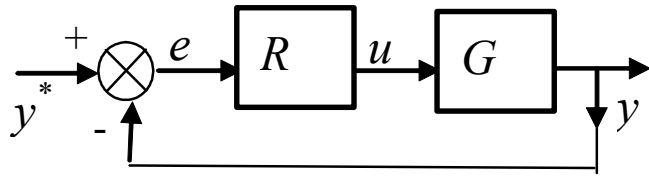


Wzory opisujące regulatory PID



$$\frac{Y}{Y^*} = G_z = \frac{RG}{1+RG} \qquad \frac{E}{Y^*} = G_e = \frac{1}{1+RG}$$

$$G_z = \frac{RG}{1+RG} = \frac{\frac{L_R L_o}{M_R M_o}}{1 + \frac{L_R L_o}{M_R M_o}} = \frac{L_R L_o}{M_R M_o + L_R L_o}$$

PID-ISA (Ideal Standard Algorithm)

$$R = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$K_p = k_p, T_i = \frac{k_p}{k_i}, T_d = \frac{k_d}{k_p}$$

$$K_p = K_p' \frac{T_i' + T_d'}{T_i'}$$

$$T_i = T_i' + T_d'$$

$$T_d = \frac{T_i' T_d'}{T_i' + T_d'}$$

Matlab: Ideal

$$R_{id} = P \left(1 + I \frac{1}{s} + D \frac{Ns}{s+N} \right)$$

PID-IND (INDependent algorithm)

$$R = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

$$k_p = K_p, k_i = \frac{K_p}{T_i}, k_d = K_p T_d$$

Matlab: Paraller

$$R_{par} = P + I \frac{1}{s} + D \frac{Ns}{s+N}$$

PID-kaskadowy (interacting)

$$K_p' \left(1 + \frac{1}{s T_i'} \right) (1 + s T_d')$$

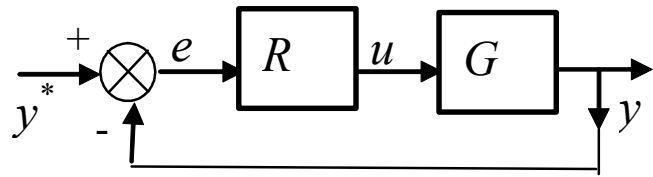
$$K_p' = \frac{K_p}{2} (1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i})$$

$$T_i' = \frac{T_i}{2} (1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i})$$

$$T_d' = \frac{T_d}{2} (1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i}) \quad , \text{ dla } T_i \geq 4T_d.$$

Patrz też: [Advanced PID, Astrom/wzór (3.7)]
np.. o ograniczeniach

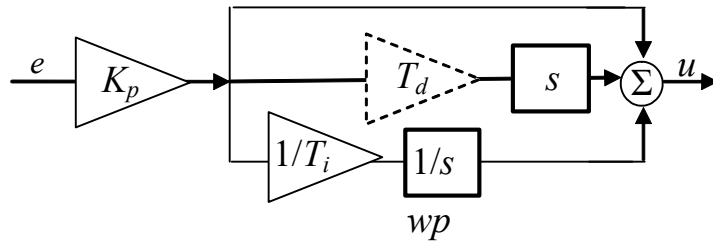
Schematy symulacyjne regulatorów PID



$$G_z = \frac{RG}{1+RG} = \frac{L_R L_o}{M_R M_o + L_R L_o}$$

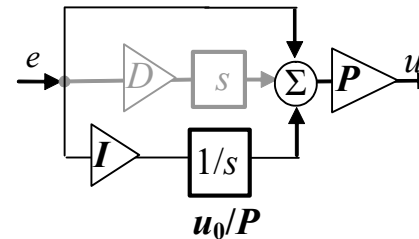
PID-ISA (Ideal Standard Algorithm)

$$R = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$



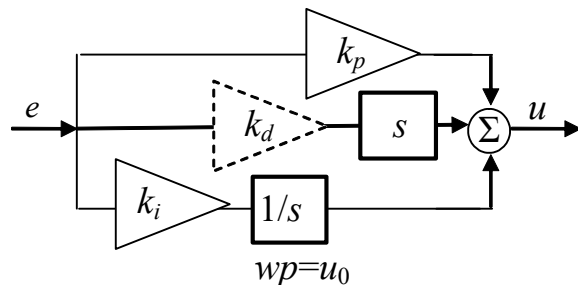
Matlab: Ideal

$$R_{id} = P \left(1 + I \frac{1}{s} + D \frac{Ns}{s+N} \right)$$



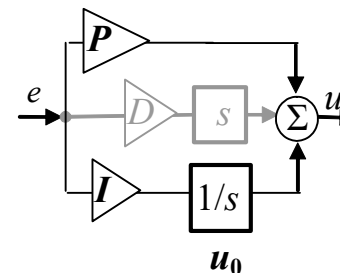
PID-IND (INDEpendent algorithm)

$$R = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$



Matlab: Paraller

$$R_{par} = P + I \frac{1}{s} + D \frac{Ns}{s+N}$$



Metody doboru nastaw PID

Metody podstawowe:
(inżynierskie)

– na podstawie odpowiedzi skokowej

- na podstawie drgań krytycznych

Metody zaawansowane:

- metody lokalizacji biegunów

- metody algebraiczne
np. metoda reduktów

- metody optymalizacyjne
(analityczne i symulacyjne)

- graphical tuning

M.podstawowe – na podstawie odpowiedzi skokowej

Zasada:

- w warunkach równowagi zadać wymuszenie skokowe na obiekt i zarejestrować reakcję
- wyznaczyć transmitancję obiektu (postać transmitancji zależy od metody projektowania UR)
- zastosować wzory do obliczenia nastaw na podstawie parametrów transmitancji obiektu

M. podstawowe – na podstawie odpowiedzi skokowej

► 1 metoda Zieglera-Nicholsa (odpowiedzi skokowej)

(Ziegler-Nichols step response)

- Identyfikacja modelu obiektu (przy rozwartej pętli)
- Obliczenie nastaw wg tabeli

Regulator	K_p	T_i	T_d
PI	$\frac{0,9T}{kT_o}$	$3,33T_o$	
PID	$\frac{1,2T}{kT_o}$	$2T_o$	$0,5T_o$

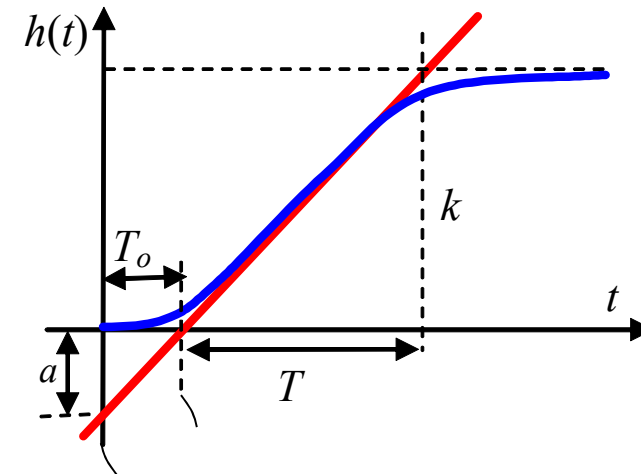
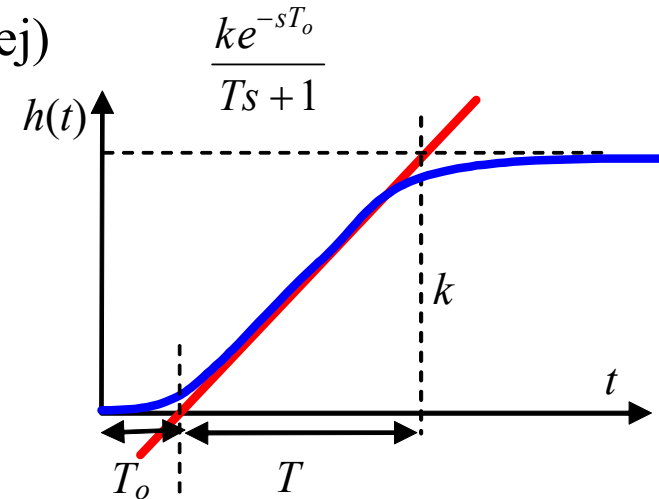
Uwagi: PID-kaskadowy
 Jeśli $T_o \approx 0$, to
 Jeśli $K < 0$, to

