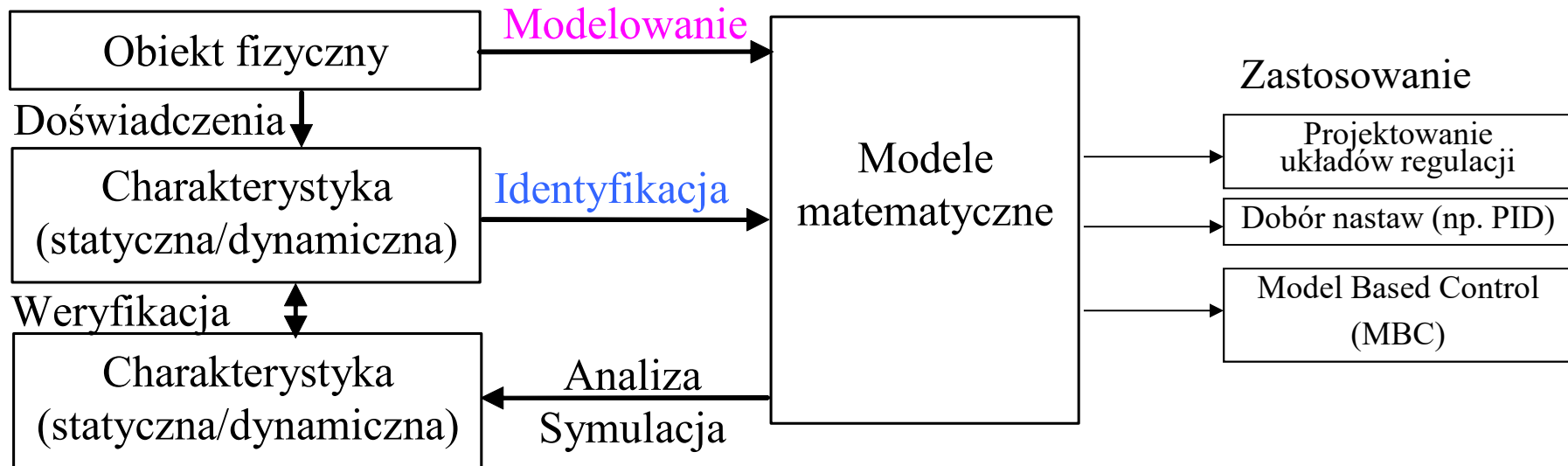
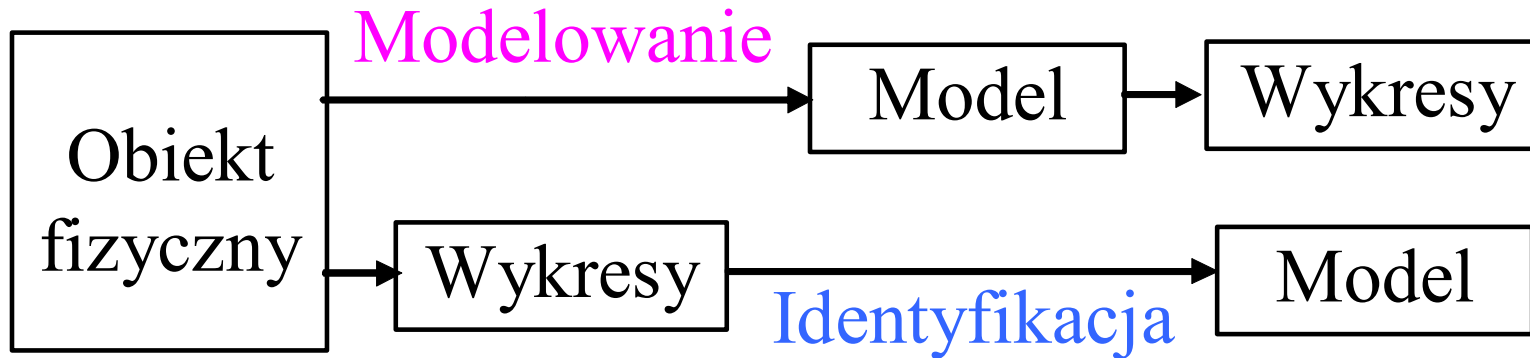


Skąd model?

Modelowanie i identyfikacja

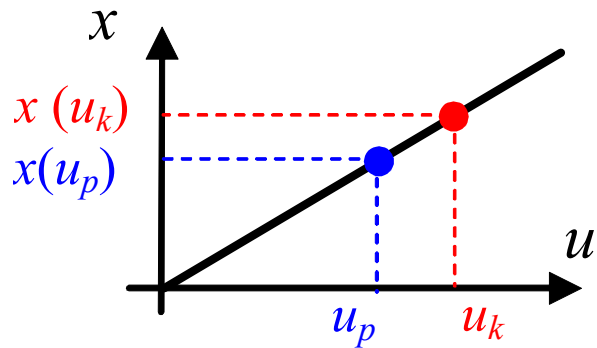


Jaki model?

Opis (model) statyczny i dynamiczny

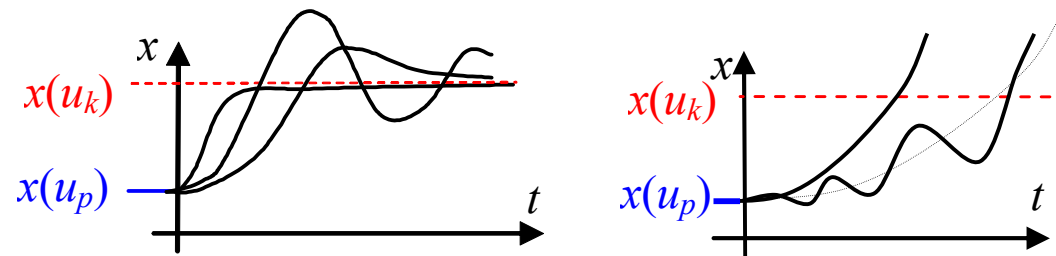
Opis (model) „stacyjny”

Charakterystyki statyczne

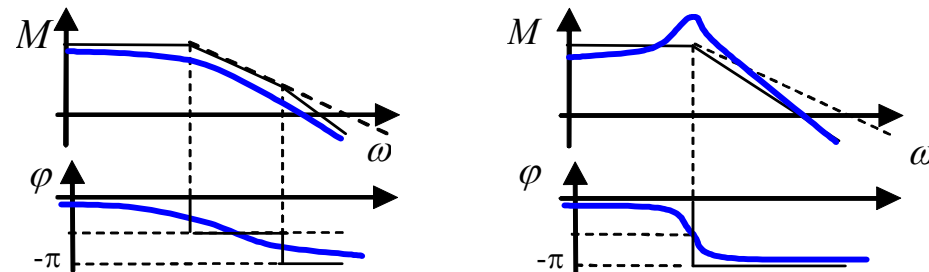


Opis (model) „dynamiczny”

