Sterowanie predykcyjne

Sterowanie predykcje – sterowanie z przewidywaniem przebiegu reakcji obiektu

Układy z predykcją

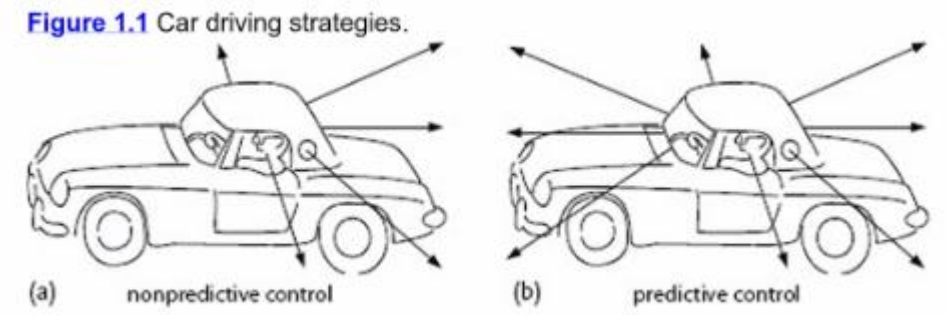
- predyktor Smitha
- predykcyjny regulator PI

Tradycyjne regulatory (PID, LQR)
dostosowują swoje działanie
w odpowiedzi na zmiany wielkości wyjściowych układu

Sterowanie predykcyjne (MPC – Model Predictive Control)

- DMC (Dynamic Matrix Control)
- QDMC (Quadratic Dynamic Matrix Control)
- GPC (Generalized Predictive Control)

Regulatory predykcyjne
dostosowują swoje działanie z wyprzedzeniem,
zanim nastąpią zmiany wielkości wyjściowych układu



Zastosowanie:
- duża liczba wielkości regulowanych i sterujących
- ograniczenia nałożone na wielkości regulowane i/lub sterujące
- zmiany celu sterowania i/lub uszkodzenia elementów pomiarowych i/lub wykonawczych
- duże opóźnienia transportowe
- obiekty niestabilne i nieminimalnofazowe (bieguny i/lub zera w prawej półpłaszczyźnie)

MPC – wiele zmiennych, nieliniowe, losowe, optymalizacja nadrzędna

[Advanced PID,Astrom/xx; Brzózka/6]

Sterowanie predykcyjne

Model-based Predictive Control

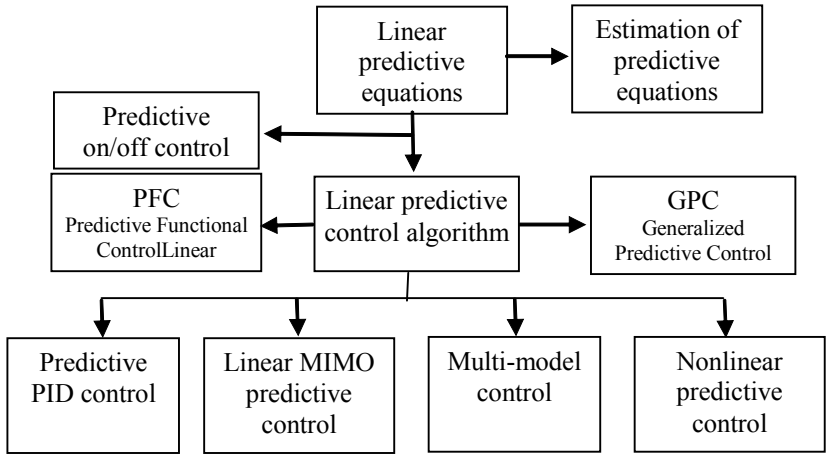


Figure 1.3 Block scheme of a nonpredictive controller.