Patrz też: [Advanced PID, Astrom/wzór (3.7)]
 np.. o ograniczeniach

[Pid controllers; Astrom; Tab4.1]
 Więcej: [Advanced PID, Astrom; Tab6.1], w tym estymowana stała T ukl.zam

Ziegler-Nichols

	K_p	T_i	T_d
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3T_o$	
PID	$1.2/a$	$2T_o$	$T_o/2$



$$\frac{k}{T} = \frac{a}{T_o} \rightarrow a = \frac{kT_o}{T}$$

- (+) Prosty eksperyment
- (-) Identyfikacja modelu obiektu przy rozwartej pętli regulacji

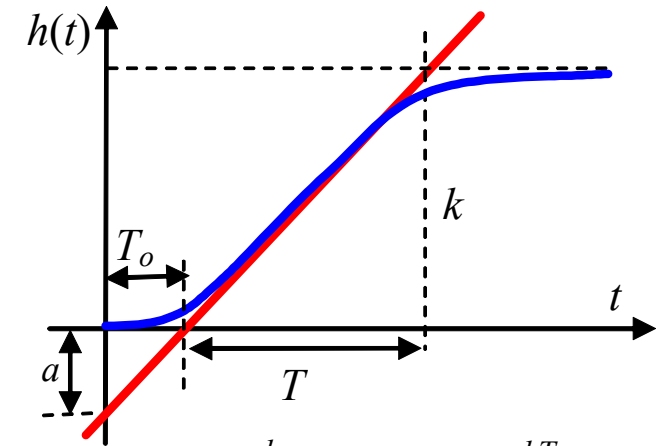
M. podstawowe – na podstawie odpowiedzi skokowej

Ziegler-Nichols [Pid controllers; Astrom; Tab4.1]

	K_p	T_i	T_d
P	$1/a$	X	X
PI	$0.9/a$	$3T_o$	X
PID	$1.2/a$	$2T_o$	$T_o/2$

Cohen - Coon [Pid controllers; Astrom; Tab4.8; Advanced PID, Astrom; str.167; Brzózka/Tab4.4]

Reg.	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a} \left(1 + \frac{0.35\tau}{1-\tau} \right)$	X	X
PI	$\frac{0.9}{a} \left(1 + \frac{0.92\tau}{1-\tau} \right)$	$\frac{3.3 - 3.0\tau}{1 + 1.2\tau} T_o$	X
PD	$\frac{1.24}{a} \left(1 + \frac{0.13\tau}{1-\tau} \right)$	X	$\frac{0.27 - 0.36\tau}{1 - 0.87\tau} T_o$
PID	$\frac{1.35}{a} \left(1 + \frac{0.18\tau}{1-\tau} \right)$	$\frac{2.5 - 3.0\tau}{1 - 0.39\tau} T_o$	$\frac{0.37 - 0.37\tau}{1 - 0.81\tau} T_o$



$$\frac{k}{T} = \frac{a}{T_o} \rightarrow a = \frac{kT_o}{T}$$

$$\tau = \frac{T_o}{T_o + T}$$

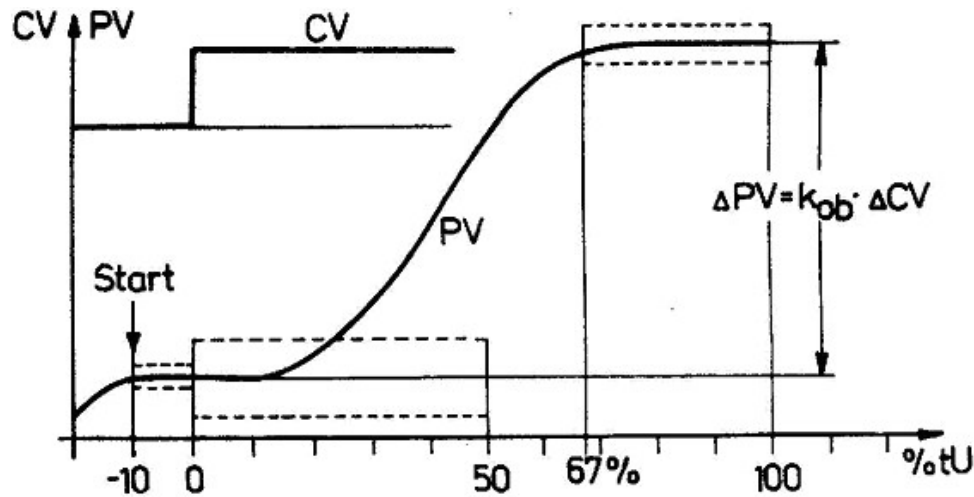
<http://blog.opticontrols.com/archives/383>

*G.H. Cohen and G.A. Coon,
Theoretical Consideration of Retarded Control,
Trans. ASME, 75, pp. 827-834, 1953

Chien, Hrones, Reswick [Pid controllers; Astrom; Tab4.4; Advanced PID, Astrom; str.166; Brzózka/Tab4.3]

Przereg.	0%			20%		
	K_p	T_i	T_d	k_p	T_i	T_d
P	$0.3/a$	X	X	$0.7/a$	X	X
PI	$0.35/a$	$1.2T$	X	$0.6/a$	T	X
PID	$0.6/a$	T	$0.5T_o$	$0.95/a$	$1.4T$	$0.47T_o$

► Auto-tuning w SIPART



1. Stałe PV przez okres 0,1 tU
2. Skok CV i zapis odpowiedzi skokowej
3. Stan ustalenie odpowiedzi
4. Obliczenie modelu Strejca $G(s)=k/(Ts+1)^n$ (dla $1 \leq n \leq 8$)
5. Obliczenie nastaw i sugestia algorytmu (PI lub PID)
6. Wybór algorytmu i akceptacja nastaw przez operatora

$$\frac{k}{(Ts + 1)^n}$$

	Kp	Ti	Td
Regulator PI $R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$	$\frac{1}{4k} \frac{n+2}{n-1}$	$\frac{T}{3}(n+2)$	
Regulator PID $R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$	$\frac{1}{46k} \frac{7n+16}{n-2}$	$\frac{T}{15}(7n+16)$	$T \frac{n^2 + 4n + 3}{7n + 16}$

Zasada:

- doprowadzić układ regulacji do niegasnących oscylacji (np. granica stabilności)
- wyznaczyć parametry niegasnących oscylacji
- zastosować wzory do obliczenia nastaw na podstawie parametrów oscylacji

► 2 metoda Zieglera-Nicholsa (metoda cyklu granicznego)

(Ziegler-Nichols frequency response)