Odpowiedź skokowa (impulsowa)



Odpowiedź częstotliwościowa



Portrety fazowe

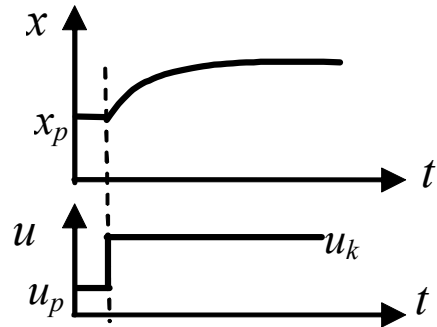
Równania algebraiczne

Równania różniczkowe

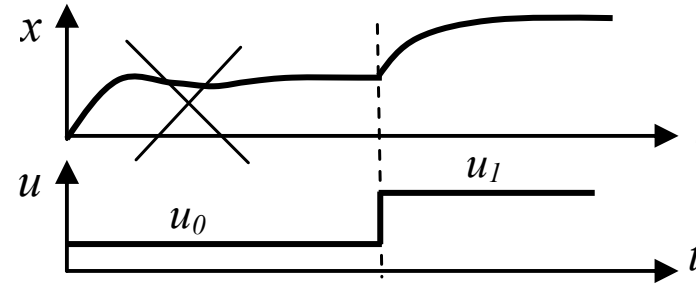
Transmitancje

Podstawowe badanie dynamiki - odpowiedź na wymuszenie skokowe (impulsowe)

Równania różniczkowe

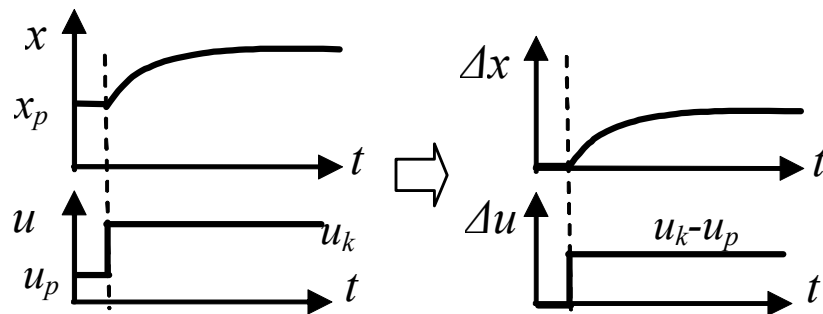


Badanie (symulacja)
od stanu ustalonego

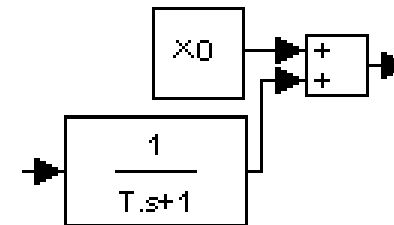


Badania (symulacja)
od przypadkowego stanu początkowego

Transmitancje

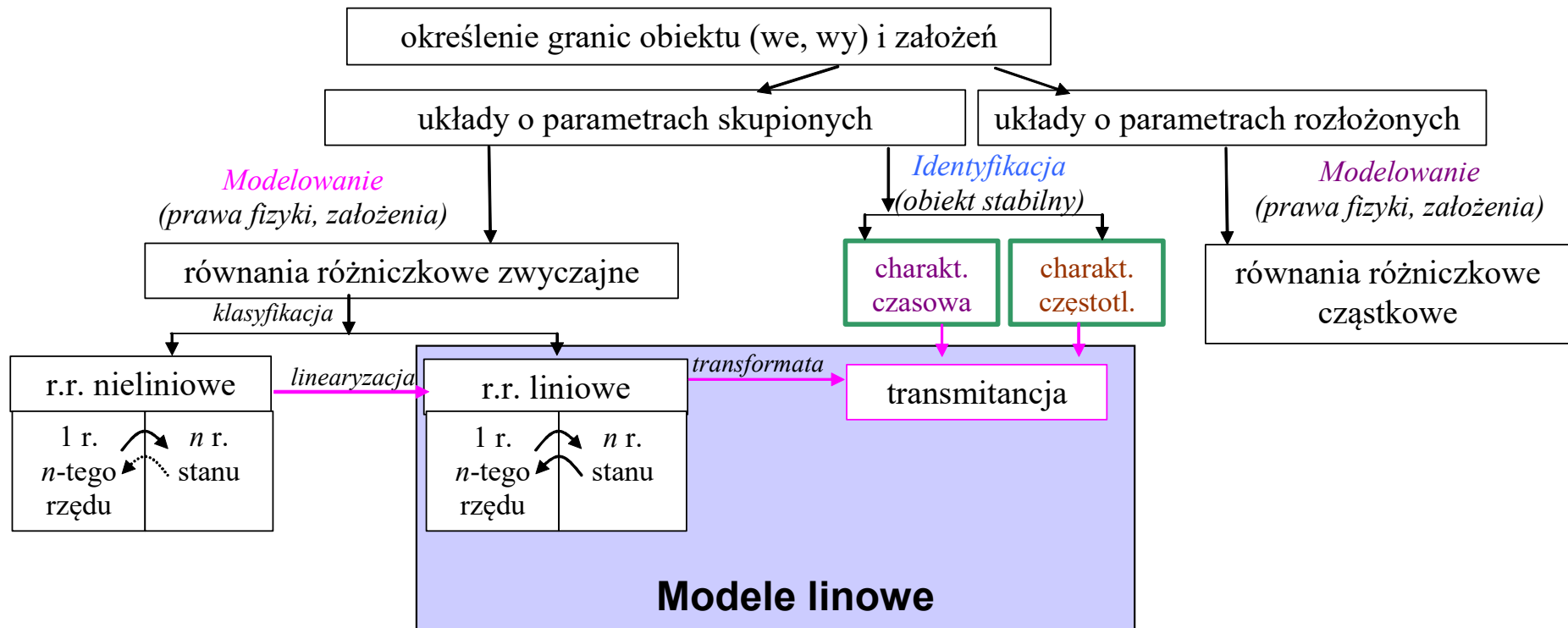


Przesunięcie układu odniesienia
(układy liniowe)