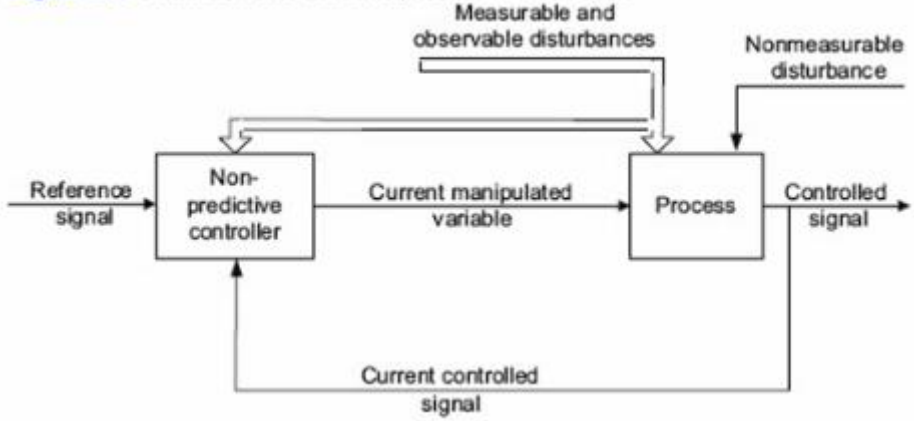
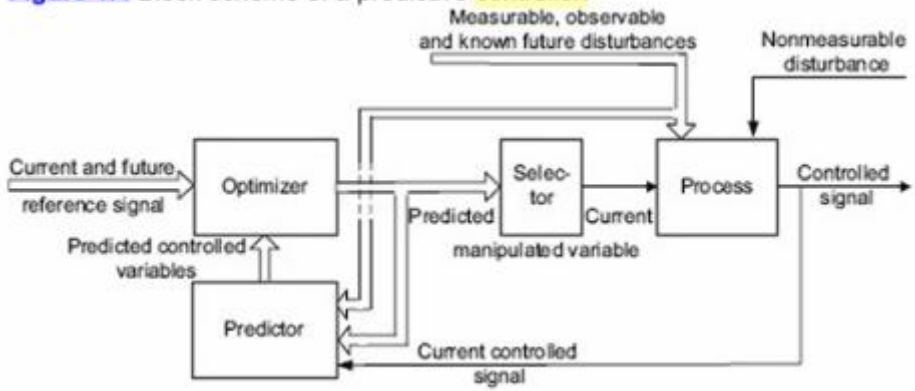


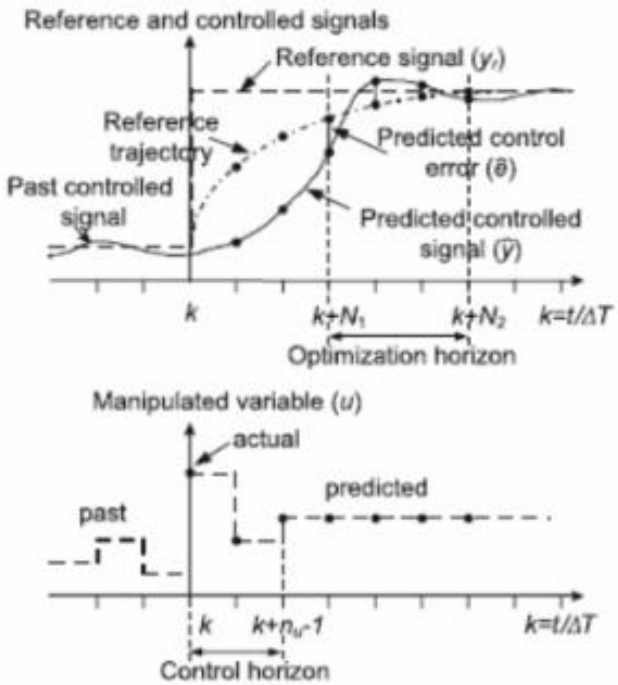
Figure 1.4 Block scheme of a predictive controller.



Lit.:Haber R.,Bars R.,Schmit U., **Predictive Control in Process Engineering: From the Basics to the Applications**
(fragmenty: https://books.google.pl/books?id=xQcrAwAAQBAJ&pg=SA6-PA25&lpg=SA6-PA25&dq=predicted+PI+controller&source=bl&ots=qlAtqWuff1&sig=0t2Umc0OinCmTUuvqAvXlgri92k&hl=pl&sa=X&ved=0ahUKEwj4nMnYwejXAhWBWBQKHZo_C1AQ6AEIYDAH#v=onepage&q=predicted%20PI%20controller&f=false)

