

Układy niestacjonarne

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

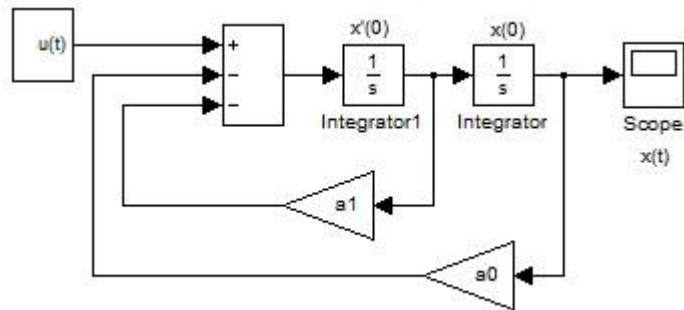
<i>Współczynniki a_i i b_i</i>	<i>Równanie różniczkowe</i>
stałe	liniowe stacjonarne
stałe lub funkcje czasu	liniowe niestacjonarne
zależne od x , u lub ich pochodnych	nieliniowe

Równania różniczkowe zwyczajne o zmiennych współczynnikach

Przykłady

Układ stacjonarny

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u(t)$$



w tym człon oscylacyjny:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = u(t)$$

$, \omega_n > 0$

$$a_0 = \omega_n^2$$

$$a_1 = 2\xi \omega_n$$

$$\omega_n = \sqrt{a_0} > 0$$

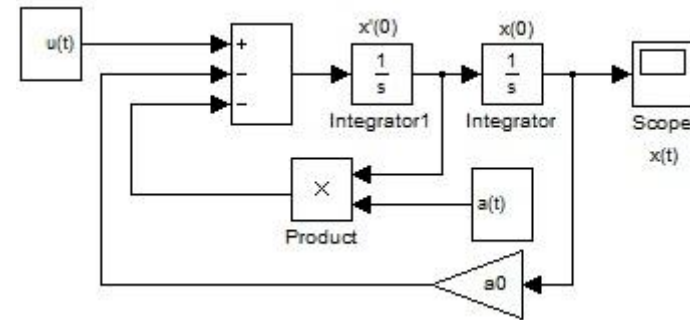
$$\xi = \frac{a_1}{2\omega_n}$$

$$\omega_n = \sqrt{a_0} > 0$$

$$\xi(t) = \frac{a_1(t)}{2\omega_n}$$

Układ niestacjonarny

$$\ddot{x}(t) + a_1(t) \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u(t)$$



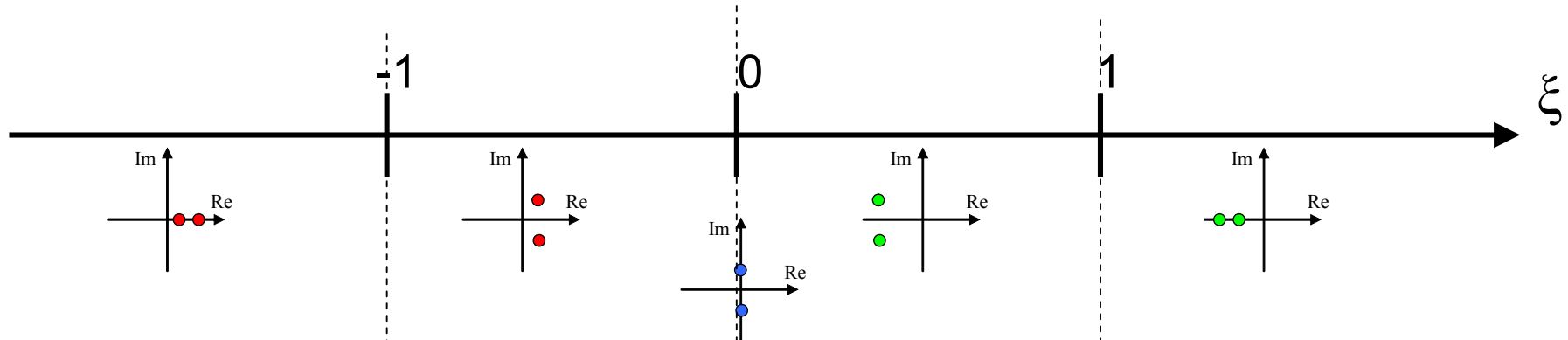
$a(t)$ - funkcja

(generowanie funkcji, np. Halawa/4.7)

