Modele liniowe/nieliniowe, stacjonarne/niestacjonarne

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Współczynniki a_i i b_i	*Równanie różniczkowe*
stałe	liniowe stacjonarne
stałe lub funkcje czasu	liniowe niestacjonarne
zależne od x, u lub ich pochodnych	nieliniowe

Własności układów liniowych

- zasada superpozycji:
  - rozwiązanie = rozwiązanie swobodne i wymuszone
- znana postać rozwiązania swobodnego (niezależnie od wymuszenia)

$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots \quad , \quad A_1 e^{(\alpha + j\omega)t} + A_2 e^{(\alpha - j\omega)t} = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$$

- parametry rozwiązania swobodnego - algebraiczne równanie charakterystyczne
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakter.
- własności dynamiczne układu nie zależą od punktu pracy i wymuszenia
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

$u(t)=1(t) \quad x(t) \qquad\qquad u(t)=\delta(t) \quad dx(t)/dt$

$\delta(t) = d\,(1(t))\,/\,dt$

- jeden punkt równowagi (jeśli nie ma własności astatycznych)
- stabilność / niestabilność globalna
- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

Linearyzacja i uproszczanie modeli

Nieliniowy model dynamiki

linearyzacja dynamiczna

Liniowy model dynamiki

- równania różniczkowe

- równania różniczkowe

(dowolne warunki początkowe)

- transmitancje

(zerowe warunki poczatkowe)

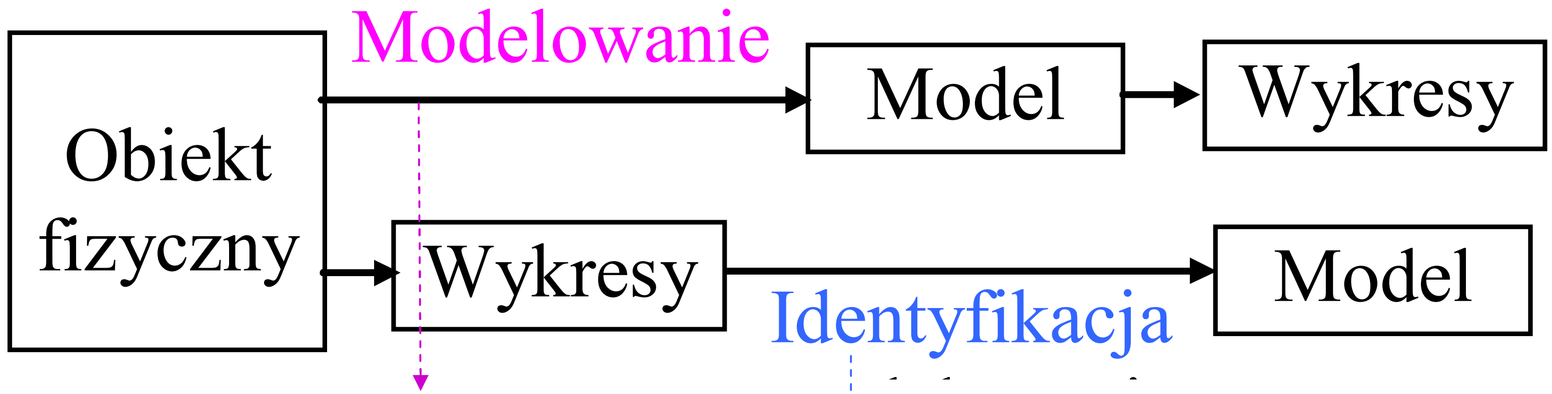
Nieliniowy model statyczny

linearyzacja

Liniowy model statyczny

upraszczanie biegunów
(rzędu układu)

- transmitancje niższego rzędu



- założenia upraszczające
  (dokładność opisu)
- model liniowy/nieliniowy

model liniowy

- różne dokładności metod
- zwykle model liniowy, np. transmitancja
(dokładność opisu+linearyzacja)

upraszczanie formy

transmitancja

wymierna

Upraszczanie biegunów (rzędu układu)

Ogólna zasada upraszczania – pomijamy biegun najdalej na lewo

(składową, która najszybciej zanika)

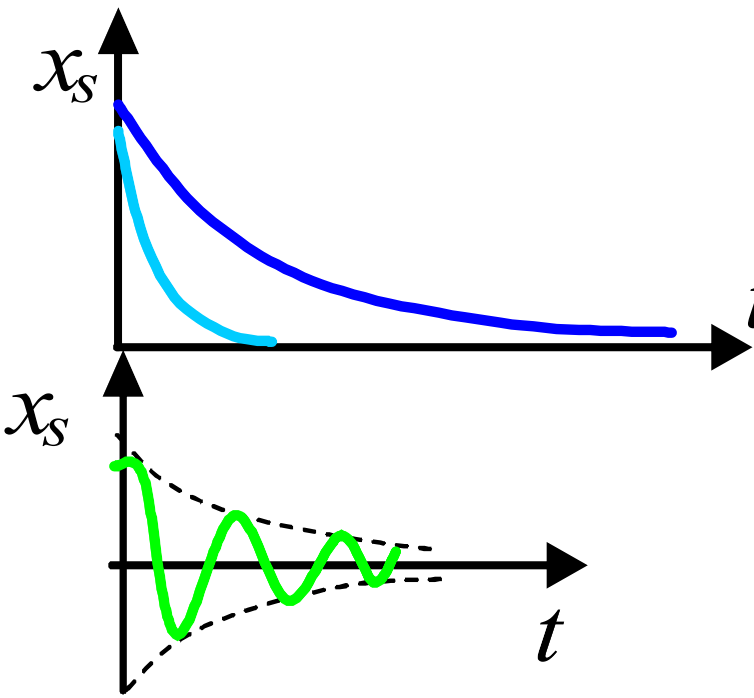
$$G(s) = \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)} \quad \rightarrow \quad G_q(s) = k_q \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^{n-1}(s-s_i)}$$