- nastaw działanie proporcjonalne
- zwiększaj wzmacnienie, aż odpowiedź na skokowe wymuszenie to oscylacje o stałej amplitudzie
- odczytaj okres oscylacji
- nastawy wg wzorów dla różnych regulatorów

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_{pkryt}$		
PI	$0,45K_{pkryt}$	$0,85T_{osc}$	
PID	$0,6K_{pkryt}$	$0,5T_{osc}$	$0,12T_{osc}$

Advanced PID, Astrom; str.161

Dodać estymowaną $T_{ukł.zamk}$

Dodać wzory PI wg Astroma:

$$0,4K_{pkryt} \quad 0,8T_{osc}$$

Dodać porównanie 1 i 2 ZN

Advanced PID, Astrom; str.165

PID-kaskadowy

Modyfikacja Pessena: $K_p=0,2K_{pkryt}$; $T_i=0,33T_{osc}$; $T_d=0,5T_{osc}$

[Advanced PID, Astrom; str.163]

Modyfikacja Hanssena-Offereinsa (eliminacja pomiaru T_{osc}):

PI:

- ustaw tylko działanie P ($T_i=\max$)
- zwiększaj k_p do granicy stabilności;
- odczytaj $K_{pkryt} \rightarrow$ ustaw $K_p=0,45 K_{pkryt}$
- zmniejszaj T_i do granicy stabilności;
- odczytaj $T_{ikryt} \rightarrow$ ustaw $T_i=3T_{ikryt}$

PID:

- dobierz nastawy dla działania PI
- zwiększaj T_d (do T_{dmax}) do maksymalnego tłumienia
- ustaw $T_d=1/3 T_{dmax}$ oraz $T_i=4,5 T_{dmax}$
- zmniejszaj K_p do uzyskania pożądanego tłumienia

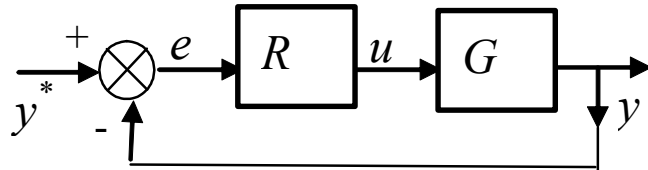
(-) Bardziej złożony eksperyment i konieczność wprowadzenia układu w stan oscylacji (granica stabilności)

Na obiekcie przemysłowym na ogół nie jest możliwe

(+) Bez rozwierania pętli regulacji

► 2 metoda Zieglera-Nicholsa (metoda cyklu granicznego) - przykłady

Przykład 1: Zastosowanie metody (udane)



$$G_z = \frac{L_R L_o}{M_R M_o + L_R L_o}$$

$$R = K_p \quad G = \frac{1}{(s+1)^3}$$

(Np. po uproszczeniu metodą uśrednienia stałej czasowej)

Z badań symulacyjnych: $K_{pkryt} = 8$, $T_{osc} = 3,64$

Wykres odp. skokowej

Potwierdzenie analityczne

$$M_R M_o + L_R L_o = (s+1)^3 + K_p = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K_p$$

Zastosowanie kryterium Hurwitza - układ stabilny gdy:

$$K_p > 0 \text{ i dodatnie podwyznaczniki wyznacznika } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1+K_p & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1+K_p \end{vmatrix} \rightarrow \begin{aligned} W_1 &= 3 > 0 \\ W_2 &= 9 - (1+K_p) > 0 \rightarrow K_p > 8 \\ W_3 &= (1+K_p)W_2 > 0 \end{aligned}$$

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\Delta_1 = a_{n-1} = a_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

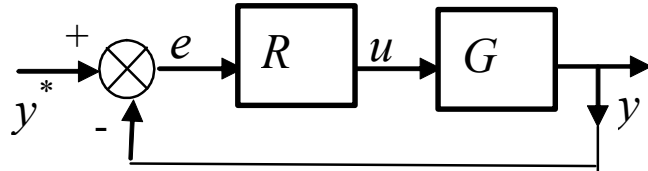
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Wniosek: $K_{pkryt} = 8$ (granica stabilności)

Czy są wówczas oscylacje – czy układ ma bieguny zespolone?

► 2 metoda Zieglera-Nicholsa (metoda cyklu granicznego) - przykłady

Przykład 2: Zastosowanie metody (zawodne)



$$G_z = \frac{L_R L_o}{M_R M_o + L_R L_o}$$

$$R = K_p \quad G = \frac{1}{(250s + 1)(3s + 1)} e^{-0,2s}$$

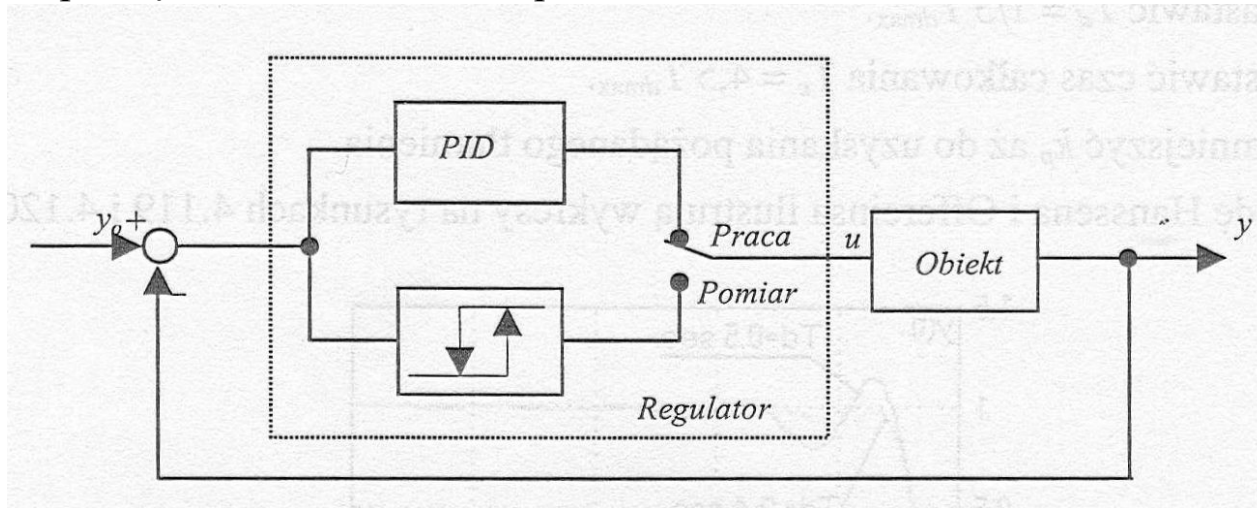
Z badań symulacyjnych: $K_{pkryt} = 1280$, $T_{osc} = 5$

Wykres odp. skokowej
PI - niestabilne, PID – stabilne (p.Halawa/r.9.1)

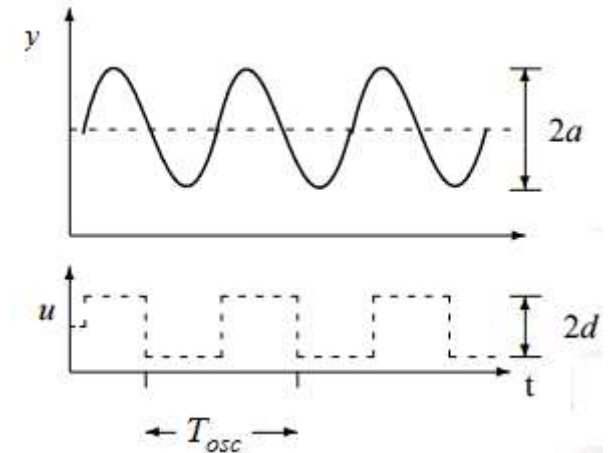
- Gdy eksperyment na obiekcie nie jest możliwy:
- identyfikacja modelu i eksperyment symulacyjny
 - modyfikacja Äströma-Hägglunda