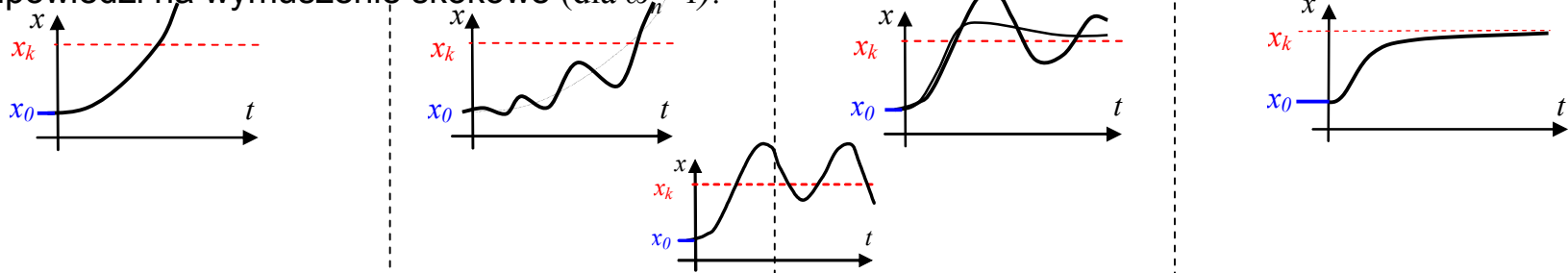
Człon oscylacyjny - własności

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = u(t) \quad , \omega_n > 0$$

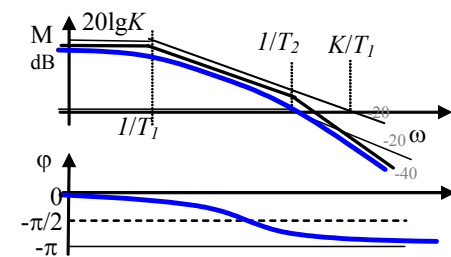
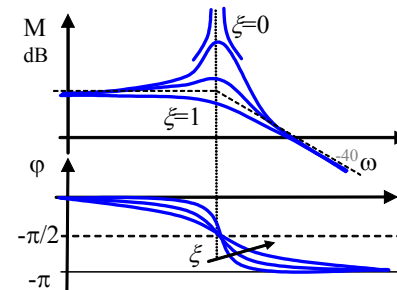
$$\begin{cases} \lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \\ \lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases}$$



Odpowiedzi na wymuszenie skokowe (dla $\omega_n = 1$):



Charakterystyki częstotliwościowe:



Człon oscylacyjny – charakterystyki (dla $\omega_n = 1$)

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = u(t), \omega_n > 0$$

$$0 < \xi < 1 \quad (0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9)$$

$$\xi \geq 1 \quad (1; 2; 3; 4; 5)$$

ω_n – pulsacja drgań własnych nietłumionych
 ω_r – pulsacja drgań własnych tłumionych
 ξ – współczynnik tłumienia względnego