Sterowanie predykcyjne

Idea MPC



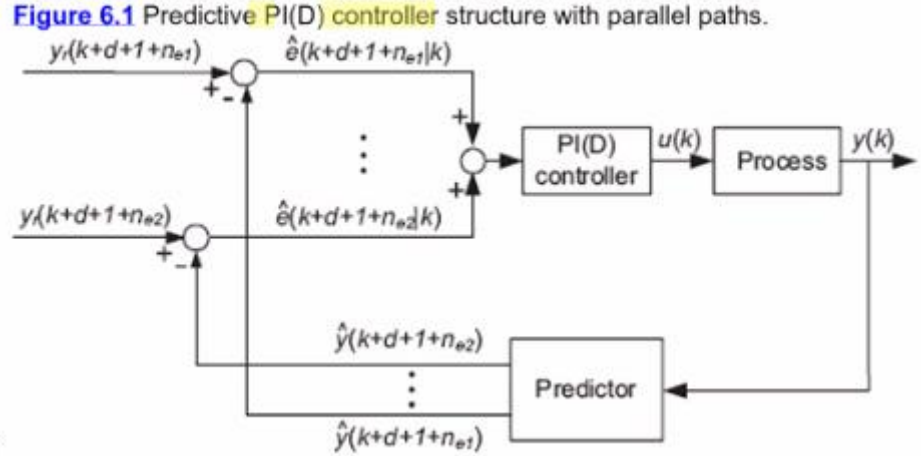
Reference signal y_r – wartość zadana *(y*)*
Reference trajektory – zadana (planowana) trajetoria
Predicted controlled signal $\hat{y}$ - przewidywane wyjście obiektu
Predicted control error $\hat{e}$ - przewidywany błąd
Manipulated variable *u* – zmienna sterująca
Optimization horizon – horyzont optymalizacji
Control horizon – horyzont sterowania
t, k – ciągły i dyskretny czas
ΔT – okres próbkowania, *d* – fizyczny czas opóźnienia

Działanie:

- zmimalizuje błąd po kilku krokach od bieżącej chwili (w okresie $k+N_1$ do $k+N_2$)
- karze przyrosty sterowania przez n_u*-1* kroków od bieżącej chwili
- uwzględnia oganiczenia zmiennej procesowej, sterującej i innych

$$J(k) = \sum_{i=N_1}^{N_2} q_i \left(y_r(k+i) - \hat{y}(k+i \mid k)\right)^2 + \sum_{i=1}^{N_u} r_i \left(\Delta u(k+i-1)\right)^2$$

Predykcyjny regulator PID (struktura)



- PID działa na przewidywanej wartości błędu ($\hat{e}$)
- przewidywany błąd liczony jako $\hat{e} = y_r - \hat{y}$
  - y_r - przewidywana wartość zadana (planowana trajektoria)
  - $\hat{y}$ – przewidywane wyjście (w horyzoncie predykcji)
- ilość równoległych „ścieżek” od n_{e1} do n_{e2}
  - n_{e1} - pierwszy punkt horyzontu predykcji
  - n_{e2} - ostatni punkt horyzontu predykcji
- wyznaczane wartości

$$y_r(k+d+1+n_e \mid k)$$
$$\hat{y}(k+d+1+n_e \mid k)$$
$$\hat{e}(k+d+1+n_e \mid k)$$

przewidywana na chwilę $k+d+1+n_e$ (n_{e1})
wyznaczana w chwili *k*

Lit.:Haber R.,Bars R.,Schmit U., **Predictive Control in Process Engineering: From the Basics to the Applications**

Predykcyjny regulator PID (algorytm)

6.2 Predictive PI Control Algorithm

The form of a nonpredictive discrete-time proportional plus integral (PI) controller is

$$u(k) = k_{cp}e(k) + k_{ci}\sum_{i=1}^{k} e(i)\,, \tag{6.1}$$

where e denotes the error signal and k_{cp} and k_{ci} are the coefficients of the proportional and the integrating components of the controller. Taking the difference on both sides of (6.1) at steps k and $k-1$ leads to

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) = k_{cp}\left[e(k) - e(k-1)\right] + k_{ci}e(k)\\ &= p_0 e(k) + p_1 e(k-1)\,,\end{aligned} \tag{6.2}$$

where

$$\begin{aligned} p_0 &= k_{cp} + k_{ci}\,; & p_1 &= -k_{cp}\,,\\ k_{cp} &= -p_1\,; & k_{ci} &= p_0 + p_1\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