► 2 metoda Zieglera-Nicholsa – modyfikacja Äströma-Hägglunda

- przełącz na sterowanie dwupołożeniowe



[PID controllers; Astrom; Rys.6.4]



- wyznacz amplitudę i okres oscylacji: $A_{osc} = 4d / (\pi a), T_{osc}$
- nastawy PID ZN na podstawie oscylacji i okresu wg [1] wg [2]

	K_p	T_i	T_d
oryginalne	$0.6A_{osc}$	$T_{osc}/2$	$T_{osc}/8$
małe przeregulowanie	$0.33A_{osc}$	$T_{osc}/2$	$T_{osc}/3$
bez przeregulowania	$0.2A_{osc}$	$T_{osc}/2$	$T_{osc}/3$

$$K_p = 0.35A_{osc}$$

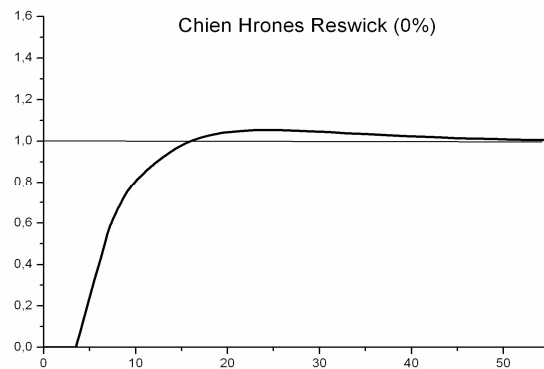
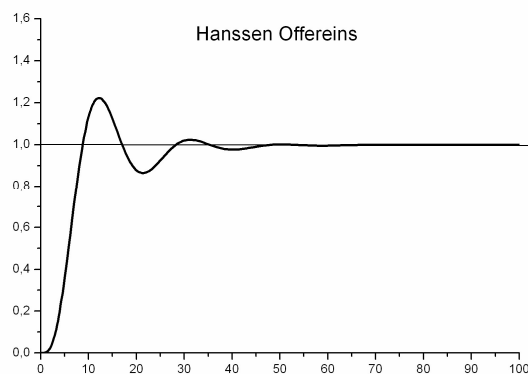
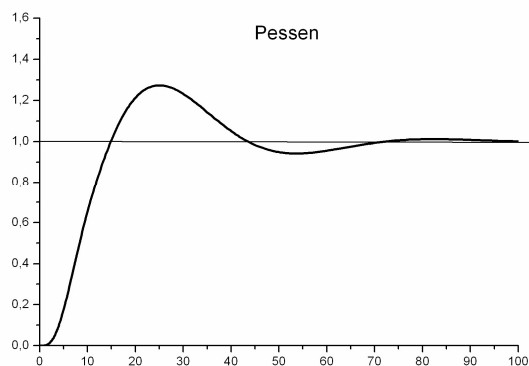
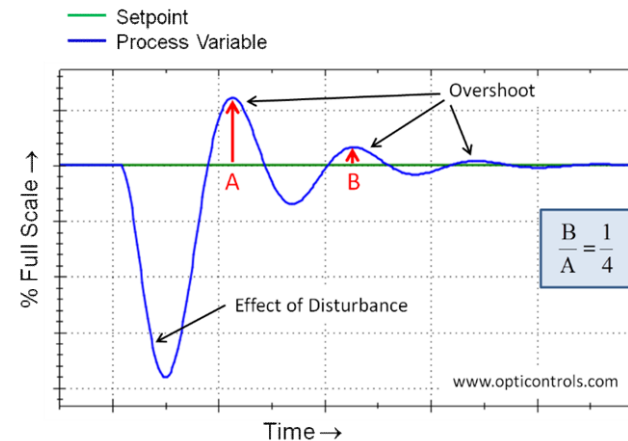
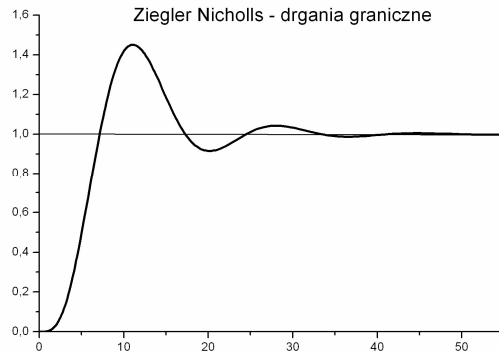
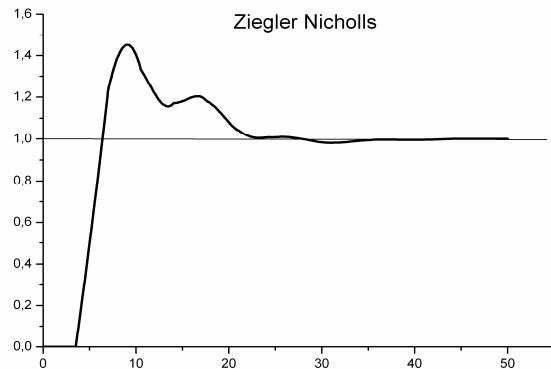
$$T_i = 0.77T_{osc}$$

$$T_d = 0.19T_{osc}$$

Karl Äström, Tore Hägglund, 1984, Institute of Technology Lund (Szwecja)

+ bez rozwierania pętli

/+ konieczność wprowadzania układu w stan oscylacji, ale łatwiejsze niż w metodzie pierwotnej



Odchylenie od wartości zadanej jest mniejsze przy każdym kolejnym cyklu w stosunku 4: 1

QAD - Quarter-amplitude damping,
(quarter amplitude decay)

QDR - Quarter-Decay Ratio

Zmniejszenie „skłonności” do oscylacji:

- problem w układach wieloobwodowych
- zastosowanie mniejszego wzmocnienia, np. $K_p/2$

SISO Design (obiekt LTI) – około ver2015

sisotool(objekt_lti)

Control System Designer - Bode Editor for LoopTransfer_C

CONTROL SYSTEM | BODE EDITOR | VIEW

Open Session | Save Session | Edit Architecture | Multimodel Configuration | **Tuning Methods** | New Plot | Store | Retrieve | Compare

FILE | ARCHITECTURE | AUTOMATED TUNING

- PID** PID Tuning
Tune PID compensator using robust response time or classical methods
- $\int z^T Q z dt$ LQG Synthesis
Obtain feedback compensator using Linear-Quadratic-Gaussian design
- IMC** Internal Model Control (IMC) Tuning
Obtain feedback compensator using IMC design

PID Tuning

Compensator

$C = 1 \times \frac{(1+s)}{s}$

Select Loop to Tune

LoopTransfer_C

Add new loop ...