$$x_s(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1)$$

$$\alpha = -\xi\omega_n, \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

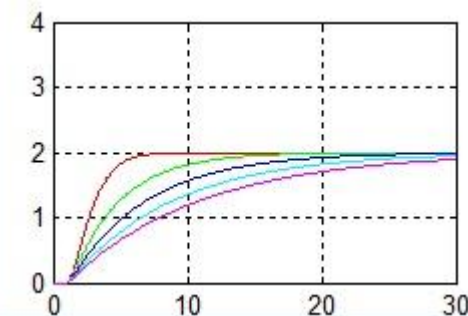
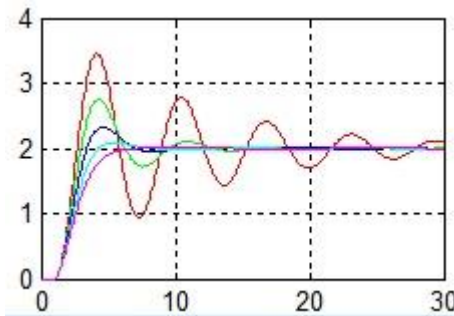
$$x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Odpowiedź skokowa

$$u(t) = 1(t)$$

$$x_w(t) = k = 1/\omega_n^2$$



Odpowiedź impulsowa

$$u(t) = \delta(t)$$

$$x_w(t) = 0$$

Odpowiedź częstotliwościowa

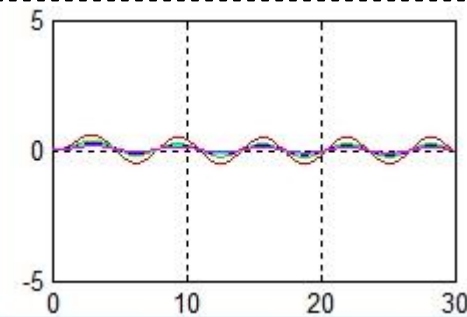
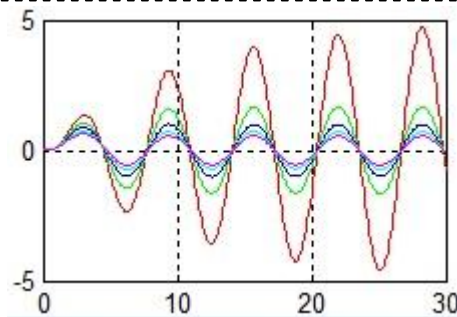
$$u(t) = A_u \sin(\omega t),$$

dla $A_u = 1, \omega = 1$

$$x_w(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A(\omega),$$

$$\varphi(\omega)$$



Rezonans – zwiększenie amplitudy odpowiedzi w stosunku do amplitudy drgań wymuszających w wyniku działania zewnętrznej okresowej siły

Układy niestacjonarne II rzędu (przykłady)

$$\ddot{x}(t) + a_1(t) \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u(t)$$

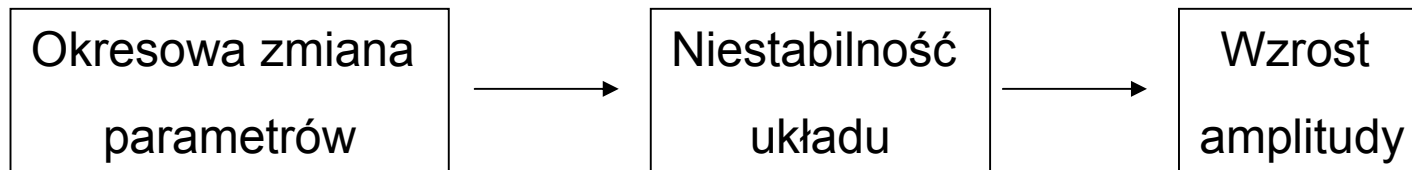
$$\ddot{x}(t) + 2\xi(t)\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = u(t)$$

Wpływ zmiany współczynnika na stabilność układu

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + \omega^2(t) x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t) x(t) = 0$$

Rezonans parametryczny polega na wzbudzeniu niestabilności układu drgającego i wzroście amplitudy jego drgań w wyniku okresowej zmiany parametrów tego układu (a nie zewnętrznej okresowej siły)



Rezonans parametryczny - przykłady

Najprostszy oscylator harmoniczny (równanie Hilla):