Ustalenie punktu pracy w modelu

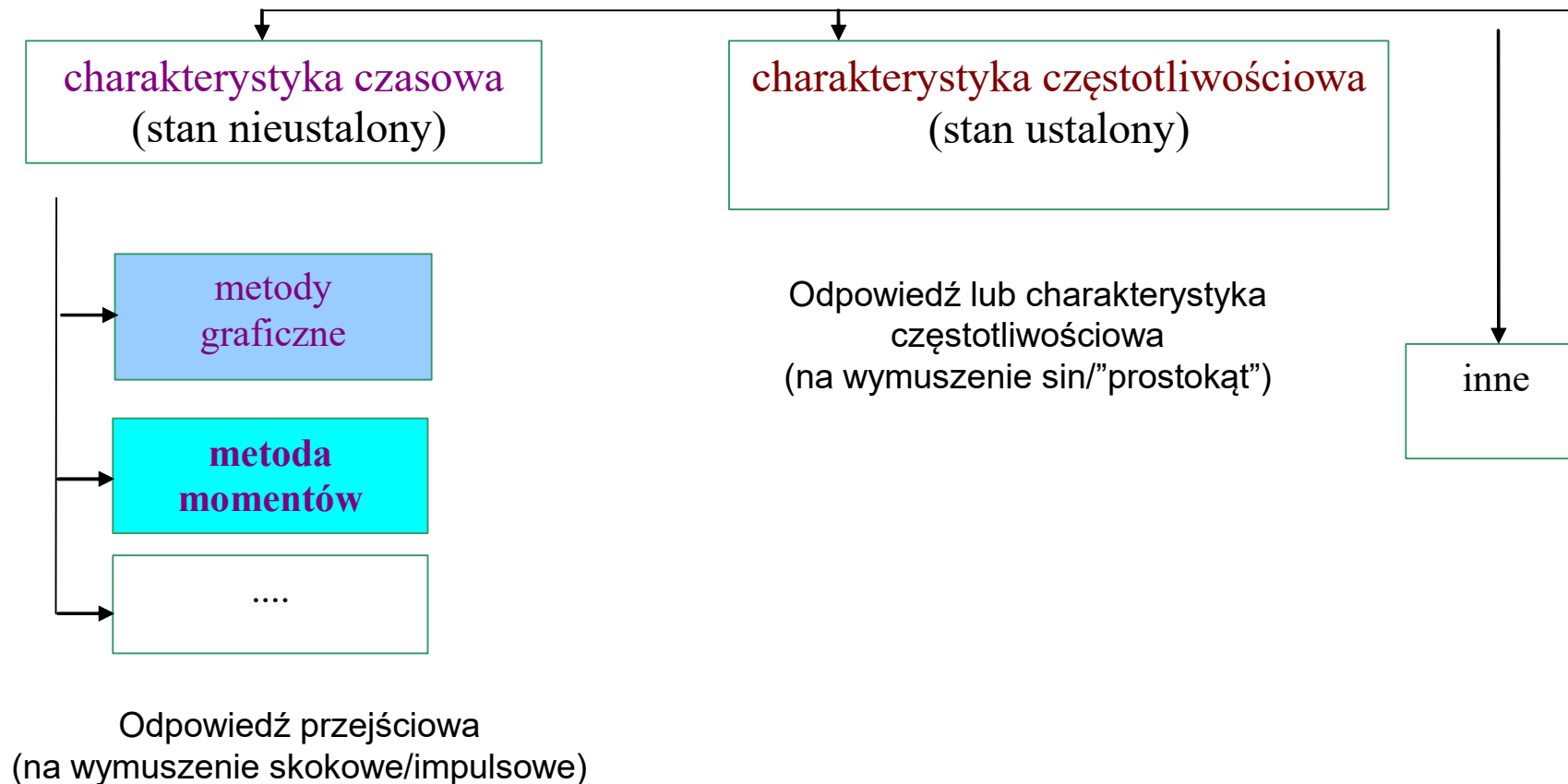
Modelowanie i identyfikacja – rodzaje modeli



Identyfikacja (eksperymentalna)

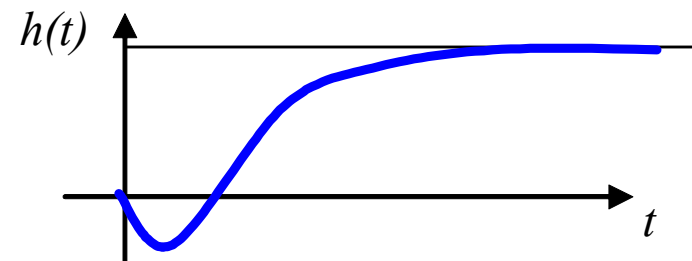
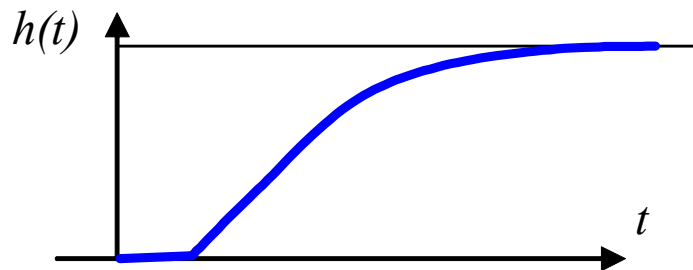
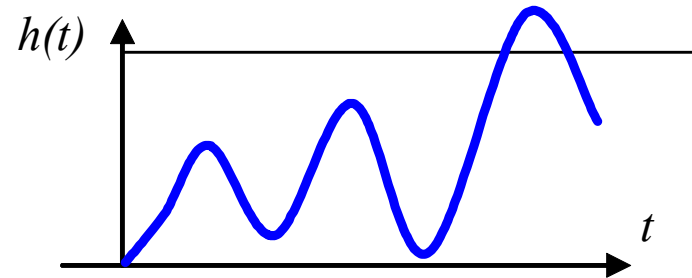
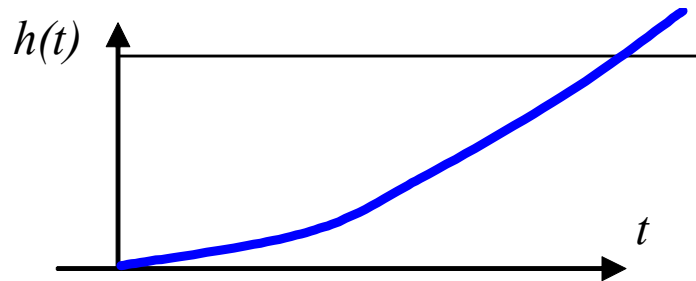
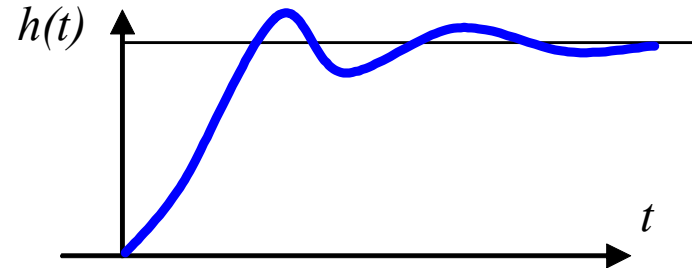
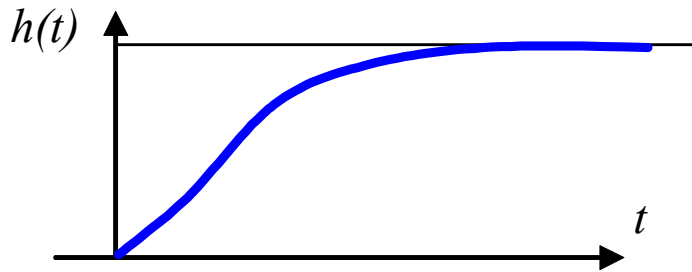
Identyfikacja (w automatyce):