In predictive PI control the manipulated variable is the sum of the controller outputs based on the predicted control errors with different prediction horizons. Applying the algorithm to a future error signal $d + 1 + n_e$ step ahead of the current time point, one obtains the corresponding control increment as

$$\Delta u_{n_e}(k) = p_0\hat{e}(k + d + 2 + n_e|k) + p_1\hat{e}(k + d + 1 + n_e|k)\,. \tag{6.4}$$

Let us introduce the following vector notation:

$$\mathbf{k}_{PI} = [p_1, p_0]^T\,, \tag{6.5}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{PI}(k + d + 1 + n_e|k) = \left[\hat{e}(k + d + 1 + n_e|k), \hat{e}(k + d + 2 + n_e|k)\right]^T\,. \tag{6.6}$$

With this notation (6.4) can be written in the following form:

$$\Delta u_{n_e}(k) = \mathbf{k}_{PI}^T\hat{\mathbf{e}}_{PI}(k + d + 1 + n_e|k)\,. \tag{6.7}$$

6.2.1 One-Step-Ahead Predictive PI Control

A special case of predictive control is extended horizon (one-step-ahead) predictive control, where $n_e = n_{e1} = n_{e2}$. The future error signal is estimated as the difference between the future reference signal and the predicted output signal. The output prediction at a future point is obtained by the sum of the forced and the free response. Supposing only one change in the manipulated signal,

(6.8)

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= \Delta u_{n_e}(k) = \mathbf{k}_{PI}^T\hat{\mathbf{e}}_{PI}(k + d + 1 + n_e|k)\\ &= \mathbf{k}_{PI}^T\begin{bmatrix} y_r(k + d + 1 + n_e) - \hat{y}(k + d + 1 + n_e|k)\\ y_r(k + d + 2 + n_e) - \hat{y}(k + d + 2 + n_e|k)\end{bmatrix}\\ &= \mathbf{k}_{PI}^T\begin{bmatrix} y_r(k + d + 1 + n_e) - h_{n_e+1}\Delta u(k) - \hat{y}_{free}(k + d + 1 + n_e|k)\\ y_r(k + d + 2 + n_e) - h_{n_e+2}\Delta u(k) - \hat{y}_{free}(k + d + 2 + n_e|k)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Introducing the notation

$$\mathbf{h}_{PI,n_e} = \left[h_{n_e+1}, h_{n_e+2}\right]^T \tag{6.9a}$$

containing points of the step response, and

$$\mathbf{y}_{rPI,n_e}(k + d + 1 + n_e) = [y_r(k + d + 1 + n_e), y_r(k + d + 2 + n_e)]^T \tag{6.9b}$$

and

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{y}}_{freePI,n_e}(k + d + 1 + n_e|k)\\ &= \left[\hat{y}_{free}(k + d + 1 + n_e|k), \hat{y}_{free}(k + d + 2 + n_e|k)\right]^T,\end{aligned} \tag{6.9c}$$

one can write (6.8) as

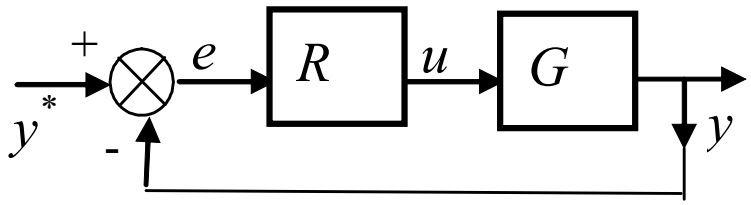
$$\Delta u(k) = \mathbf{k}_{PI}^T\left[\mathbf{y}_{rPI,n_e} - \mathbf{h}_{PI,n_e}\Delta u(k) - \hat{\mathbf{y}}_{freePI,n_e}\right] \tag{6.10}$$

and $\Delta u(k)$ is expressed as

$$\Delta u(k) = \left[1 + \mathbf{k}_{PI}^T\mathbf{h}_{PI,n_e}\right]^{-1}\mathbf{k}_{PI}^T\left(\mathbf{y}_{rPI,n_e} - \hat{\mathbf{y}}_{freePI,n_e}\right). \tag{6.11}$$

Lit.:Haber R.,Bars R.,Schmit U., **Predictive Control in Process Engineering: From the Basics to the Applications**