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0 \quad , \text{ gdzie pulsacja własna } \omega^2(t) = \omega_0^2 [1 + f(t)]$$

$f(t)$ – funkcja okresowa o okresie $T_p = 2\pi / \omega_p$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 [1 + f(t)]x(t) = 0$$

Dla $f(t) = A \sin(\omega_p t + \phi)$ (równanie Mathieu):

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 [1 + A \sin(\omega_p t + \phi)]x(t) = 0$$

Równanie Mathieu - ruch cząstki poruszającej się w kierunku, wzdłuż którego energia potencjalna zmienia się sinusoidalnie
https://www.fuw.edu.pl/~akw/Fizyka_XX_wieku_cz_3.pdf

Oscylator harmoniczny z siłą oporu:

$$\ddot{x}(t) + \beta \dot{x}(t) + \omega_0^2 [1 + f(t)]x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \beta \dot{x}(t) + \omega_0^2 [1 + A \sin(\omega_p t + \phi)]x(t) = 0$$

Wahadło matematyczne i fizyczne

(nierozciągliwa i nieważka nić, brak tarcia)

Siły składowe:

$$F_n = F \cos \alpha \quad \text{- zrównoważenie siły naprężenia nici}$$

$$F_s = F \sin \alpha \quad \text{- siła dostarczająca przyspieszenia do utrzymania ruchu po okręgu (zwrot przeciwny do kierunku ruchu)}$$

Zasada dynamiki:

- w ruchu postępowym $m\ddot{x} = F$

- w ruchu obrotowym $I\ddot{\alpha} = M$

$$I_o \ddot{\alpha}(t) = -l \cdot F_s(t)$$

$$M = l \cdot F_s = l \cdot mg \sin \alpha$$

$$I_o \ddot{\alpha}(t) + l \cdot F_s(t) = 0$$

$$I_o \ddot{\alpha}(t) + lmg \sin \alpha(t) = 0$$

$$I_o = ml^2 \quad \text{punkt materialny wokół } O$$

$$\ddot{\alpha}(t) + \frac{lmg}{I_o} \sin \alpha(t) = 0$$

$$\ddot{\alpha}(t) + \frac{g}{l} \sin \alpha(t) = 0$$

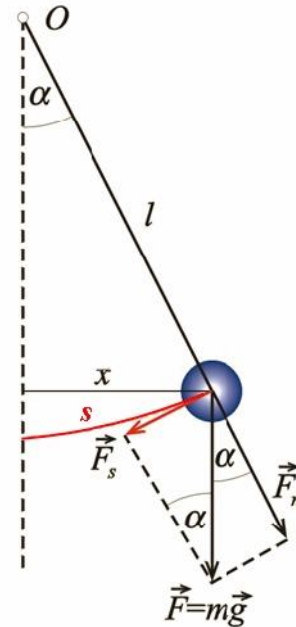
Dla małych α : $\sin \alpha \approx \alpha$

$$\ddot{\alpha}(t) + \frac{lmg}{I_o} \alpha(t) = 0$$

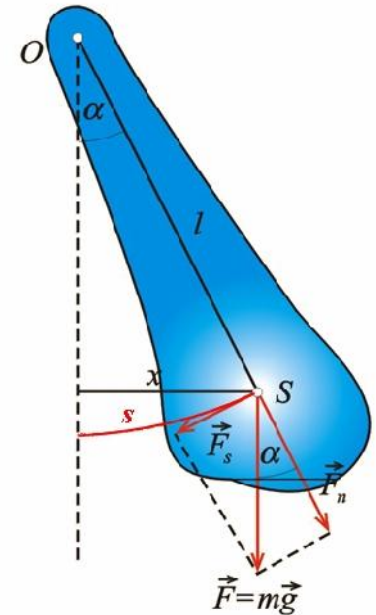
$$\ddot{\alpha}(t) + \frac{g}{l} \alpha(t) = 0$$