- „rozpoznawanie” własności statycznych i dynamicznych obiektów/układów
- wyznaczenie zależności pomiędzy wejściem a wyjściem na podstawie danych doświadczalnych
- dobór parametrów modelu w taki sposób aby reakcje modelu pasowały do danych doświadczalnych



Modele linowe, stabilne

Metody graficzne (reakcja na 1(t))

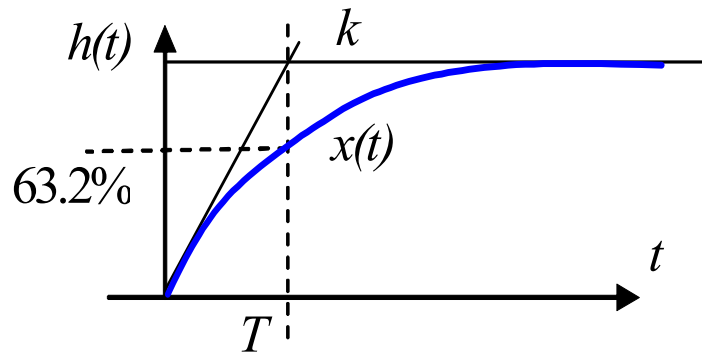


Metody graficzne (reakcja na 1(t))

Obiekty bez całkowania i oscylacji

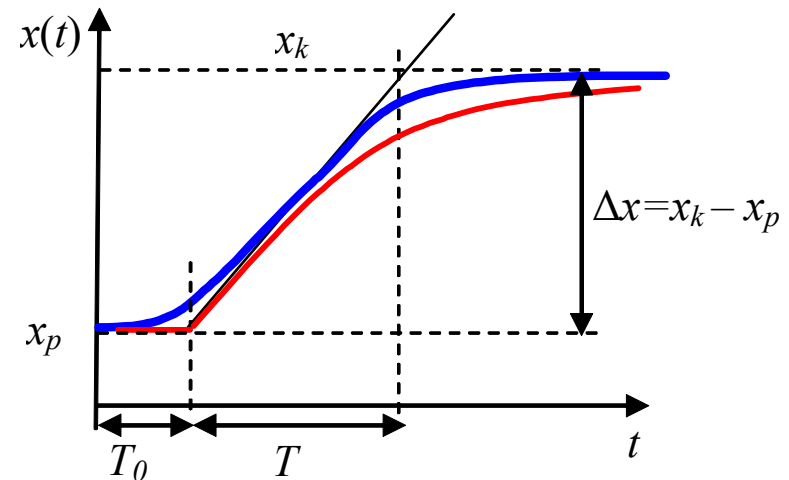
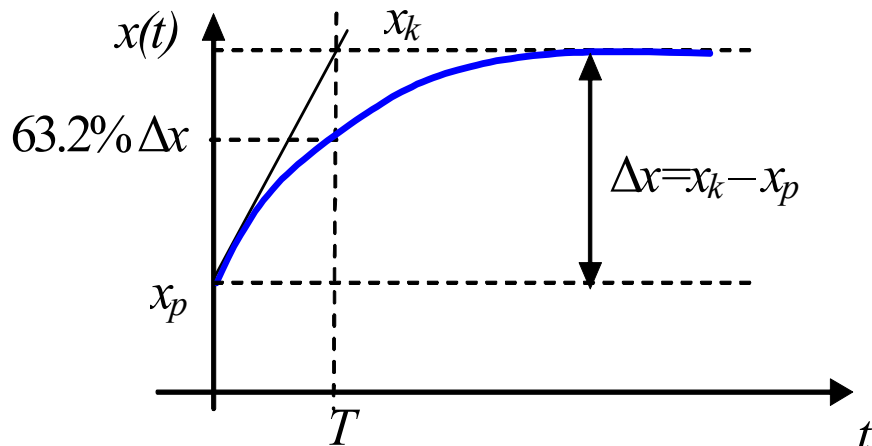
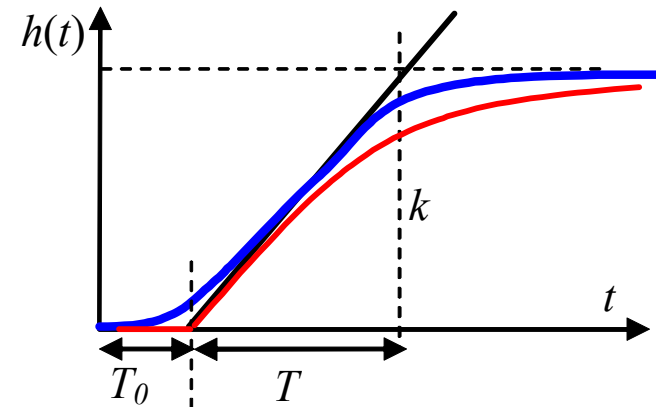
obiekt 1. rzędu