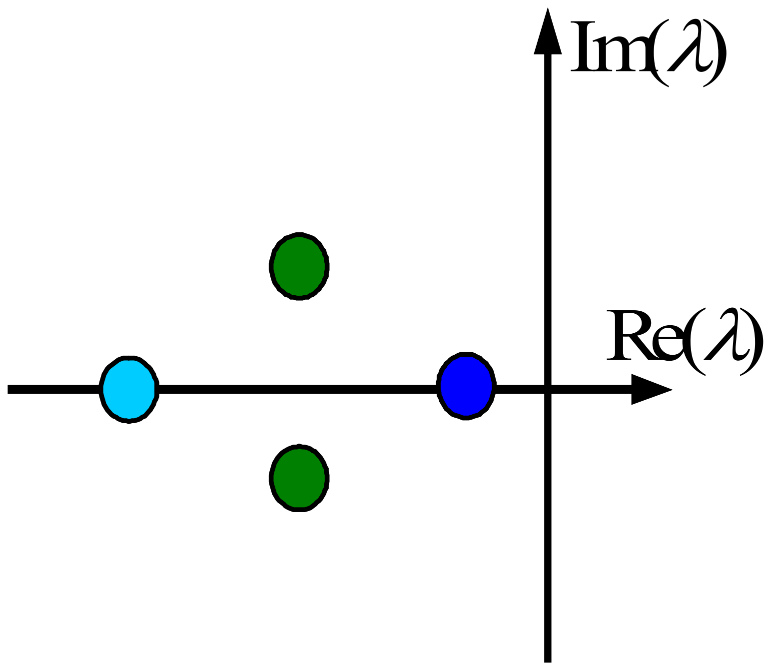
$$G(s) = \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s-s_i}$$

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_i t}$$

Uwaga – zachować stan ustalony (wzmocnienie)

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} G_q(s)$$ - stąd korekcja k_q





Upraszczanie biegunów (rzędu układu)

Metoda obniżania rzędu mianownika (bez wyznaczania biegunów)

$$G(s) = \frac{L(s)}{a_{n+1}s^{n+1} + a_n s^n + .. + a_1 s + a_0} \quad \rightarrow \quad G_q(s) = \frac{L(s)}{a_n s^n + ... + a_1 s + a_0}$$

$$M_q(s) = (1+sT)^n$$ (Model uproszczony)

$$M_q(s) = s^n T^n + nT^{n-1}s^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}T^{n-2}s^{n-2} + ... + \underline{nTs} + 1$$

Podstawienie $s=S/T$ $\qquad$ $a_1 s = nTs$, stąd $T=a_1/n$

$$\boxed{M_q(S) = S^n + nS^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}S^{n-2} + \frac{n(n-1)}{6}(n-2)S^{n-3} + ... + nS + 1}$$

$$M(s) = (1+sT)^n(1+sTq)$$ (Model z dodatkowym, małym biegunem – q<<1)

$$M(s) = qT^{n+1}s^{n+1} +$$

$$+(1+q\frac{n}{1})T^n s^n + n(1+q\frac{n-1}{2})T^{n-1}s^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(1+q\frac{n-2}{3})T^{n-2}s^{n-2} + ... + \underline{(n+q)}Ts + 1$$

Podstawienie $s=S/T$ $\qquad$ $a_1 s = nTs \approx (n+q)Ts$

$$M(S) = \boxed{qS^{n+1}} +$$
$$+(1+q\frac{n}{1})S^n + n(1+q\frac{n-1}{2})S^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(1+q\frac{n-2}{3})S^{n-2} + ... + (n+q)S + 1$$

Współczynnik $a_{n+1}=q$ <<1
Współczynniki a_n .. a_0 porównywalne $\Big\} \longrightarrow$ **Jeśli w *M(S)* współczynnik przy S^{n+1} mały to można pominąć $a_{n+1}s^{n+1}$**

Upraszczanie biegunów (rzędu układu)

Metoda obniżania rzędu mianownika (bez wyznaczania biegunów) - przykład

$$M_5(s) = 0.005s^5 + 0.115s^4 + 0.82s^3 + 1.19s^2 + 2.2s + 1$$

$$M(s) = qT^{n+1}s^{n+1} + (1+q\frac{n}{1})T^n s^n + n(1+q\frac{n-1}{2})T^{n-1}s^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(1+q\frac{n-2}{3})T^{n-2}s^{n-2} + \ldots + (n+q)Ts + 1$$

Podstawienie $s=S/T$ $\qquad$ $a_1 s = nTs \approx (n+q)Ts$

$$M(S) = qS^{n+1} + (1+q\frac{n}{1})S^n + n(1+q\frac{n-1}{2})S^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(1+q\frac{n-2}{3})S^{n-2} + \ldots + (n+q)S + 1$$

Czy $a_{n+1} << 1$?