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega_n^2 \alpha(t) = 0$$

prosty ruch harmoniczny (o pulsacji ω_n)



punkt materialny



ciało o masie m

- l – długość nici
- m – masa ciężarka,
- I, I_o – moment bezwładności
- α – kąt wychylenia
- s – przemieszczenie po łuku
- F - siła ciężkości
- F_n, F_s – składowe F
- M – moment siły
- O – punkt obrotu
- S – środek masy

Wahadło matematyczne i fizyczne – rezonans parametryczny

W.fizyczne

$$\ddot{\alpha}(t) + \frac{lmg}{I_o} \sin \alpha(t) = 0$$

Dla małych α : $\sin \alpha \approx \alpha$

$$\ddot{\alpha}(t) + \frac{lmg}{I_o} \alpha(t) = 0$$

W.matematyczne

$$\ddot{\alpha}(t) + \frac{g}{l} \sin \alpha(t) = 0$$

$$\ddot{\alpha}(t) + \frac{g}{l} \alpha(t) = 0$$

Rezonans parametryczny gdy $l=l(t)$ lub $g=g(t)$

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega_n^2(t)\alpha(t) = 0$$

Rezonans pojawia się, jeżeli stosunek okresu zmiany parametru jest zbliżony do całkowitej wielokrotności połowy okresu drgania własnego układu.

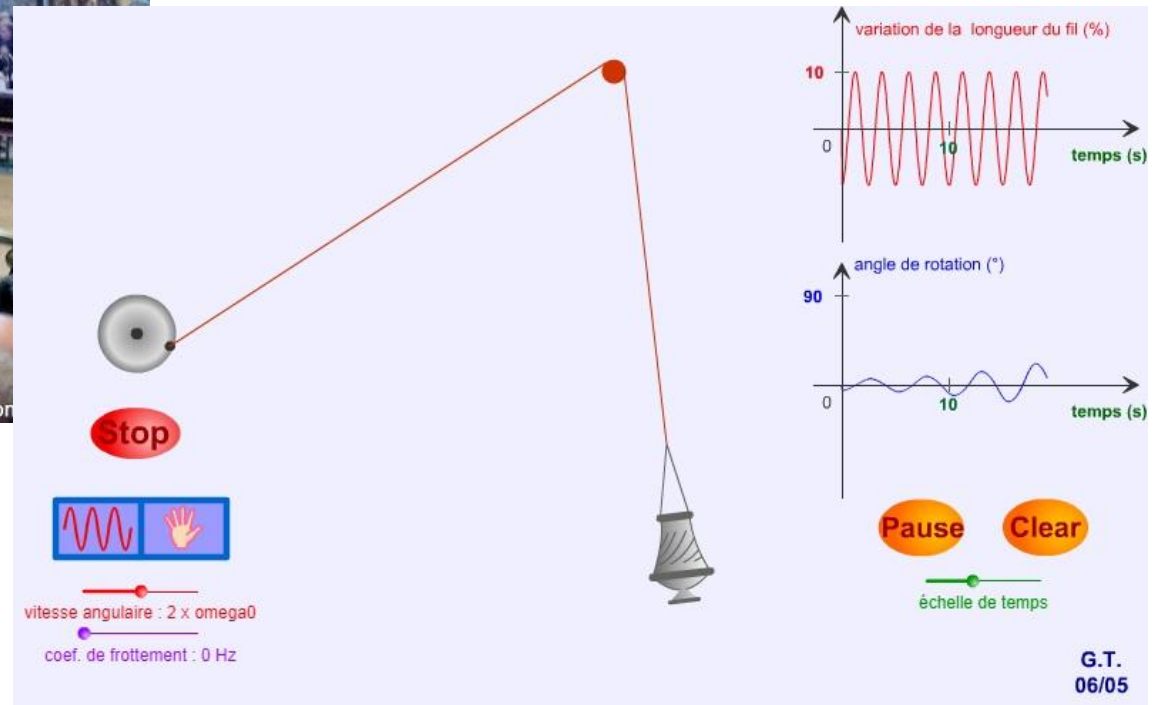
Rezonans parametryczny - przykłady

Kadzielnica „O Botafumeiro” w Santiago de Compostela



20m (zmiana o 1,5 m), masa ≈ 60 kg (+40 kg wsad)
17 okresów (ok.80s) wychylenie $\approx 80^\circ$