Specifications

Tuning method: Robust response time

Controller Type: P I PI PD PID

Design with first order derivative filter

Design mode: Time

Response Time (seconds): 1.123

Transient Behavior: 0.6

Slower | Faster | Aggressive | Robust

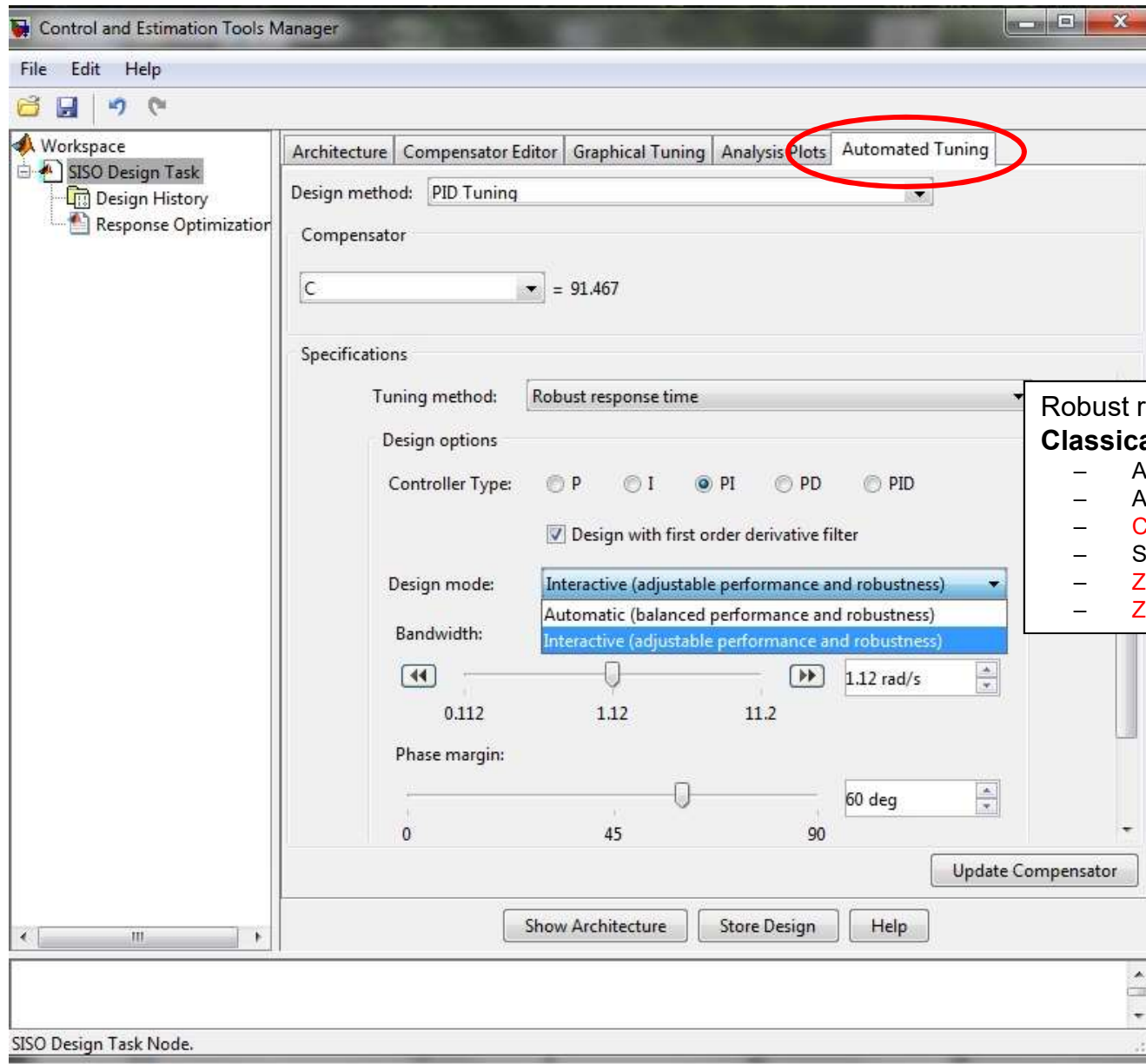
Robust response time

Classical Design Formulas:

- Approximate MIGO frequency response
- Approximate MIGO step response
- Chien-Hrones-Reswick
- Skogestad IMC
- Ziegler-Nichols frequency response
- Ziegler-Nichols step response

SISO Design (obiekt LTI) – około ver2010

sisotool(objekt_lti)



Robust response time

Classical Design Formulas:

- Approximate MIGO frequency response
- Approximate MIGO step response
- Chien-Hrones-Reswick
- Skogestad IMC
- Ziegler-Nichols frequency response
- Ziegler-Nichols step response

M.zaawansowane – na podstawie położenia biegunów

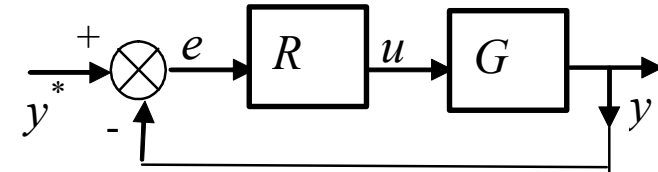
Idea: zapewnić określone położenie (lokalizację) biegunów zamkniętego układu regulacji

Zasady:

- przeliczyć cel (wskaźnik) regulacji na położenie (lokalizację) biegunów układu zamkniętego
- wyznaczyć prosty model obiektu i założyć określony regulator (PI, PID)
- wyznaczyć równanie charakterystyczne transmitancji układu zamkniętego

$$M_o + L_o = 0 \qquad G_z = \frac{G_o}{1 + G_o} = \frac{L_o}{M_o + L_o} \qquad , G_o = RG = \frac{L_R L_G}{M_R M_G}$$

- dobrać parametry regulatora tak by uzyskać określone bieguny układu zamkniętego



Dowolny regulator, dowolny model

Dla PI / PID - proste (uproszczone) modele

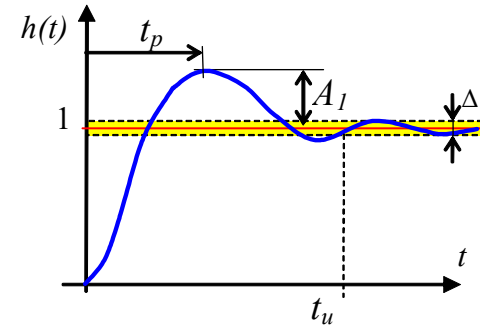
M.zaawansowane – na podstawie położenia biegunów

Przeliczenie bezpośrednich wskaźników jakości na położenie biegunów

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t)$$

$$h(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_r t + \frac{\sigma}{\omega_r} \sin \omega_r t \right)$$

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_r$$



Przeregulowanie $A_1 \rightarrow \dot{h}(t) = 0$

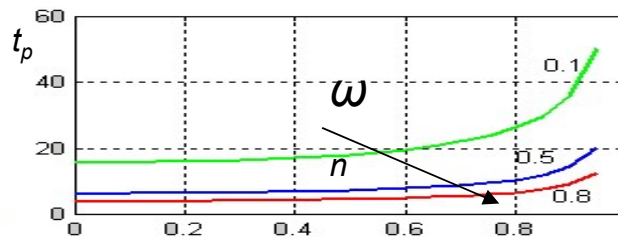
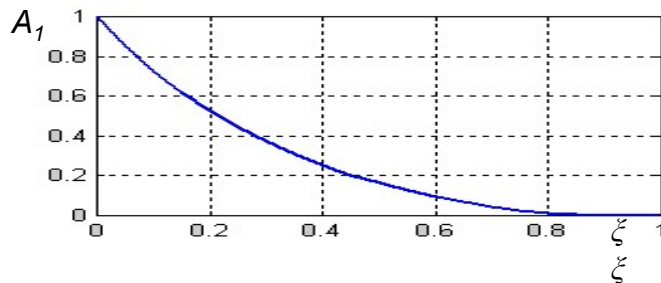
$$\dot{h}(t) = e^{-\sigma t} \left(\frac{\sigma^2}{\omega_r} \sin \omega_r t + \omega_r \cos \omega_r t \right) = 0$$

$$\sin(\omega_r t) = 0 \rightarrow \omega_r t_p = \pi \rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_r} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