$$\frac{k}{Ts + 1}$$



obiekt rzędu > 1

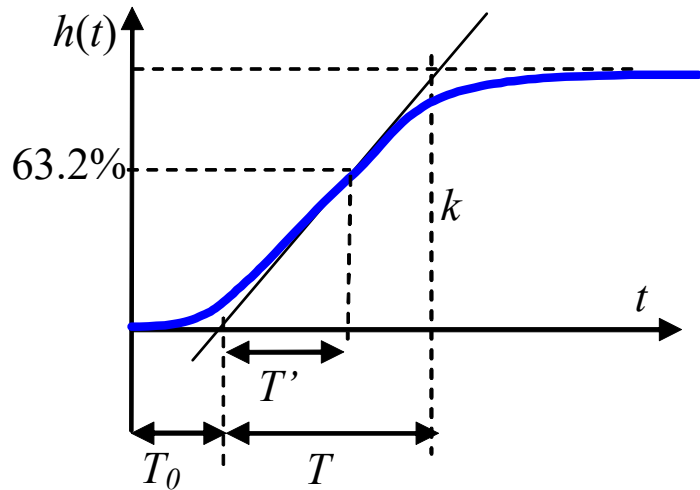
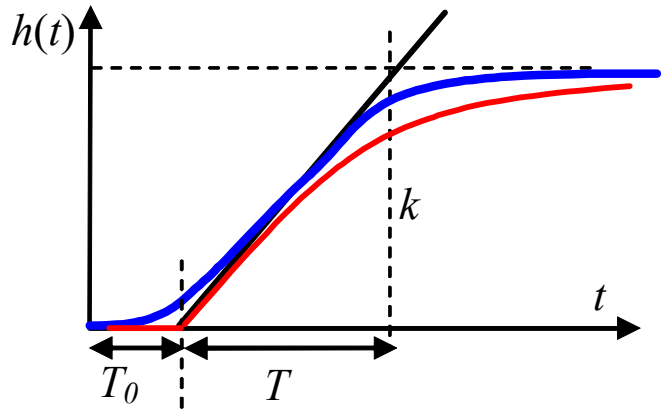
$$\frac{k}{Ts+1} e^{-sT_0}$$



$$k = \frac{\Delta x}{\Delta u}$$

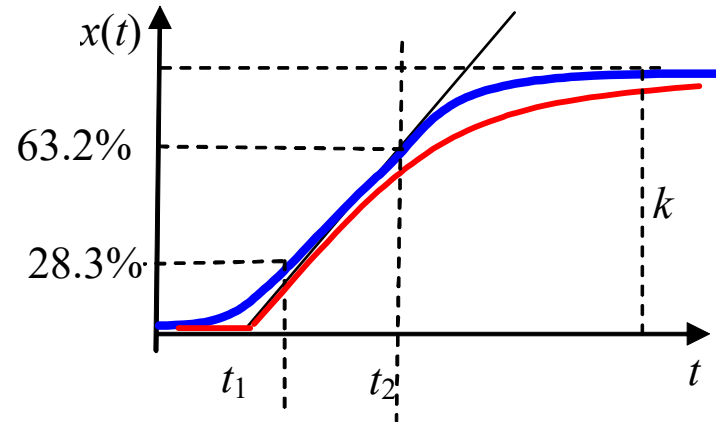
Metody graficzne (reakcja na 1(t))

Obiekty bez całkowania i oscylacji



alternatywna wartość stałej czasowej (T')

obiekt rzędu > 1



$$T = 1.5 \cdot (t_2 - t_1), \quad T_o = t_2 - T$$

Dobre wyniki dla: $0.15 < \frac{T_o}{T} < 0.6$

FOTD (First-Order System with Time Delay)

Idea Kűpfműllera (1928r.)

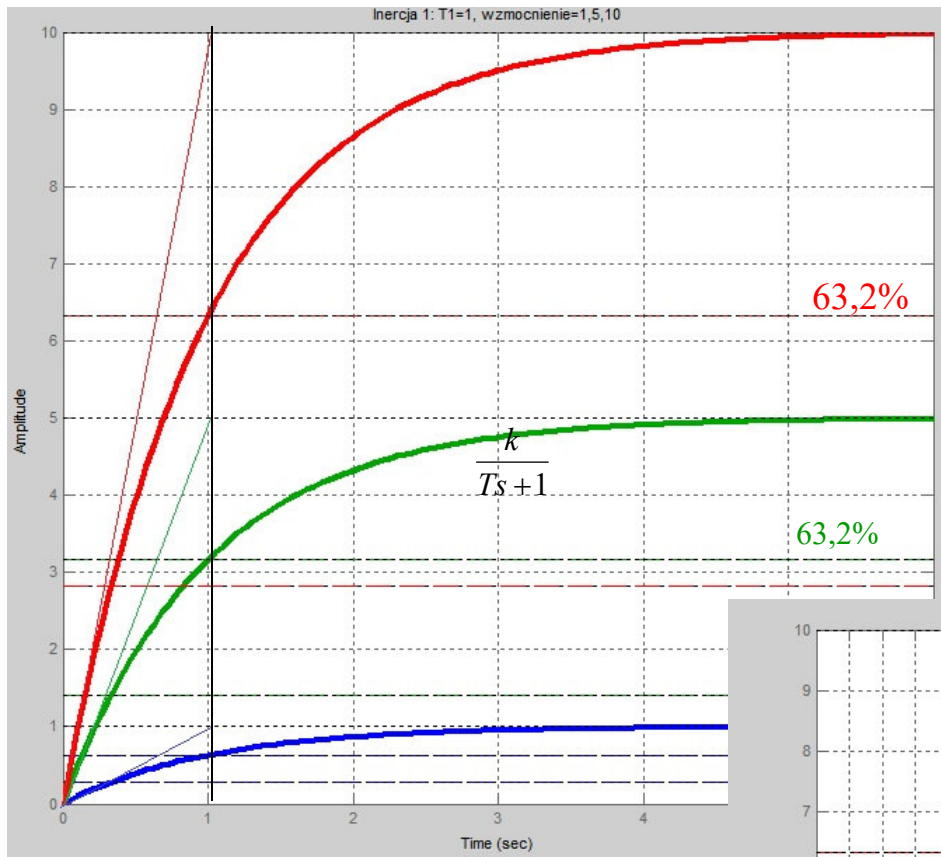
$$\frac{k}{Ts+1} e^{-sT_o}$$

aproxymacja Padé

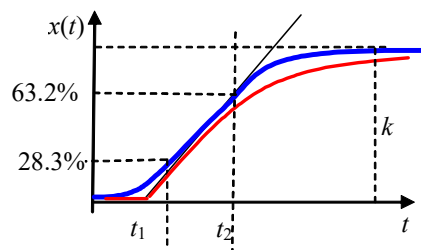
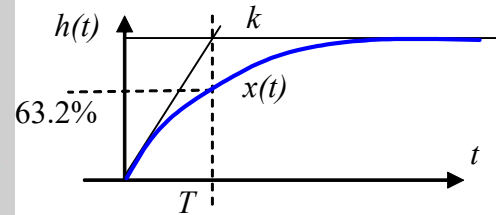
$$e^{-sT_o} \approx \frac{1 - sT_o/2}{1 + sT_o/2}$$