Czy można obniżyć rząd do n=4? Wyraz $\boldsymbol{a_1 s = nTs = 2.2s}$, stąd $T=2.2/4$. Podstawiamy $\boldsymbol{s = S / T = 4S/2.2}$ i otrzymujemy:

$$M_5(s) = 0.099347\,S^5 + 1.256745\,S^4 + 4.928625\,S^3 + 6.31405\,S^2 + 4\,S + 1$$

Współczynnik $a_5 << 1$, więc pomijamy $\boldsymbol{0.005s^5}$

$$\boxed{M_4(s) = 0.115s^4 + 0.82s^3 + 1.19s^2 + 2.2s + 1}$$

Czy można obniżyć rząd do n=3 Wyraz $\boldsymbol{a_1 s = nTs = 2.2s}$, stąd $T=2.2/3$. Podstawiamy $\boldsymbol{s = S / T = 3S/2.2}$ i otrzymujemy:

$$M_4(s) = 0.397642\,S^4 + 2.079264\,S^3 + 3.551653\,S^2 + 3\,S + 1$$

Współczynnik $a_4 << 1$, więc pomijamy $\boldsymbol{0.115s^4}$

$$\boxed{M_3(s) = 0.82s^3 + 1.19s^2 + 2.2s + 1}$$

Czy można obniżyć rząd do n=2 Wyraz $\boldsymbol{a_1 s = nTs = 2.2s}$, stąd $T=2.2/2$. Podstawiamy $\boldsymbol{s = S / T = 2S/2.2}$ i otrzymujemy:

$$M_3(s) = 0.82s^3 + 1.19s^2 + 2.2s + 1$$

Współczynnik a_3 jest zbliżony do *1* więc rezygnujemy z obniżenia rzędu

M_5	$s_1 = -1$	$s_{2,3} = -10$	$s_{4,5} = -1 \pm j$
M_4	$s_1 = -1.013$	$s_2 = -4.08$	$s_{3,4} = -1.017 \pm j1.08$
M_3	$s_1 = -0.859$		$s_{3,4} = -0.735 \pm j0.938$

Upraszczanie biegunów (rzędu układu)

Metoda ułamków łańcuchowych

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + .. + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + .. + a_1 s + a_0}, \quad m \le n$$

Przykład rozwinięcia:

$$G(s)=\cfrac{1}{h_1+\cfrac{1}{\cfrac{h_2}{s}+\cfrac{1}{h_3+\cfrac{1}{\cfrac{h_4}{s}\ddots}}}}=\cfrac{1}{h_1+\cfrac{s}{h_2+\cfrac{s}{h_3+\cfrac{s}{h_4}\ddots}}}$$

Symbolicznie:

$$G(s)=\frac{1|}{|h_1}+\frac{1|}{\left|\frac{h_2}{s}\right.}+\frac{1|}{|h_3}+\frac{1|}{\left|\frac{h_4}{s}\right.}+\ldots=\frac{1|}{|h_1}+\frac{s|}{|h_2}+\frac{s|}{|h_3}+\frac{s|}{|h_4}+\ldots$$

$$G(s)=\frac{4s+6}{s^2+10s+6}$$

$$G(s)=\cfrac{6}{6+\cfrac{36s}{6+\cfrac{108s}{36+\cfrac{648s}{108}}}}$$

$$G(s)=\frac{6|}{|6}+\frac{36s|}{|6}+\frac{108s|}{|36}+\frac{648s|}{|108}$$

Kolejne redukty:

$$G_{00}(s)=1$$

$$G_{01}(s)=\cfrac{6}{6+\cfrac{36s}{6}}=\frac{6}{6+6s}=\frac{1}{s+1}$$

$$G_{11}(s)=\cfrac{6}{6+\cfrac{36s}{6+\cfrac{108s}{36}}}=\cfrac{6}{6+\cfrac{36s}{6+3s}}=\cfrac{6}{6+\cfrac{12s}{2+s}}=\cfrac{6}{\cfrac{12+6s+12s}{2+s}}=\frac{6(2+s)}{12+18s}=\frac{s+2}{3s+2}$$

Porównać z upraszczaniem biegunów

Rozwinięcie w ułamki łańcuchowe:
- są szybkozbieżne (szeregi potęgowe są wolniejzbieżne, a czasem rozbieżne)
- wykorzystywane w przybliżonych obliczeniach komputerowych

Upraszczanie formy -

Metoda średniej czasowej

$$G(s) = \frac{L(s)}{(1+sT_1)(1+sT_2)\ldots(1+sT_n)} \qquad \rightarrow \qquad G_q(s) = k_q \frac{L(s)}{(1+sT_z)^n}$$

$$M(s) = (1+sT_1)(1+sT_2)\ldots(1+sT_n) = 1 + s(T_1 + T_2 + \ldots + T_n) + \ldots + s^n T_1 T_2 \ldots T_n$$

$$M_q(s) = (1+sT_z)^n \qquad = 1 + snT_z + \ldots + s^n T_z^n$$

- średnia arytmetyczna

$$T_z = \frac{1}{n}(T_1 + T_2 + \ldots + T_n)$$

$k_q = 1$, dokładniejsza w zakresie małych częstotliwości

- średnia geometryczna

$$T_z = (T_1 T_2 \ldots T_n)^{1/n}$$

$k_q = 1$, dokładniejsza w zakresie dużych częstotliwości

- średnia harmoniczna

$$T_z = \frac{n}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \ldots + \frac{1}{T_n}}$$

