dla integratora, zmiennych stanu i sterowań

Rozwiązanie – funkcje **lqr**, **kalman**, **lqgreg**

LQG

Przykład (Matlab)



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{w}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{w} + \mathbf{v}$$

- \mathbf{w} – zakłócenia działające na obiekt (Plant)
- \mathbf{u} – sterowanie
- \mathbf{y} – pomiar
- \mathbf{v} – szumy pomiarowe

Etap 1. Opracowanie zasady sterowania – sterowanie minimalizujące koszt (LQ-optimal gain)

Funkcja kosztu
$$J = \int_0^{\infty} [x^T Q x + 2x^T N u + u^T R u] dt$$

gdzie: Q, R, N – macierze wag – definiują kompromis między wydajnością regulacji (jak szybko $x(t)$ spada do zera) a „wysiłkiem” sterowania

$K = \text{lqr}(A, B, Q, R, N)$, gdzie: A, B – macierze równań stanu, Q, R, N – macierze wag

Etap 2. Opracowanie estymatora – konstrukcja filtru Kalmana

$$[\text{kest}, L, P] = \text{kalman}(\text{sys}, Q_n, R_n, N_n)$$

gdzie: $\text{sys} = \text{ss}(A, B, C, D)$

Q_n, R_n, N_n – macierze kowariancji zakłóceń (s.11)

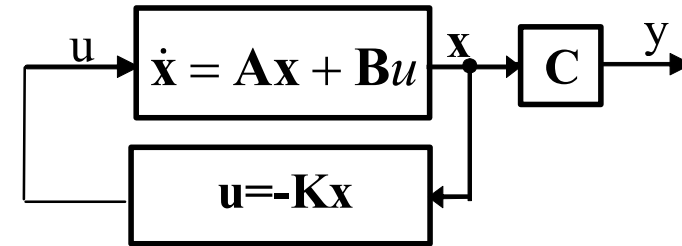
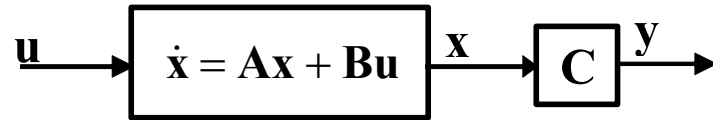
$$E(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) = \mathbf{Q}_n, \quad E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \mathbf{R}_n, \quad E(\mathbf{w}\mathbf{v}^T) = \mathbf{N}_n$$

Etap 3. Połączenie zasady sterowania i estymatora – regulator LQG

$$\text{regulator} = \text{lqgreg}(\text{kest}, K)$$

Warunek zastosowania sterowania od stanu

System musi spełniać warunek sterowalności



System jest sterowalny \Leftrightarrow rząd macierzy sterowalności \mathbf{S} jest równy rzędowi systemu n

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Przykład 1 (cd.)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Przykład 2 (niesterowalny)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Jeżeli system jest sterowalny, to stosując sprzężenie od stanu można ulokować bieguny w dowolnym miejscu na płaszczyźnie zespolonej

Warunek realizacji obserwatora (estymatora)

System musi spełniać warunek obserwowalności

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

Obserwator Luenbergera

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

gdzie $\mathbf{L}=[l_1, \dots, l_n]^T$ wektor współczynników

Błąd obserwatora $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$

Równanie błędu odtworzenia stanu $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \longrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}$

Błąd obserwatora ma dążyć do zera przy dowolnych warunkach początkowych

System jest obserwowalny \Leftrightarrow rząd macierzy obserwowalności \mathbf{O} jest równy rzędowi systemu n

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Jeżeli system jest obserwowalny, to dobierając odpowiednio macierz \mathbf{L} można ulokować wartości własne macierzy $\mathbf{A}-\mathbf{L}\mathbf{C}$ w dowolnym miejscu na płaszczyźnie zespolonej

Optymalizacja

Optymalizacja matematyczna

Optymalizacja statyczna

Poszukiwanie lokalnego/globalnego ekstremum funkcji celu

- **Programowanie liniowe**
Funkcja celu liniowa, ograniczenia liniowe
- **Programowanie nieliniowe**
Funkcja celu dowolna, ograniczenia dowolne

Optymalizacja dynamiczna

Poszukiwanie ekstremum funkcjonału
(ciągu decyzji, które zapewni ekstremum wskaźnika jakości)

- **Sterowanie optymalne**
Poszukiwanie sterowania, które zapewnia optymalizację funkcjonału kosztów
Funkcjonał kosztów = funkcja stanu i zmiennych sterujących
- **Rachunek wariacyjny**
- **Programowanie dynamiczne**
-

Metody sterowania optymalnego gwarantujące stabilność układów zamkniętych:

- sterowanie liniowo-kwadratowe-Gaussa (LQG)
- sterowanie predykcyjne (MPC) – sterowanie optymalne jest środkiem do uzyskania sterowania optymalnego (nie jest optymalizacją kryterium sterowania układu zamkniętego)
- sterowanie odporne z normą H-nieskończoność

Wyprowadzenie sterowania optymalnego na podstawie:

- zasady maksimum Pontragina
- rozwinięcia równania HJB (Hamiltona-Jacobiego-Bellmana)