transmitancje wymierne

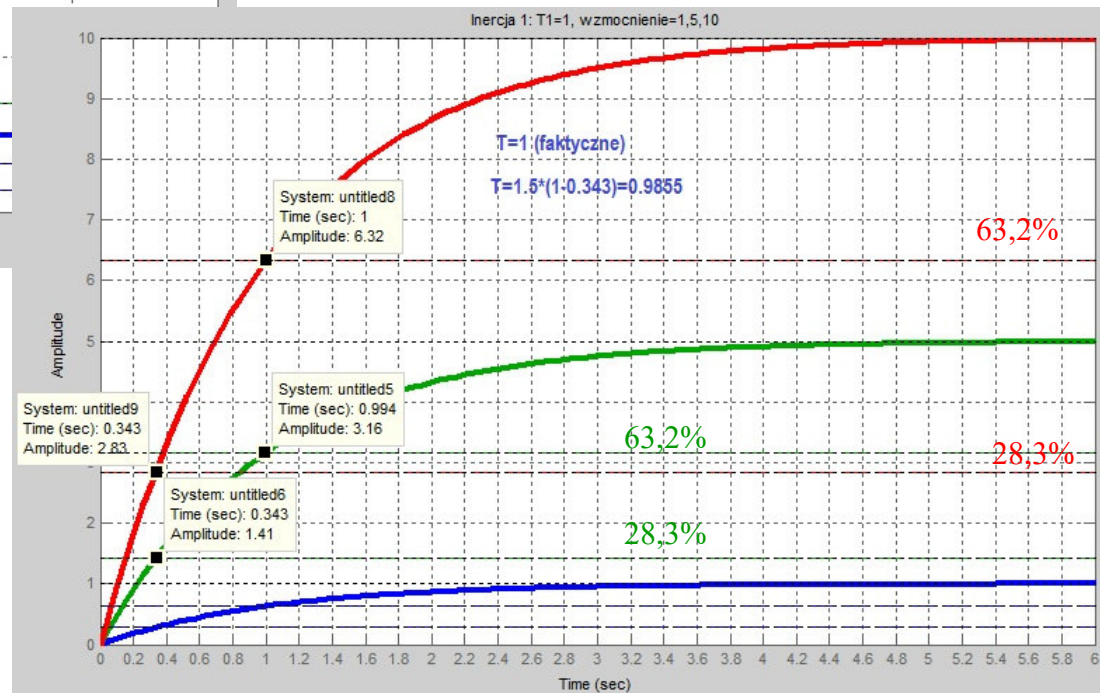
Metody graficzne (reakcja na 1(t))



Przykład: $\frac{k}{Ts+1}$, $T=1, k=[1, 5, 10]$



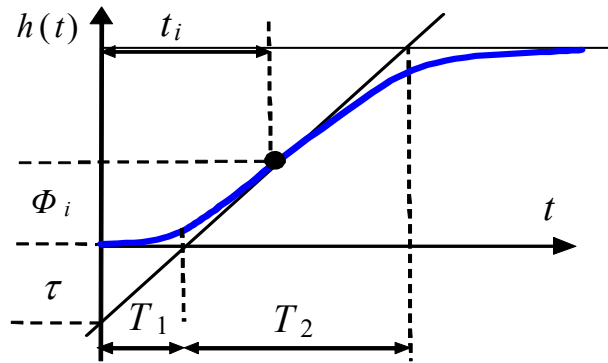
$$T = 1.5 \cdot (t_2 - t_1),$$



Metody graficzne (reakcja na 1(t))

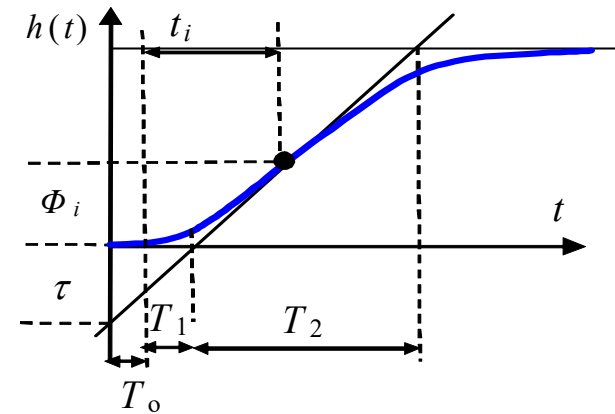
Obiekty n-tego rzędu (bez całkowania i oscylacji)

model Strejca (1)



$$\frac{k}{(1+sT)^n}$$

$$\frac{k}{(1+sT)^n} e^{-sT_0}$$



1. wyznacz punkt przegięcia Q
2. znajdź $\tau = T_1 / T_2$
3. wyznacz rząd n z tablicy
 - jeśli τ pomiędzy - wprowadź T_0
4. wyznacz T na podstawie t_i / T
5. sprawdź wg $T_1 / T, T_2 / T$

n	T2/T	T1/T	T1/T2	t _i /T	Φ _i
1	1	0	0	0	0
2	2,718	0,282	0,104	1	0,264
3	3,695	0,805	0,218	2	0,323
4	4,463	1,425	0,319	3	0,353
5	5,119	2,100	0,410	4	0,371
6	5,699	2,811	0,493	5	0,384
7	6,226	3,549	0,570	6	0,394
8	6,711	4,307	0,642	7	0,401
9	7,164	5,081	0,709	8	0,407
10	7,590	5,869	0,773	9	0,413

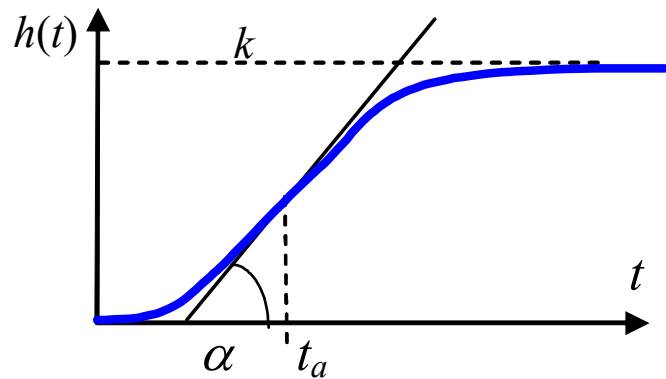
Metody graficzne (reakcja na 1(t))

Obiekty n-tego rzędu (bez całkowania i oscylacji)

model Strejca (2)