$k_q = \frac{T_z^n}{T_1 T_2 \ldots T_n}$, jeszcze dokładniejsza w zakresie dużych częstotliwości

Upraszczanie formy: opóźnienie transportowe - aproksymacja Padé

$$G(j\omega) = e^{-sT_o}$$

$$e^{-sT_o} = \frac{e^{-sT_o/2}}{e^{sT_o/2}} = \frac{1 - s\frac{T_0}{2} + \ldots}{1 + s\frac{T_0}{2} + \ldots} \approx \frac{1 - s\frac{T_0}{2}}{1 + s\frac{T_0}{2}}$$

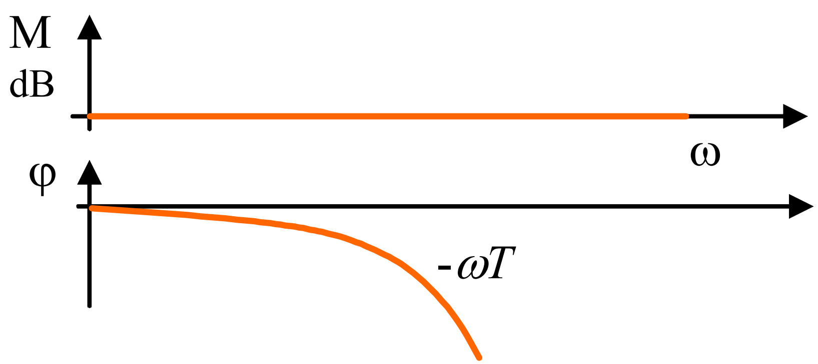
$$\boxed{G(j\omega) = e^{-sT_o} \approx \frac{1 - sT}{1 + sT},\ T = T_0 / 2}$$

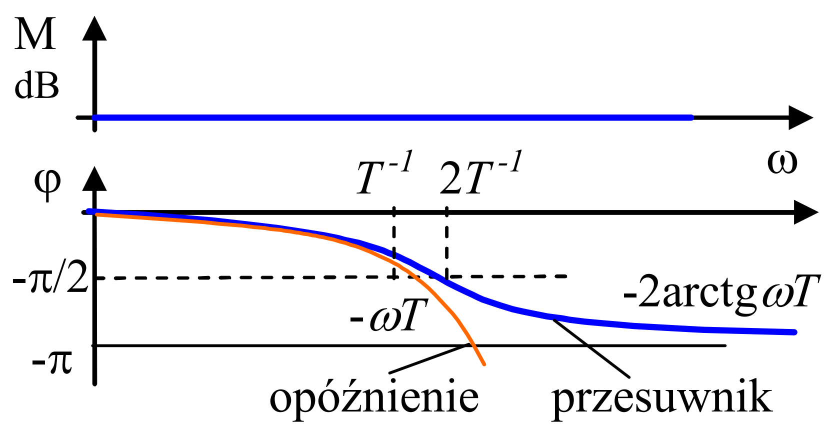
opóźnienie ≈ przesuwnik fazowy

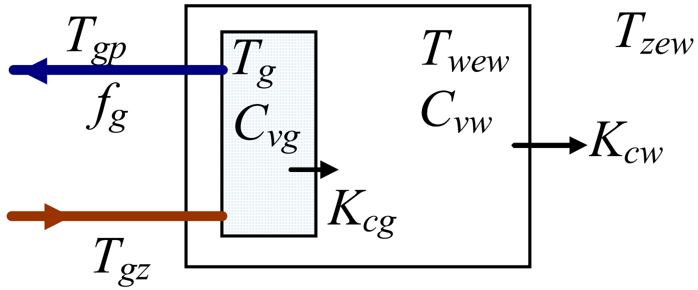
$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_o}$$

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$

$$G(j\omega) = \frac{\left(1 + \omega^2 T^2\right) e^{j\mathrm{arctg}(-\omega T)}}{\left(1 + \omega^2 T^2\right) e^{j\mathrm{arctg}(\omega T)}} = e^{-j2\mathrm{arctg}(\omega T)}$$







Założenia:

C_{vw}, C_{vg} (magazyny ciepła)

$T_g = T_{gp}$ (doskonałe mieszanie)

$f_{mg} = \rho w\, f_g$ (przepływ masowy [kg/s])

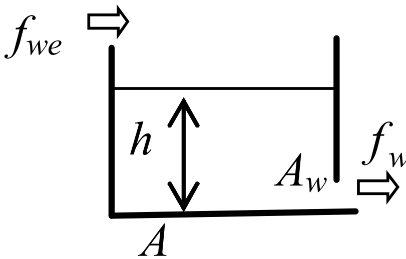
$$\begin{cases} C_{vg}\dot{T}_{gp}(t) = c_p f_{mg}(t)\big(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)\big) - K_{cg}\big(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\big) \\ C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\big(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\big) - K_{cw}\big(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\big) \end{cases}$$

Założenie stałego przepływu: $f_{mg}\,(t)=const$ (f_{mg} =patrametr układu)