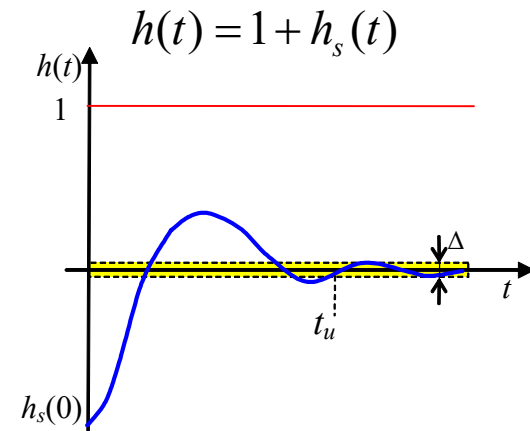
$h(t) = 1 + h_s(t)$

$$x(t_p) = 1 - e^{-\sigma \pi / \omega_r} \left(\cos \pi + \frac{\sigma}{\omega_r} \sin \pi \right) \rightarrow x(t_p) = 1 + e^{-\sigma \pi / \omega_r} = 1 + A_1$$

$$A_1 = e^{-\sigma \pi / \omega_r} = e^{\xi \pi / \sqrt{1 - \xi^2}}$$



Czas ustalania t_u



$$h_s(t_u) = p \cdot h_s(0)$$

$$A e^{-\sigma t_u} = pA$$

$$t_u = \frac{\ln p}{\alpha}$$

– dla $p=2\%$ → $\ln p = -3.912 \dots \approx 4$

– dla $p=1\%$ → $\ln p = -4.6052 \dots \approx 4.6$

M.zaawansowane – na podstawie położenia biegunów

Przeliczenie bezpośrednich wskaźników jakości na położenie biegunów

Zadane
wskaźniki:
 A_1, t_r, t_u



$$\xi \geq \xi(A_1)$$

$$\omega_r \geq \frac{1.8}{t_r}$$

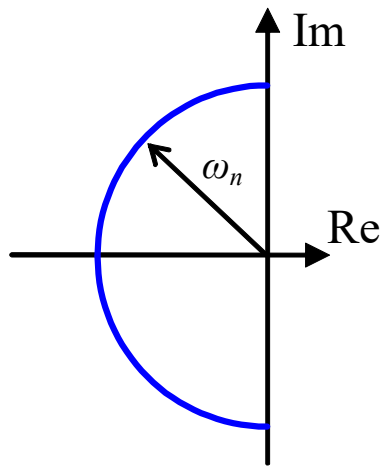
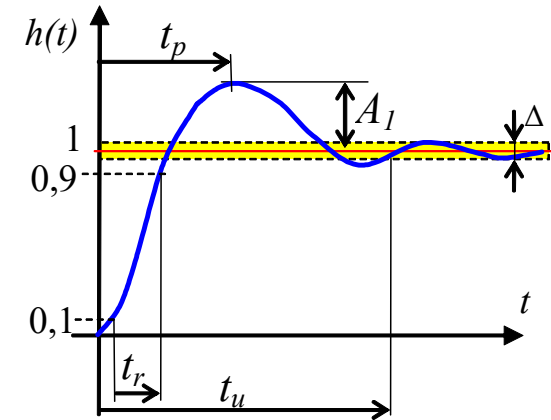
$$\sigma \geq \frac{4.6}{t_u}$$

Orientacyjnie (z wykresu $A_1=f(\xi)$)

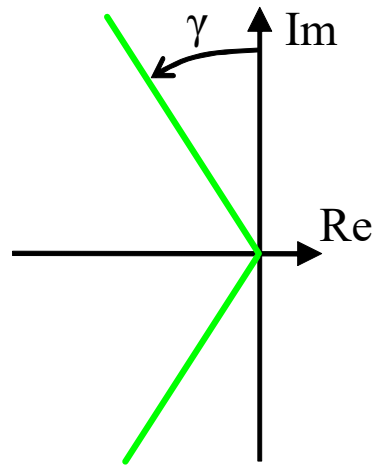
$A_1 = 5\% \rightarrow \xi = 0.7$

$A_1 = 15\% \rightarrow \xi = 0.5$

$A_1 = 35\% \rightarrow \xi = 0.3$

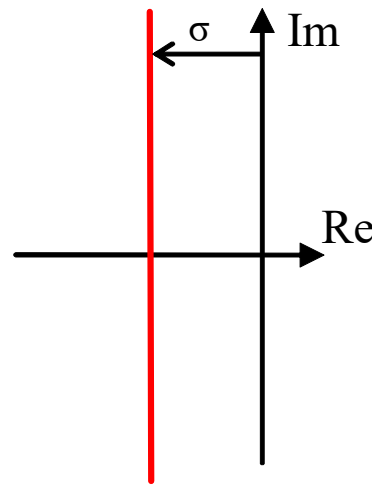


$$\omega_r \geq \frac{1.8}{t_r}$$

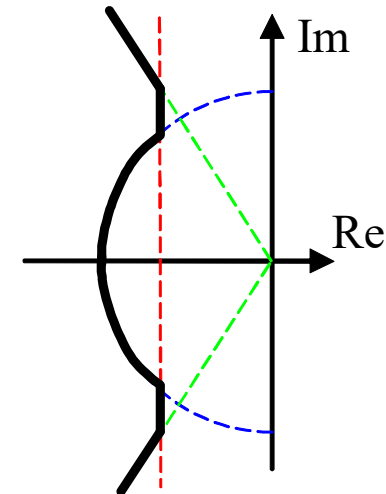


$$\xi \geq \xi(A_1)$$

$$\sin \gamma = \xi$$



$$\sigma \geq \frac{4.6}{t_u}$$



$$A_1, t_r, t_u$$

http://anna.czemplik.staff.iar.pwr.wroc.pl/images/Danaliza/w02_CzOscylacyjny.pdf

► Np. metoda linii pierwiastkowych (Matlab: Root Locus)

► Lambda Tuning (metoda lokalizacji biegunów Dahlina)

Model obiektu postaci: $G = \frac{ke^{-sT_0}}{Ts+1}$ Zakładany model UR: $G_z = \frac{e^{-sT_0}}{T_zs+1}$

$$G_z = \frac{RG}{1+RG} \rightarrow R = \frac{1}{G} \frac{G_z}{1-G_z} \rightarrow R = \frac{Ts+1}{ke^{-sT_0}} \frac{e^{-sT_0}}{T_zs+1-e^{-sT_0}} = \frac{1}{k} \frac{Ts+1}{T_zs+1-e^{-sT_0}}$$

$$e^{-sT_0} \approx 1-T_0s \rightarrow R = \frac{1}{k} \frac{Ts+1}{T_zs+1-(1-T_0s)} = \frac{1}{k} \frac{Ts+1}{T_zs+T_0s} = \frac{T}{k(T_z+T_0)} \frac{s+1/T}{s} = \frac{T}{k(T_z+T_0)} \left(1 + \frac{1}{Ts}\right)$$