$h(t)$ – odpowiedź skokowa

$g(t)$ – odpowiedź impulsowa



$$G(s) = \frac{k}{(1+sT)^n}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{k}{(n-1)!T} \left(\frac{t}{T}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{T}}$$

punkt przegięcia $h(t)$:

$$\frac{d^2 h(t_a)}{dt^2} = \frac{dg(t_a)}{dt} = 0$$

$$t_a = T(n-1)$$

nachylenie $h(t)$:

$$\operatorname{tg} \alpha$$

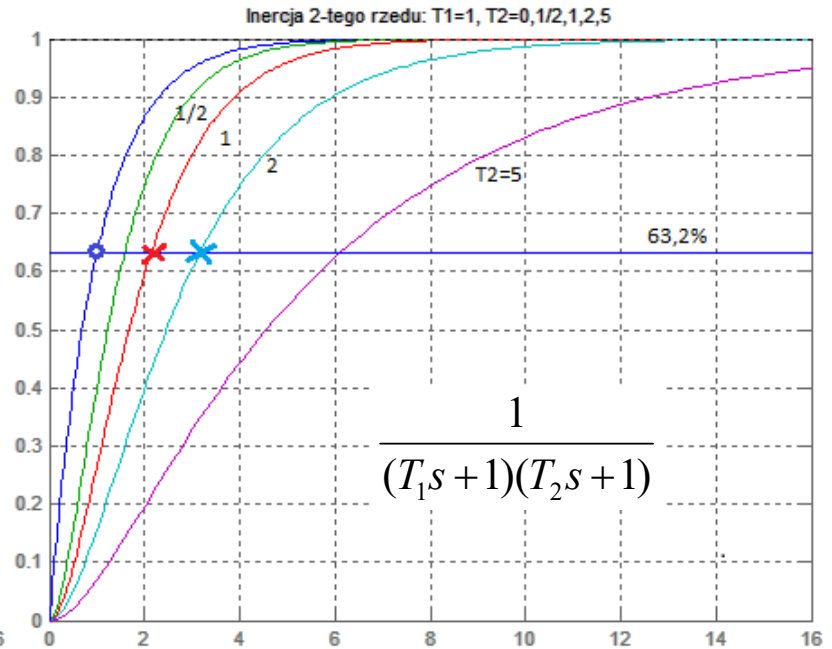
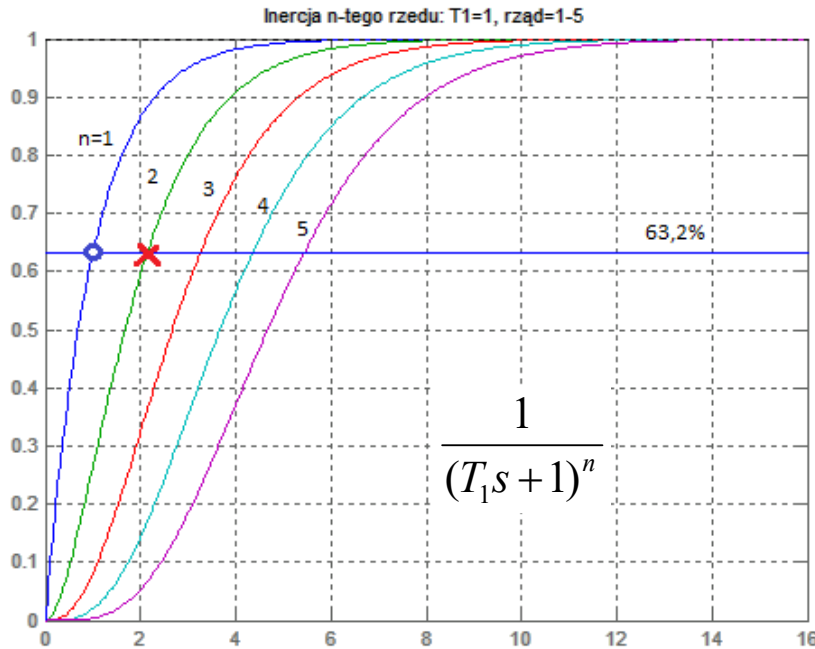
$$g(t_a) = \frac{k}{T} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-n}$$

wzór Stirlinga $n! \cong n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

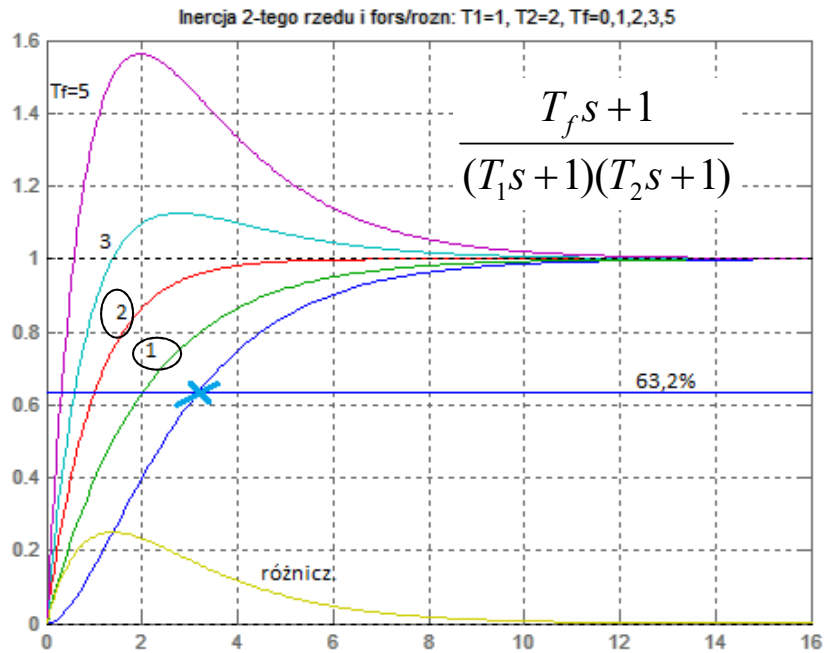
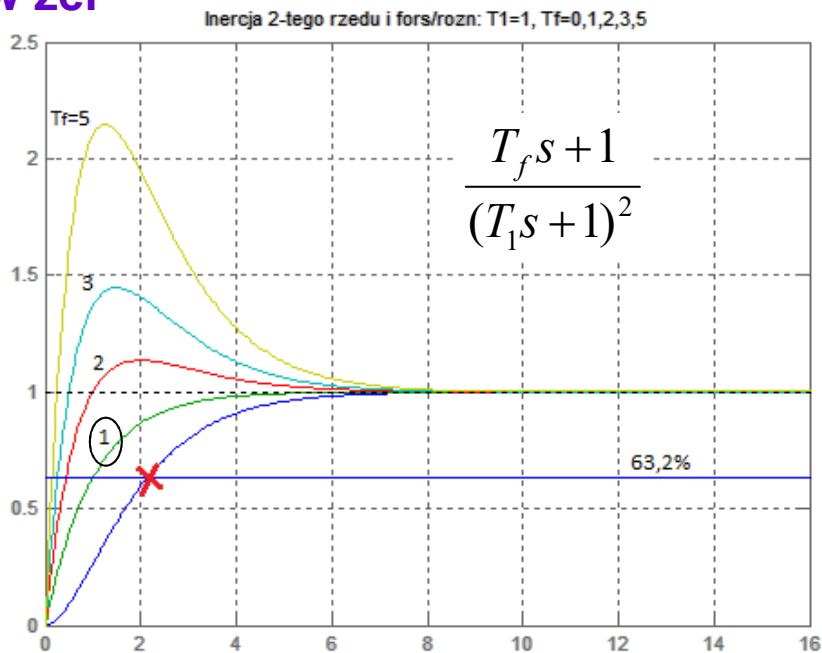
$$n = 1 + 2\pi \frac{t_a^2 g^2(t_a)}{k^2}$$

$$t_a, k, \operatorname{tg} \alpha = g(t_a) \rightarrow n, k, T$$

Metody graficzne (reakcja na 1(t))