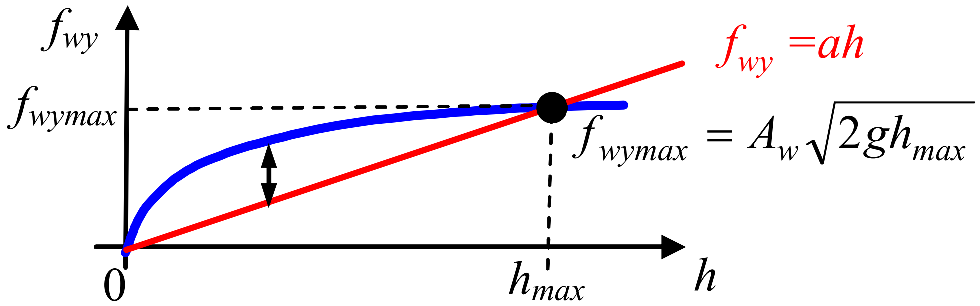
$$\begin{cases} C_{vg}\dot{T}_{gp}(t) = c_p f_{mg}\big(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)\big) - K_{cg}\big(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\big) \\ C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\big(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\big) - K_{cw}\big(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\big) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{wew} \\ \dot{T}_{gp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-K_{cg} - K_{cw}}{C_{vw}} & \dfrac{K_{cg}}{C_{vg}} \\ \dfrac{K_{cg}}{C_{vw}} & \dfrac{-c_{pw} f_{mg} - K_{cg}}{C_{vg}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{wew} \\ T_{gp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{K_{cw}}{C_{vw}} \\ \dfrac{c_{pw} f_{mg}}{C_{vg}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{gz} \\ T_{zew} \end{bmatrix}$$

Linearyzacja przez założenia upraszczające – przykład 2



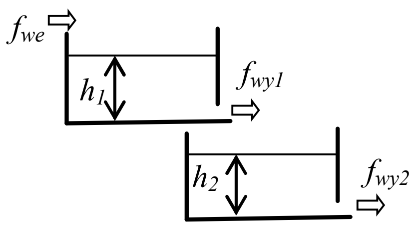
$$f_{wy} = A_w\sqrt{2gh}$$



$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w\sqrt{2gh(t)}$$

Założenie: $f_{wy}(t) = A_w\sqrt{2gh(t)} \approx ah(t)$

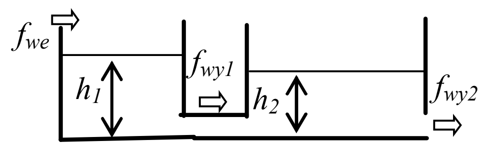
$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - ah(t)$$



$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{wy1}(t) \\ A_2\dot{h}_2(t) = f_{wy1}(t) - f_{wy2}(t) \end{cases}$$

$$f_{wy1}(t) = A_{w1}\sqrt{2gh_1(t)} \approx a_1 h_1(t)$$

$$f_{wy2}(t) = A_{w2}\sqrt{2gh_2(t)} \approx a_2 h_2(t)$$



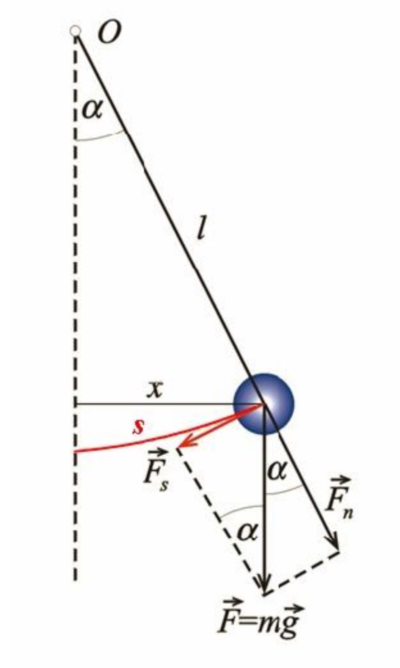
$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{wy1}(t) \\ A_2\dot{h}_2(t) = f_{wy1}(t) - f_{wy2}(t) \end{cases}$$

$$f_{wy1}(t) = A_{w1}\sqrt{2g\left(h_1(t) - h_2(t)\right)} \approx a_1\left(h_1(t) - h_2(t)\right)$$

$$f_{wy2}(t) = A_{w2}\sqrt{2gh_2(t)} \approx a_2 h_2(t)$$

Linearyzacja przez założenia upraszczające – przykład 3

$$\boxed{\ddot{\alpha}(t) + \frac{lmg}{I_o}\sin\alpha(t) = 0}$$



Dla małych α: $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\boxed{\ddot{\alpha}(t) + \frac{lmg}{I_o}\alpha(t) = 0}$$

[więcej: W04_Rezonans]

Przykład: $kx(t)\dot{x}(t) \quad + ax(t) \quad = \quad \sqrt{x(t)u(t)}$

Rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Taylora w punkcie x_0

$$f(x) = \boxed{f(x_0) + f^{(1)}(x_0)\frac{\Delta x}{1!}} + f^{(2)}(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(\Delta x)^n}{n!} + R_n(x, x_0)$$

przybliżenie liniowe

gdzie $\Delta x = x - x_0$

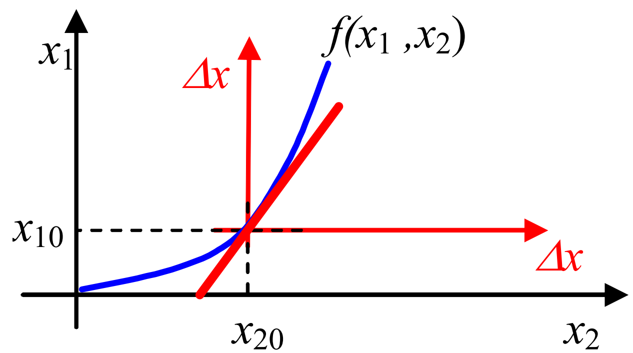
(gdy $x_0 = 0$, szereg Maclaurina)