PI: $K_p = \frac{T}{k(T_z+T_0)}$, $T_i = T$

Model obiektu postaci: $G = \frac{ke^{-sT_0}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$ Zakładany model UR: $G_z = \frac{e^{-sT_0}}{T_zs+1}$

$$R = \frac{1}{G} \frac{G_z}{1-G_z} \rightarrow R = \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{ke^{-sT_0}} \frac{e^{-sT_0}}{T_zs+1-e^{-sT_0}} = \frac{1}{k} \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{T_zs+1-e^{-sT_0}}$$

$$e^{-sT_0} \approx 1-T_0s \rightarrow R = \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{k(T_zs+T_zs)} = \frac{T_1T_2}{k(T_z+T_z)} \frac{(s+1/T_1)(T_2s+1)}{s} \rightarrow R = K'_p \left(1 + \frac{1}{sT'_i}\right) (1 + sT'_d)$$

PID: $K_p = \frac{T_1}{k(T_z+T_0)}$, $T_i = T_1$, $T_d = T_2$

► Lambda Tuning (metoda lokalizacji biegunów Dahlina)

Model obiektu postaci: $G = \frac{ke^{-sT_0}}{Ts + 1}$

PI: $R = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$

Założenia dla PI: $T_i = T, e^{-sT_0} \approx 1 - T_0$

$$G_o = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i} \frac{k}{1 + sT} e^{-sT_0} \approx K_p \frac{k(1 - sT_0)}{sT}$$

$$K_p k(1 - sT_0) + sT = s(T - K_p kT_0) + K_p k = 0$$

Wymagana stała czasowa UR: $T_z = \lambda$

$$\frac{-1}{T_z} = \frac{-K_p k}{T - K_p kT_0}$$

$$K_p = \frac{T}{k(T_z + T_0)}, T_i = T$$

($T_i = T$ – porównaj nastawy CHR 20%)

PID: $R = K'_p \left(1 + \frac{1}{sT'_i}\right) (1 + sT'_d)$

Założenia dla PI: $T'_i = T, T'_d = T_0/2, e^{-sT_0} \approx \frac{1 - sT_0/2}{1 + sT_0/2}$

$$G_o \approx K'_p k \frac{1 - sT_0/2}{sT}$$

$$s(T - K'_p kT_0/2) + K'_p k = 0$$

Wymagana stała czasowa UR: $T_z = \lambda$

$$K'_p = \frac{T}{k(T_z + T_0/2)}, T'_i = T, T'_d = T_0/2$$

PID ISA:

$$K_p = \frac{T + T_0/2}{k(T_z + T_0/2)} \quad T_i = T + T_0/2 \quad T_d = \frac{TT_0}{2T + T_0}$$

► Metoda lokalizacji biegunów Halawy

Przykład dla układu zamkniętego rzędu 4: $M_z(s) = s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$

Przypadek 1: Jeden pierwiastek znaczący $(-\alpha)$, a trzy pozostałe sobie równe ale znacznie oddalone $(-k\alpha, k>1)$

$$M_1 = (s + \alpha)(s + k\alpha)^3 = s^4 + (3k + 1)\alpha s^3 + 3k(k + 1)\alpha^2 s^2 + k^2(k + 3)\alpha^3 s + k^3\alpha^4$$

Przypadek 2: Dwa pierwiastki sobie równe $(-\alpha)$, i dwa pozostałe sobie równe ale znacznie oddalone

$$M_2 = (s + \alpha)^2 (s + k\alpha)^2 = s^4 + 2(k + 1)\alpha s^3 + (k^2 + 4k + 1)\alpha^2 s^2 + (k^2 + k)\alpha^3 s + k^2\alpha^4$$

Przypadek 3: Trzy pierwiastki sobie równe $(-\alpha)$, a czwarty znacznie oddalony

$$M_3 = (s + \alpha)^3 (s + k\alpha) = s^4 + (3 + k)\alpha s^3 + 3(3 + k)\alpha^2 s^2 + (1 + 3k)\alpha^3 s + k\alpha^4$$

1. Wyznaczenie transmitancji układu zamkniętego (G_z)
 - mianownik G_z jest funkcją parametrów obiektu i regulatora
2. Porównać mianownik M_z do jednego z wielomianów 4 stopnia (wybór)
3. Układamy układ równań:
 - porównanie współczynników, poczynając od współ. przy najniższych potęgach s (najbardziej znaczące)
 - ilość równań zależy od ilości niewiadomych:
 - niewiadome: parametry regulatora i biegun α
 - wartość współczynnika odległości k zakładamy, np. $k=10$
4. Rozwiązanie układu równań (r.nieliniowe)

Idea: przyrównać transmitancję zamkniętego układu regulacji do „typowej” transmitancji o zadanych parametrach

Zasady:

- wyznaczyć transmitancję układu regulacji (na podstawie modelu obiektu i regulatora)
- założyć prosty model docelowej transmitancji układu zamkniętego
 - „typowe” transmitancje o przebadanych własnościach
 - określić docelowe wartości parametrów
- rozwiązać, np.:
 - wyznaczyć transmitancję regulatora i jego parametry
 - lub ułożyć układ równań do wyznaczenia parametrów regulatora

Przykłady typowych transmitancji (przebadane własności):

$$G_{02} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G_{03} = \frac{a\omega_n^3}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + a\omega_n)}$$

$$G_{12} = \frac{\omega_n(s + b\omega_n)}{b(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$G_{13} = \frac{a\omega_n^2(s + b\omega_n)}{b(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + a\omega_n)}$$

$$G_z = \frac{1}{1 + T_z s} e^{sT_0}$$

$$h(t) = 1 - Ae^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi)$$

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega_r = -\sigma \pm j\omega_r$$

$$\alpha = -\xi\omega_n \quad | \quad \sigma = \xi\omega_n$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

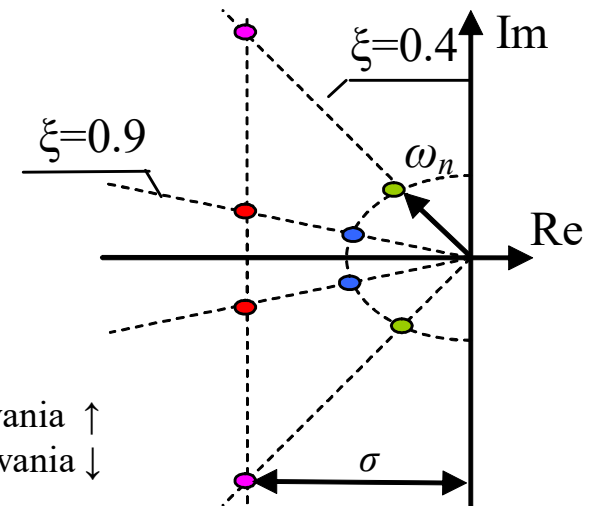
ω_n - szybkość odpowiedzi

$\xi = 0,5 \div 1$

duże znaczenie a i b dla < 1

$a \uparrow$ - szybkość \downarrow , przeregulowania \uparrow

$b \uparrow$ - szybkość \uparrow , przeregulowania \downarrow



Uzupełnić

► Metoda reduktów

Docelowa transmitancja układu zamkniętego = człon oscylacyjny o parametrach ω_n i ζ

1. Wyznaczenie transmitancji układu zamkniętego (na podstawie modelu obiektu i regulatora)
2. Rozwinięcie w ułamek łańcuchowy typu V
3. Redukt drugiego rzędu jako uproszczony model układu
4. Porównanie mianownika reduktu z członem oscylacyjnym $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2ns + \omega_n^2$
5. Zakładając wartości ω_n^2 i n , otrzymujemy nieliniowy układ równań (pulsacja - oscylacje, czas regulacji - tłumienie)
6. Rozwiązanie układu równań (wyznaczenie parametrów regulatora) (działania na zmiennych symbolicznych, np. Mathematica)
7. Ostateczny wybór parametrów na podstawie symulacji