Układy z predykcją - predykcyjny regulator PI **(pPI)**



$$\frac{Y}{Y^*} = G_z = \frac{RG}{1+RG}$$

$$R = \frac{u}{e} = \frac{1}{G}\frac{G_z}{1-G_z}$$

$$R = \frac{1}{k}\frac{1+sT}{1+saT-e^{-sT_o}}$$

Obiekt $$G = \frac{y}{u} = \frac{k}{1+sT}e^{-sT_o}$$

Zakładana G układu $$G_z = \frac{y}{y^*} = \frac{k}{1+saT}e^{-sT_o}$$

gdzie *a* – nastawiany parametr
(gdy *a*<1, to ukł.regulacji szybszy od obiektu)

$$u = \frac{1}{k}\frac{1+sT}{1+saT-e^{-sT_o}}e$$

$$u = \frac{1}{ak}\left(1+\frac{1}{sT}\right)\left(e - \frac{k}{1+sT}(1-e^{-sT_o})u\right)$$

PI

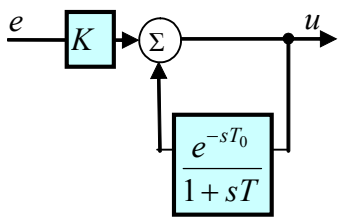
$$\frac{k}{1+sT}u - \frac{k}{1+sT}e^{-sT_o}u$$

$$y = Gu$$

predykcja wyjścia w chwili *t*
na podstawie sterownia w w czasie *(t-T,t)*

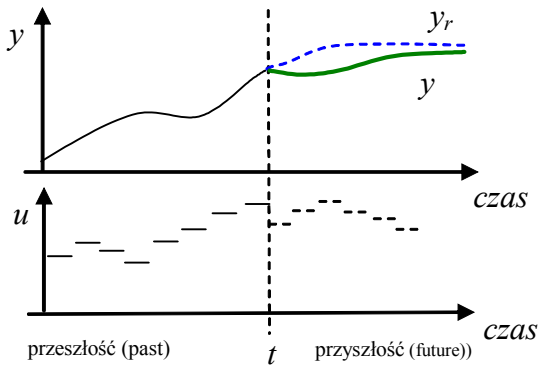
Dla *a*=1, $T_i = T$

$$u = Ke + \frac{e^{-sT_o}}{1+sT}u$$



Sterowanie predykcyjne MPC

(sterowanie z przesuwanym horyzontem - receding horizon control (RHC))



1) Model obiektu (na podstawie przeszłości)

$$y(t) + a_1 y(t-h) + \ldots + a_n y(t-nh) = b_1 u(t-h) + b_2 u(t-2h) + \ldots + b_n u(t-nh)$$

2) Sytuacja w chwili *t*

- opis przeszłości $Y_p = \left(y(t), y(t-h), \ldots, u(t-h) + b_2 u(t-2h), \ldots\right)$
- przewidywana przyszłość – obliczenie wyjścia obiektu na podstawie:
  - modelu
  - aktualnego i przyszłego sterowania $U_f = \left(u(t), u(t+h), \ldots, u(t+Nh)\right)$

3) Wyznaczenie przyszłego sterowania U_f, tak aby uzyskać zadany przebieg y_r

- minimalizacja funkcji kary (na horyzoncie predykcji N)

$$J\left(u(t), u(t+h), \ldots, u(t+Nh)\right) = \sum_{k=1}^{N} e(t+kh)^2 + \rho\left(\Delta u(t+(k-1)h)\right)^2$$

gdzie:

$e(t)=y(t)-y_r(t)$ - kara za odchylenie od zadanej trajektorii y_r

$\Delta u(t)=u(t) - u(t-h)$ – przyrosty sterowania

4) Aplikacja sterowania *u(t)* – początkowy fragment U_f w przedziale czasu $[t, t+h]$

$$u(t) = F\left(y(t), y(t-h), \ldots, u(t-h) + b_2 u(t-2h), \ldots\right)$$

- sterowanie zależy od wejść i wyjść z przeszłości
- funkcja F zależy od rozwiąznia zadania optymalizacyjnego