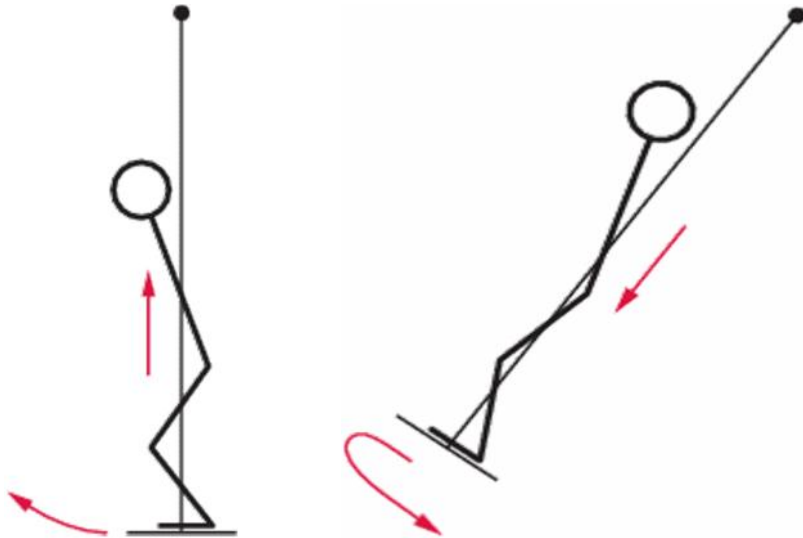
<https://www.youtube.com/watch?v=Z7UDUoVwgg4>



<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/botafumeiro.html>

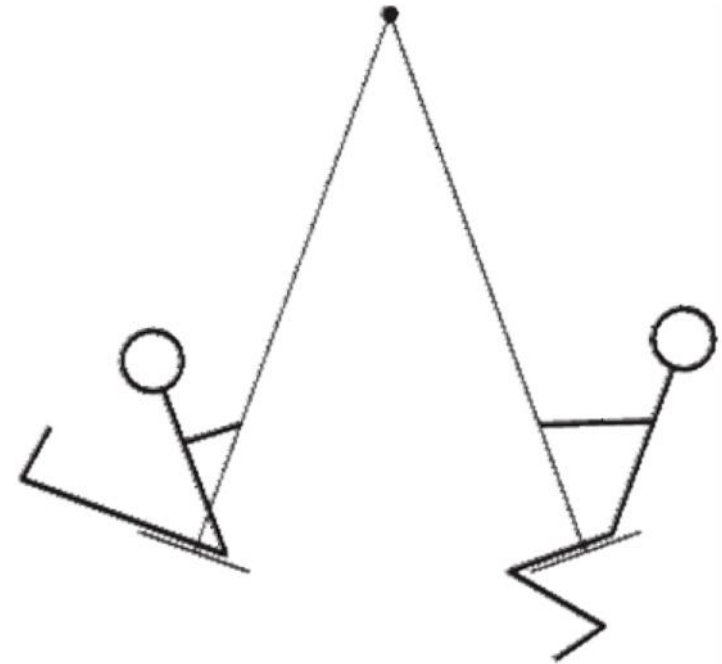
Wahadło matematyczne i fizyczne – rezonans parametryczny