Rozwinięcia w ułamki łańcuchowe (szybkobieżne)

$$\frac{43}{5} = 8 + \frac{3}{5} = 8 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

\downarrow $= 8 + \frac{3}{5} \approx 8$ \downarrow $= 8 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} \approx 8 + \frac{1}{1} = 9$ \downarrow $= 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \approx 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 8\frac{1}{2}$

Rozwinięcia w szereg potęgowy (wolnozbieżne/rozbieżne)

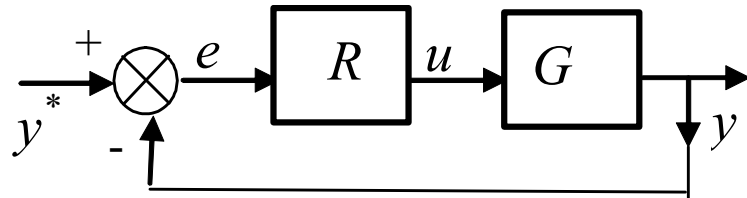
Redukty (przybliżenia)

$$\frac{a_{21} + a_{22}s + \dots + a_{2n}s^{n-1}}{a_{11} + a_{12}s + \dots + a_{1n}s^{n-1}} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{\frac{h_2}{s} + \frac{1}{h_3 + \frac{1}{\frac{h_4}{s} \dots}}}} = \frac{1}{h_1 + \frac{s}{h_2 + \frac{s}{h_3 + \frac{s}{h_4 \dots}}}}$$

Algorytmy rozwinięć w ułamki proste, np.:
 - algorytm Wiskowatowa
 - algorytm Thielego

$$= \frac{1}{|h_1|} + \frac{1}{\left| \frac{h_2}{s} \right|} + \frac{1}{|h_3|} + \frac{1}{\left| \frac{h_4}{s} \right|} + \dots = \frac{1}{|h_1|} + \frac{s}{|h_2|} + \frac{s}{|h_3|} + \frac{s}{|h_4|} + \dots$$

► Metoda reduktów - przykład



$$\frac{Y}{Y^*} = G_z = \frac{RG}{1+RG} = \frac{L_R L_o}{M_R M_o + L_R L_o}$$

$$G = \frac{k_o}{s(Ts+1)} \quad R = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

$$G_z = \frac{L_R L_o}{M_R M_o + L_R L_o}$$

$$G_z = \frac{K_p (T_i T_d s^2 + T_i s + 1) \cdot k_o}{T_i s \cdot s(Ts+1) + K_p (T_i T_d s^2 + T_i s + 1) \cdot k_o}$$

$$G_z = \frac{K_p k_o T_i T_d s^2 + K_p k_o T_i s + K_p k_o}{T T_i s^3 + T_i s^2 + K_p k_o T_i T_d s^2 + K_p k_o T_i s + K_p k_o}$$

$$G_z = \frac{\frac{K_p k_o T_d}{T} s^2 + \frac{K_p k_o}{T} s + \frac{K_p k_o}{T T_i}}{s^3 + \frac{1 + K_p k_o T_d}{T} s^2 + \frac{K_p k_o}{T} s + \frac{K_p k_o}{T T_i}}$$

$$G_z = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}$$

$$c_0 = d_0, \quad c_1 = d_1$$

Rozwinięcie w ułamek łańcuchowy V i redukt G_{12} :

$$G_{12} = \frac{B_1 s + B_0}{s^2 + A_1 s + A_0}$$

$$u = c_0 d_3 - c_3 d_0$$

$$v = c_0 d_2 - c_2 d_0$$

$$a_{31} = c_0 d_1 - c_1 d_0$$

$$a_{41} = a_{31} c_1 - c_0 v$$

$$a_{51} = a_{41} v - a_{31} (a_{31} c_2 - u c_0)$$

$$A_0 = \frac{a_{41} c_0 d_0}{a_{51}} \quad A_1 = \frac{a_{31}^2 a_{41} + a_{51} c_0 d_0 + a_{41}^2 d_0}{a_{31} a_{51}}$$

$$B_0 = \frac{c_0}{d_0} A_0 \quad B_1 = \frac{a_{51} c_0^2 + a_{41}^2 c_0}{a_{31} a_{51}}$$

Układ równań do wyznaczenia nastaw:

► Metoda reduktów

Wzory Halawy dla obiektów:

- transmitancje 2. i 3. rzędu (np. zidentyfikowane m.momentów)

$$\frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$$\frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

(b_1 i b_2 mogą być równe 0)

- obiekty (transmitancje) z całkowaniem

$$\frac{k_o}{s(Ts + 1)}$$

- transmitancje z opóźnieniem (typu model Kűpfműllera)

$$\frac{L(s)}{M(s)} e^{-sT_0} \xrightarrow{\text{aproxymacja Pade}} \frac{L_0(s)}{M_0(s)}$$

i regulatorów

- PI

$$R = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

- PD

$$R = K_p (1 + T_d s)$$

- PID

$$R = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

► IMC -> Skogestad IMC (SIMple Control)

Transmitancja układu zamkniętego:

$$G_z = \frac{RG}{1 + RG}$$

stąd: $R = \frac{1}{G} \frac{G_z}{1 - G_z}$

$$R = \frac{1}{G} \frac{\frac{1}{1 + T_z s} e^{sT_0}}{1 - \frac{1}{1 + T_z s} e^{sT_0}} = \frac{1}{G} \frac{e^{sT_0}}{1 + T_z s - e^{sT_0}}$$

Docelowa transmitancja układu zamkniętego:

$$G_z = \frac{1}{1 + T_z s} e^{sT_0}$$

z zadanymi parametrami UR:

- T_z – zadana wartość stałej czasowej UR
- T_0 – opóźnienie takie jak obiektu

Po podstawieniu modelu obiektu, np.: $G = \frac{k}{Ts + 1} e^{-sT_0}$

$$R = \frac{1}{\frac{k}{1 + Ts} e^{sT_0}} \frac{e^{sT_0}}{1 + T_z s - e^{sT_0}} = \frac{1 + Ts}{k(1 + T_z s - e^{sT_0})}$$

$$e^{-sT_0} \approx 1 - sT_0$$

$$R = \frac{T}{k(T_z + T_0)} \left(1 + \frac{1}{Ts} \right)$$

PI: $T_i = T$

Aplikacja regulacji IMC na PID (→ Układy regulacji z modelem)

Dobór stałej T_z ze względu na szybkość UR na zmianę SP (wpływ na wymagania dla wielkości sterującej):

- agresywny $0.1 T < T_z < 0.8 T_0$
- średni $T < T_z < 8 T_0$
- „konserwatywny” $10 T < T_z < 80 T_0$

Gdy $T \gg T_0$ to wolna reakcja ma zakłócenia → Modyfikacje Skogestada:

$$T_i = \min[T, 4(T_z + T_0)]$$

$$T_z = T_0$$

[Sigurd Skogestad, prof. inżynierii chemicznej, Norwegian University of Science and Technology (NTNU)]

Dobór nastaw regulatorów metodą SIMC, Vítečková, Víteček, Jaracz (pdf)

https://intranet.ceautomatica.es/sites/default/files/upload/13/files/XVSimpIC17_SSkogestad1_NTNU.pdf