Sterowanie predykcyjne MPC

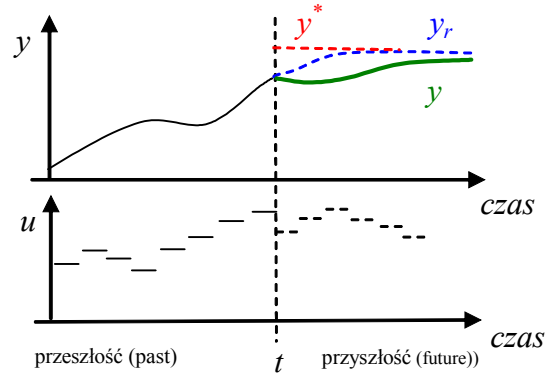
(sterowanie z przesuwanym horyzontem - receding horizon control (RHC))

1) Model obiektu 1rzędu

$$\Delta y(t+h) = -a\Delta y(t) + b\Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = y(t) - y(t-h)$$

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-h)$$



2) Zadany przebieg $y_r(t)$ dochodzenia do y^*

- staruje w punkcie $y(t)$
- osiąga wartość zadaną (y^*) w sposób eksponencjalny ze stałą czasową T

$$y_r(t+h) = y(t) + \left(1 - e^{-h/T}\right)\left(y^* - y(t)\right)$$

3) Przewidywanie wyjście w następnym kroku $y(t+h)$

- wartość w następnym kroku
- zastosowanie modelu
- zrównanie $y(t+h)=y_r(t+h)$

  i nie ma kar za przyrost sterowania

$$y(t+h) = y(t) + \Delta y(t+h)$$

$$y(t+h) = y(t) - a\Delta y(t) + b\Delta u(t)$$

$$y(t) - a\Delta y(t) + b\Delta u(t) = y(t) + \left(1 - e^{-h/T}\right)\left(y^* - y(t)\right)$$

$$b\Delta u(t) = \left(1 - e^{-h/T}\right)\left(y^* - y(t)\right) + a\Delta y(t)$$

4) Wyznaczenie sterowania u

- przyrost sterowania

$$\Delta u(t) = \frac{a}{b}\Delta y(t) + \frac{1 - e^{-h/T}}{b}\left(y^* - y(t)\right)$$

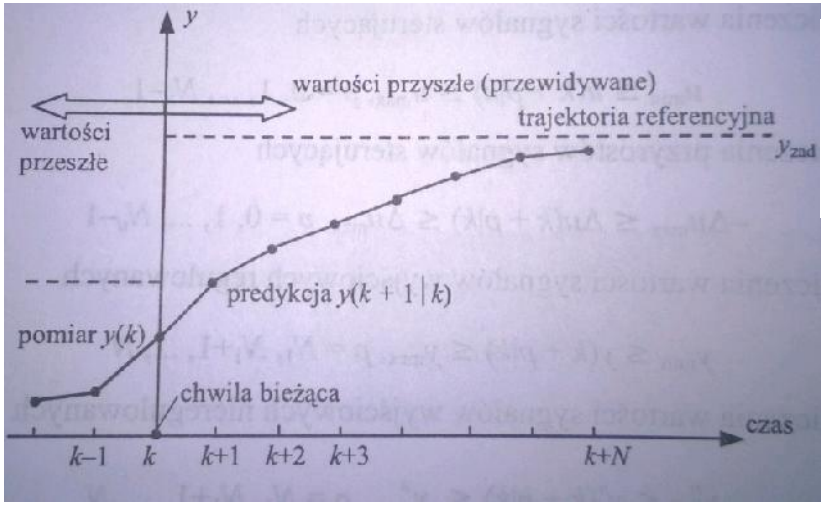
regulator PI: $\Delta u(t) = k\Delta y(t) + k_i\left(y^* - y(t)\right)$

$$k = \frac{a}{b} \qquad k_i = \frac{1 - e^{-h/T}}{b}$$

Sterowanie predykcyjne MPC

(sterowanie z przesuwanym horyzontem - receding horizon control (RHC))

Idea: regulator dostosowuje swoje działanie z wyprzedzeniem, zanim nastąpią zmiany wielkości wyjściowych układu



Etapy:
- pomiar
- predykcja wartości na podstawie modelu (lin/nielin)
- cykliczne rozwiązywanie zadania sterowania optymalnego

W każdej kolejnej chwili:

1) pomiar sygnałów wyjściowych (wartości regulowanych) w bieżącej chwili k: wektor $\boldsymbol{y(k)}$

2) predykcja (przewidywanie)
   - obliczenie przyszłych wyjść obiektu (wartości regulowanych): $\boldsymbol{y(k+p\,|k)}$
     - przyszłe wartości w chwili $k+p$ są wyznaczane na podstawie **modelu** i wartości w chwili k
     - **horyzont predykcji** $\boldsymbol{N}$ (p= 1, 2, ..., N)
   - wartości zadane wyjść (trajektoria referencyjna): $\boldsymbol{y_{zad}(k+p|k)}$
     - trajektoria referencyjna może być zmieniana na horyzoncie predykcji (na rysunku był skok y_{zad})
   - obliczenie różnic wartości zadanych i predykownych: $\boldsymbol{y_{zad}(k+p|k) - y(k+p\,|k)}$

3) obliczenie wartości sterujących w chwili bieżącej i następnych
   - zakłada się, że po upływie **horyzontu sterowania** $\boldsymbol{N_u}$ (zwykle $N_u<N$) przyrost sygnału sterującego =0 (własności całkujące)
   - **rozwiązanie problemu optymalizacyjnego** – wyznaczenie sterowania optymalnego
     - minimalizacja **funkcji celu** $J(k)$ - kryterium jakości regulacji na horyzoncie predykcji
     - liczone od chwili $k+N_1$ do końca horyzontu predykcji N

4) przesunięcie horyzontu czasowego (i krok 1)

Sterowanie predykcyjne MPC

(sterowanie z przesuwanym horyzontem - receding horizon control (RHC))

Funkcja celu *J(k)*

$$J(k) = \sum_{p=N_1}^{N} \left(\mathbf{y}_{zad}(k+p \mid k) - \mathbf{y}(k+p \mid k)\right)^T \mathbf{Q}(p) \left(\mathbf{y}_{zad}(k+p \mid k) - \mathbf{y}(k+p \mid k)\right) + \sum_{p=0}^{N_u-1} \Delta\mathbf{u}(k+p \mid k)^T \mathbf{R}(p) \Delta\mathbf{u}(k+p \mid k)$$

$\mathbf{y}_{zad}$(k+p|k) – wektor wartości zadanych (wymiar n_y),
$\mathbf{y}$(k+p|k) – wektor wielkości regulowanych (wymiar n_y),
$\mathbf{Q}$(p)≥0 – macierz współczynników wagowych składowych wektora uchybów predykowanych na chwilę $k+p$ (zwykle diagonalna, może być jednostkowa)
N – horyzont predykcji
N_1 – chwila od której obliczana jest funkcja J ($1 \le N_1 \le N$)

$\Delta\mathbf{u}$(k+p|k) - wektor przyrostów sterowań (o wymiarze n_u),
$\mathbf{R}$(p)≥0 – macierz współczynników wagowych składowych wektora sterowania predykowanych na chwilę $k+p$
N_u – horyzont strojenia

Zwykle $\mathbf{R}(p)=\lambda\mathbf{I}$, gdzie λ to współczynnik kary, który określa wagę tłumienia zmienności sterowania w stosunku do redukcji uchybów regulacji).

Parametry MPC:
- długość horyzontu predykcji *(N)* – zależy od dynamiki obiektu
- długość horyzontu strojenia (N_u) – większe $N_u \rightarrow$ więcej zmiennych decyzyjnych (dłuższe obliczenia)
- wagi *Q, R* – im większe *Q* w stosunku do *R*, tym wolniejsze sterowanie, ale lepsze wskaźniki jakości
- okres próbkowania ΔT – lepsza dynamika sterowania (), mniejsze ΔT większy wymiar optymalizacji (dłuższe obliczenia)