Huśtawka



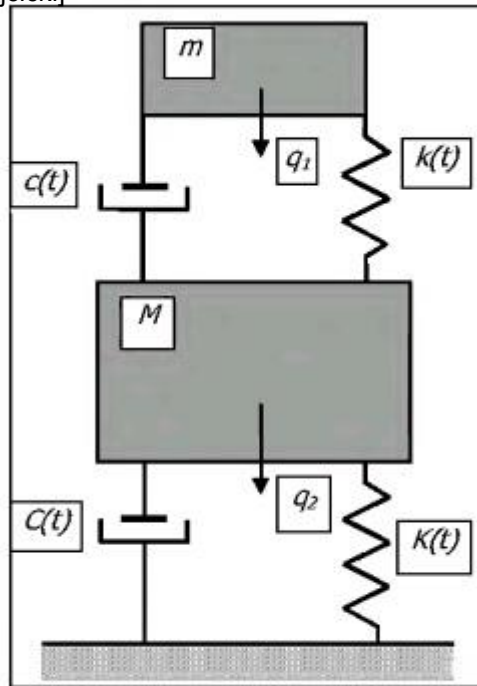
1) Za każdym przejściem przez punkt równowagi „podnosimy swój środek ciężkości, przesuując go w kierunku punktu zawieszenia huśtawki” (prostowanie nóg)

2) Po osiągnięciu maksymalnego wychylenia obniżamy środek ciężkości (uginanie nóg w kolanach)



Rezonans parametryczny - zastosowanie

[Wójcicki]



Rys. 6.1. Model dynamicznego eliminatora drgań w układzie z wymuszeniem parametrycznym

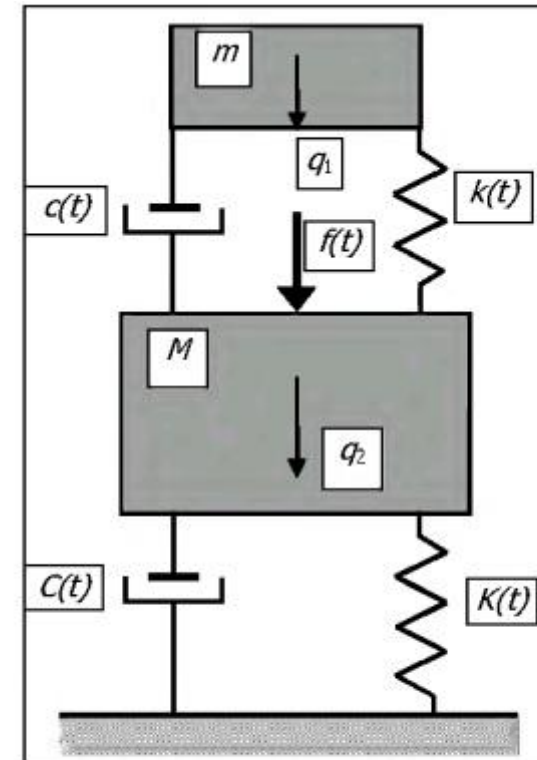
- układ podstawowy o masie M
- więź sprężysta i tłumiąca z ostoją - $K(t)$, $C(t)$
- dynamiczny eliminator drgań o masie m
- więź sprężysta i tłumiąca – $k(t)$, $c(t)$

Charakterystyka $K(t)$ i $C(t)$ zmienia się w czasie z częstością ν_0 .

Charakterystyka $k(t)$ i $c(t)$ może zmieniać się z częstością **wymuszenia parametrycznego**

Wymuszenie nieparametryczne $f(t)$

Zadanie – strojenie eliminatora tak aby ustabilizować układ



Rys. 8.1. Model dynamicznego eliminatora drgań w układzie z wymuszeniem parametrycznym i nieparametrycznym

Rezonans parametryczny - zastosowanie

Analiza drgań parametrycznych układów ciągłych poddanych stałemu obciążeniu poprzecznemu
<http://www.ptmts.org.pl/1985-2-osinski.pdf>

Politechnika Warszawska, Wydział mechaniczny, Energetyki i Lotnictwa
<https://www.meil.pw.edu.pl/zm/ZM/Dydaktyka>, np. Podstawy drgań i areoelastyczności