Rozwinięcie funkcji $f(x_1, \ldots, x_m)$ w szereg Taylora w punkcie $(x_{10}, \ldots, x_{m0})$

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \boxed{f(x_{10}, \ldots, x_{m0}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_0 \frac{\Delta x_1}{1!} + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_0 \frac{\Delta x_m}{1!}} + \ldots$$

przybliżenie liniowe

gdzie: $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}, \ldots, \Delta x_m = x_m - x_{m0}$



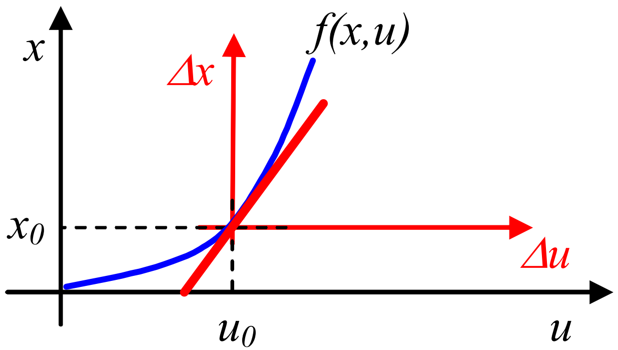
$$f\left(x(t),\dot{x}(t),\ldots,x^{(n)}(t),u(t),\dot{u}(t),\ldots,u^{(m)}(t)\right)=0$$

$$f(x_0,u_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0\Delta x(t)+\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_0\Delta\dot{x}(t)+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}\right|_0\Delta x^{(n)}(t)+$$

$$+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0\Delta u(t)+\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right|_0\Delta\dot{u}(t)+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial u^{(n)}}\right|_0\Delta u^{(n)}(t)=0$$

Rozwinięcie funkcji
w szereg Taylora
w punkcie równowagi
x_0, u_0 (wyrazy liniowe)

$$\Delta x(t)=x(t)-x_0$$
$$\Delta u(t)=u(t)-u_0$$
$$\Delta\dot{x}(t)=\dot{x}(t)$$
$$\Delta\dot{u}(t)=\dot{u}(t)$$



$$a_0\Delta x(t)+a_1\Delta\dot{x}(t)+\ldots+a_n\Delta x^{(n)}(t)=b_0\Delta u(t)+b_1\Delta\dot{u}(t)+\ldots+b_m\Delta u^{(m)}(t)$$

$$a_0=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0,a_1=\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_0,\ldots,a_n=\left.\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}\right|_0,b_0=-\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0,b_1=-\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right|_0,\ldots,b_m=-\left.\frac{\partial f}{\partial u^{(m)}}\right|_0$$

Linearyzacja dynamiczna – przykład

$$kx(t)\dot{x}(t) \quad + ax(t) \quad = \quad \sqrt{x(t)u(t)}$$

$$k\left.\frac{\partial(x\dot{x})}{\partial x}\right|_0 \Delta x \quad + k\left.\frac{\partial(x\dot{x})}{\partial \dot{x}}\right|_0 \Delta\dot{x} \quad + a\left.\frac{\partial(x)}{\partial x}\right|_0 \Delta x \quad = \left.\frac{\partial\left(\sqrt{xu}\right)}{\partial x}\right|_0 \Delta x \quad + \left.\frac{\partial\left(\sqrt{xu}\right)}{\partial u}\right|_0 \Delta u$$

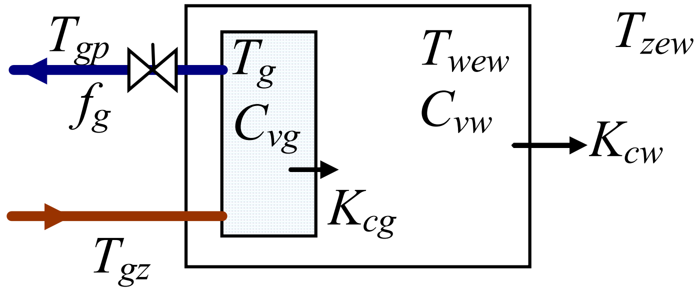
$$k\dot{x}\big|_0 \Delta x \quad + kx\big|_0 \Delta\dot{x} \quad + a\Delta x \quad = \left.\frac{u}{2\sqrt{x}}\right|_0 \Delta x \quad + \sqrt{x}\big|_0 \Delta u$$

$$kx_0\,\Delta\dot{x}(t) + \left(a - \frac{u_0}{2\sqrt{x_0}}\right)\Delta x(t) = \sqrt{x_0}\,\Delta u(t)$$

$$a_1\,\Delta\dot{x}(t) + a_0\,\Delta x(t) = b_0\,\Delta u(t)$$

$$a_1 = kx_0\,, \quad a_0 = a - \frac{u_0}{2\sqrt{x_0}}, \quad b_0 = \sqrt{x_0}$$

Linearyzacja dynamiczna – przykład 1



Założenia:

C_{vw}, C_{vg} (magazyny ciepła)

$T_g = T_{gp}$ (doskonałe mieszanie)

$f_{mg} = \rho w f_g$ (przepływ masowy [kg/s])

$$\begin{cases} C_{vg}\dot{T}_{gp}(t) = c_p f_{mg}(t)\big(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)\big) - K_{cg}\big(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\big) \\ C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\big(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\big) - K_{cw}\big(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\big) \end{cases}$$

Przepływ $f_{mg}(t) \neq const$

Punkt równowagi (punkt pracy):

Model (równania) statyczny:

- parametr f_{mg0}
- wejścia T_{gz0}, T_{zew0}

$$\begin{cases} 0 = c_p f_{mg0}\left(T_{gz0} - T_{gp0}\right) - K_{cg}\left(T_{gp0} - T_{wew0}\right) \\ 0 = K_{cg}\left(T_{gp0} - T_{wew0}\right) - K_{cw}\left(T_{wew0} - T_{zew0}\right) \end{cases}$$

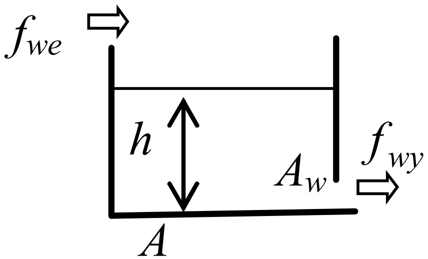
- wyjścia T_{gp0}, T_{wew0}

$$\begin{cases} C_{vg}\dot{T}_{gp}(t) = c_p f_{mg}(t)\left(T_{gz}(t) - T_{gp}(t)\right) - K_{cg}\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) \\ C_{vw}\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\left(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)\right) - K_{cw}\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{vg}\Delta\dot{T}_{gp}(t) = c_p f_{mg0}\left(\Delta T_{gz}(t) - \Delta T_{gp}(t)\right) + c_p \rho \Delta f_{mg}(t)\left(T_{gz0} - T_{gp0}\right) - \\ \qquad - K_{cg}\left(\Delta T_{gp}(t) - \Delta T_{wew}(t)\right) \\ C_{vw}\Delta\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\left(\Delta T_{gp}(t) - \Delta T_{wew}(t)\right) - K_{cw}\left(\Delta T_{wew}(t) - \Delta T_{zew}(t)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{vg}\Delta\dot{T}_{gp}(t) = -\left(c_p f_{mg0} + K_{cg}\right)\Delta T_{gp}(t) + K_{cg}\Delta T_{wew}(t) + \\ \qquad + c_p f_{mg0}\Delta T_{gz}(t) + c_p\left(T_{gz0} - T_{gp0}\right)\Delta f_{mg}(t) \\ C_{vw}\Delta\dot{T}_{wew}(t) = K_{cg}\Delta T_{gp}(t) - \left(K_{cg} + K_{cw}\right)\Delta T_{wew}(t) + K_{cw}\Delta T_{zew}(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{T}_{gp}(t) \\ \Delta\dot{T}_{wew}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \Delta T_{gp}(t) \\ \Delta T_{wew}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\begin{bmatrix} \Delta T_{gz}(t) \\ \Delta f_{mg}(t) \\ \Delta T_{zew}(t) \end{bmatrix}$$



$$f_{wy} = A_w\sqrt{2gh}$$

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w\sqrt{2gh(t)}$$

Model (równania) statyczny:

$$0 = f_{we0} - A_w\sqrt{2gh_0}$$

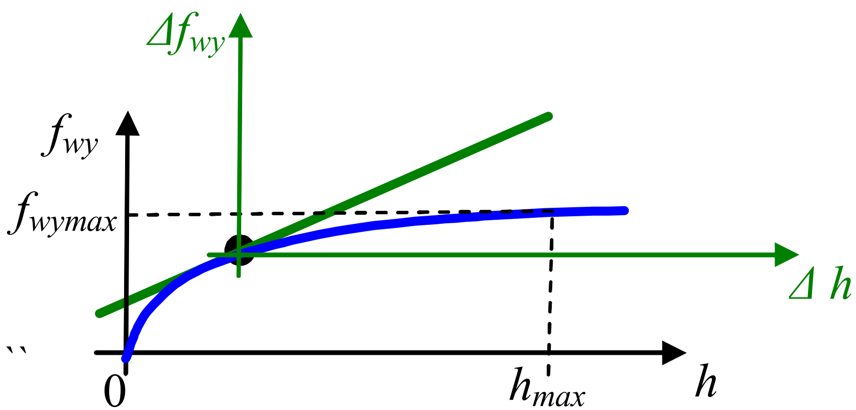
Punkt pracy: $h_0 = \dfrac{f_{we0}^2}{2gA_w^2}$