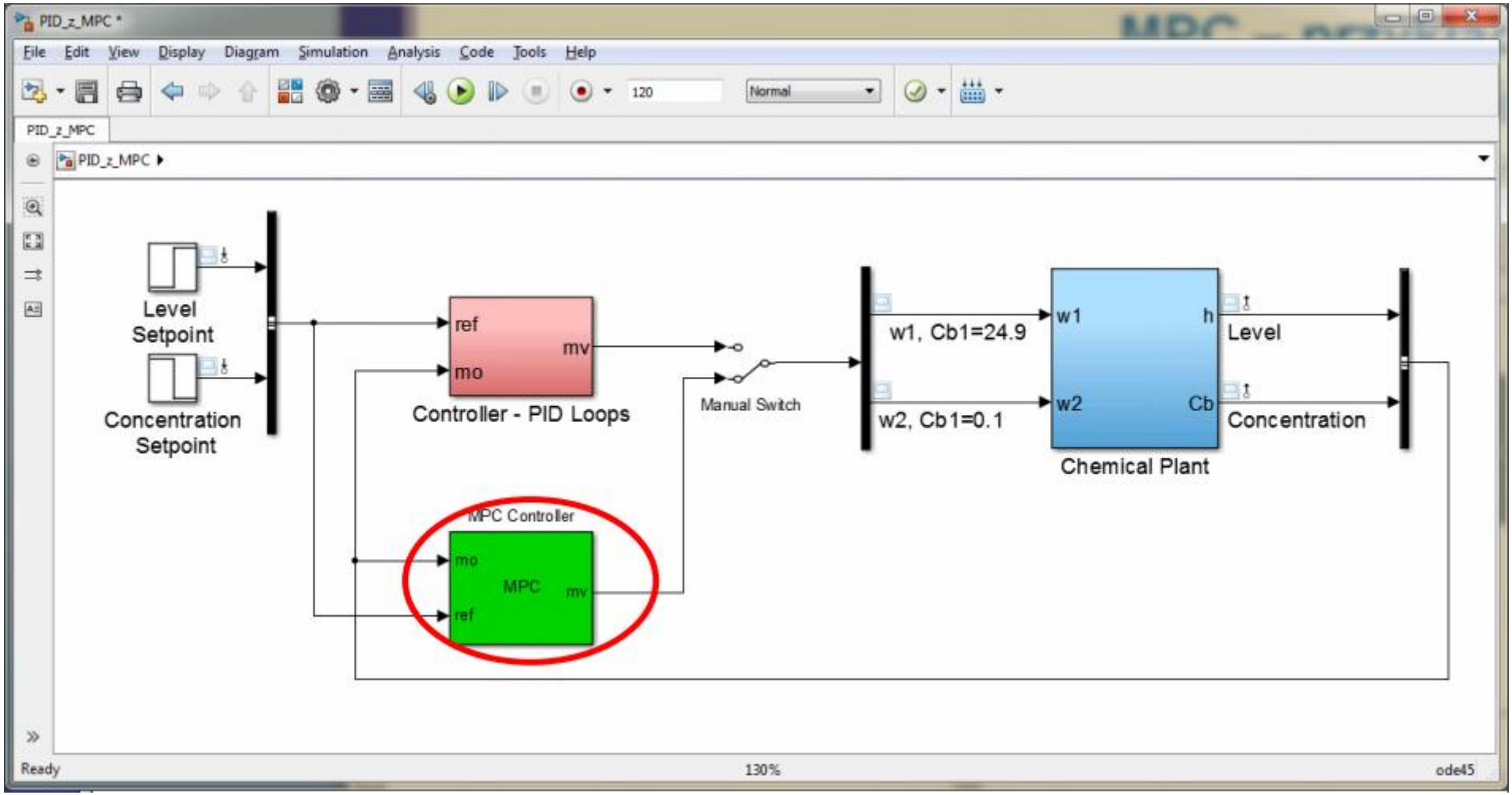
Modele do predykcji:
- liniowe - prostsza optymalizacja liniowa
- nieliniowe – trudna i czasochłonna optymalizacja nieliniowa

Generacje MPC:
- DMC (Dynamic Matrix Control) – przybliżone traktownie ograniczeń
- QDMC (Quadratic Dynamic Matrix Control) – z liniowymi ograniczeniami na sygnały pomiarowe i sterujące
- GPC (Generalized Predictive Control) – jako model obiektu transmitanja dyskretna (równania różnicowe)
- współczesne – jako model obiektu równania stanu

Krótka historia: http://docplayer.pl/798144-Komputerowe-systemy-sterowania-sterowanie-predykcyjne.html

Sterowanie predykcyjne MPC

Realizacja przykładowego problemu w Matlab/Simulink



https://eia.pg.edu.pl/documents/184139/28438497/MPC_podstawy.pdf