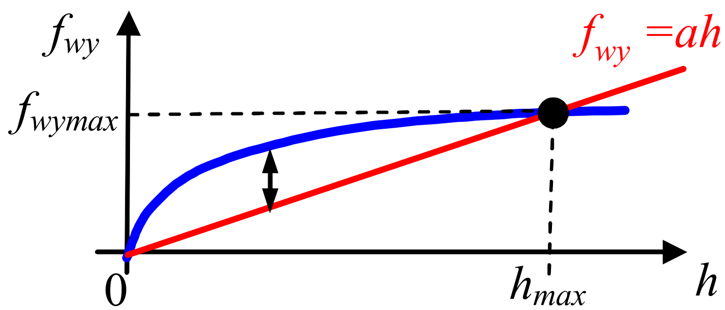
$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w\sqrt{2gh(t)}$$

$$A\Delta\dot{h}(t) = \Delta f_{we}(t) - A_w\sqrt{2g}\,\frac{1}{2\sqrt{h_0}}\,\Delta h(t)$$

$$A\Delta\dot{h}(t) = \Delta f_{we}(t) - b\Delta h(t)$$

gdzie: $b = \dfrac{A_w\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}}$

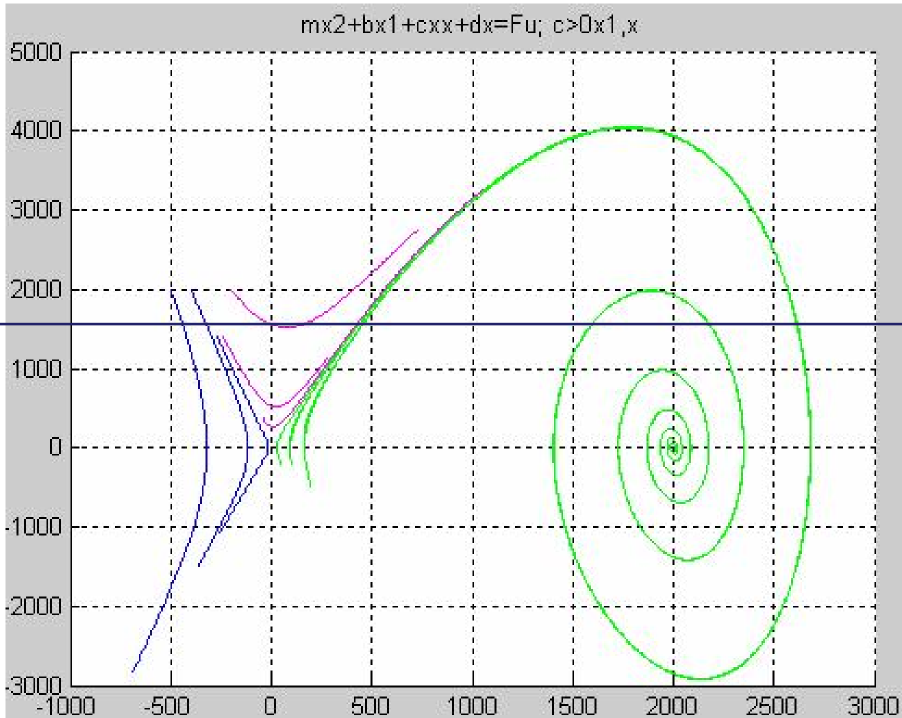


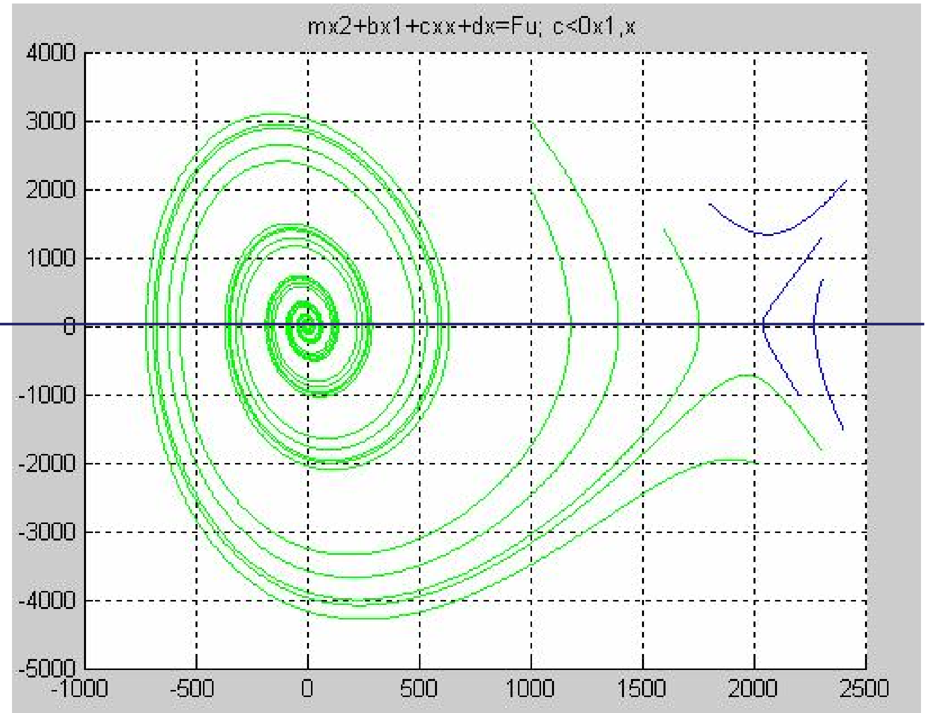


Analiza modeli nieliniowych

$$m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx^2(t)+dx(t)=F(t)$$

$$m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx^2(t)+dx(t)=F(t)$$





- Linearyzacja dynamiczna – model liniowy w punkcie równowagi (x_0, u_0)
- Badanie modelu liniowego
- Ograniczenie wniosków do otoczenia punktu równowagi

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx^3(t) + dx(t) = F(t)$$