Wpływ zer



Metody graficzne (reakcja na 1(t))

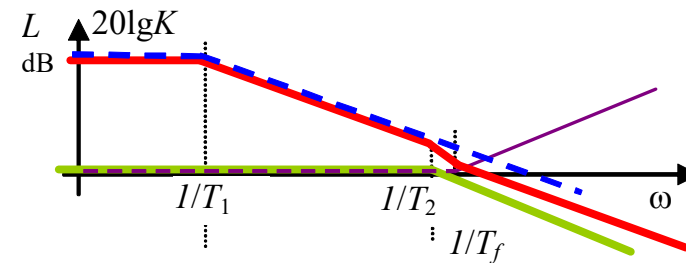
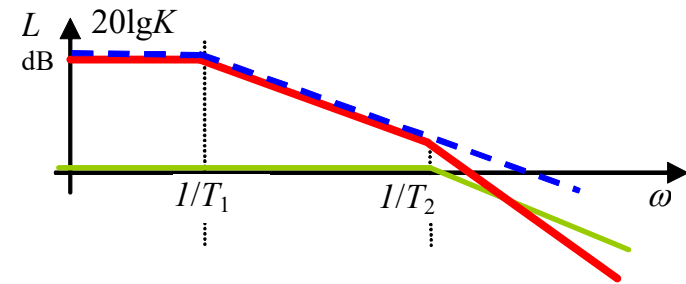
Obiekty z ujemnym „zerem”

Przykładowy układ nieunilateralny („kaskada współdziałająca”)

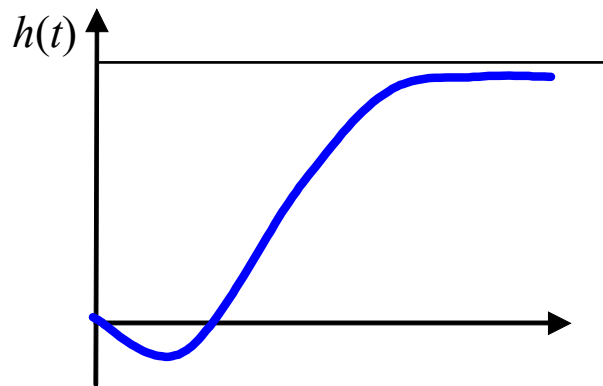
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

$$x_1(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+2)-1} u_1(s) + \frac{1}{(s+1)(s+2)-1} u_2(s)$$

$$x_2(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)-1} u_1(s) + \frac{s+1}{(s+1)(s+2)-1} u_2(s)$$



Obiekty z dodatnim „zerem”

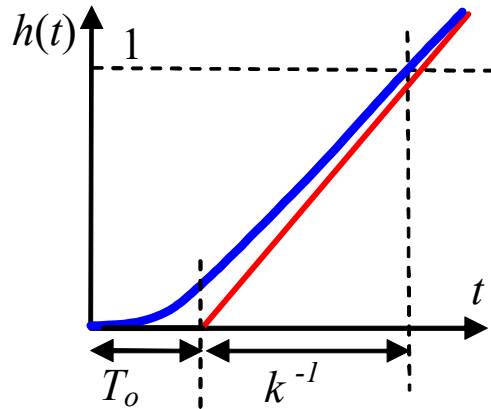


$$\frac{k}{Ts+1} e^{-sT_0}$$

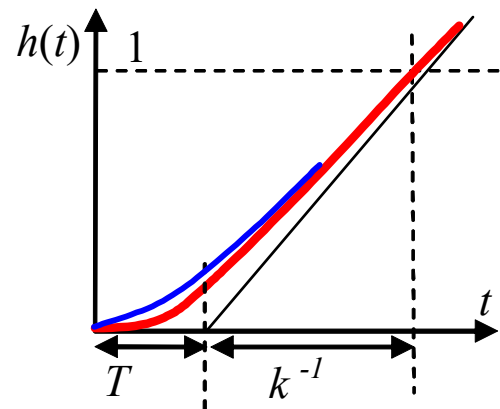
$$e^{-sT_0} \approx \frac{1-sT_0/2}{1+sT_0/2}$$

Metody graficzne (reakcja na 1(t))

Obiekty astatyczne z całkowaniem



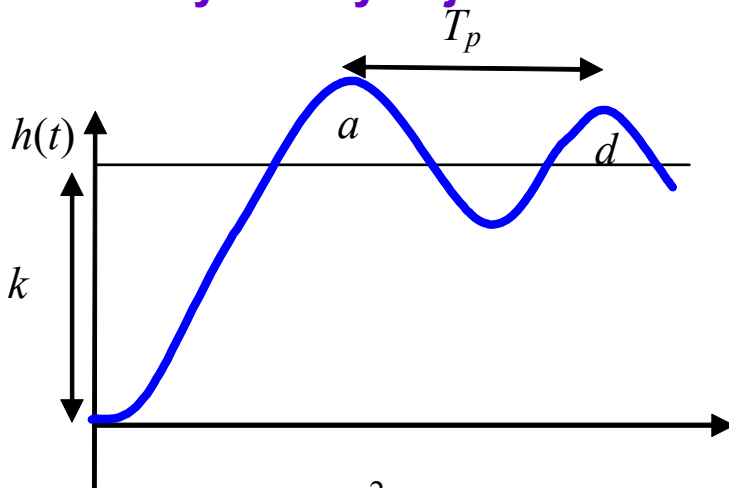
$$\frac{k}{s} e^{-sT_o}$$



$$\frac{k}{s(Ts + 1)}$$

PID Control, Astrom/2.4 (s.21)

Obiekty z oscylacjami



$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$d = e^{-2\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

↓

$$\xi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + (2\pi / \log d)^2}}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_p \sqrt{1-\xi^2}}$$

PID Control, Astrom/2.4 (s.23)

Identyfikacja na podstawie odpowiedzi impulsowej (reakcja na $\delta(t)$)

Metoda momentów

podstawy

Moment funkcji - interpretacja graficzna

- moment zerowy $m_0 = \int_0^{\infty} x(t) dt$
powierzchnia pod krzywą $x(t)$

- moment pierwszy $m_1 = \int_0^{\infty} tx(t) dt$
powierzchnia pod krzywą $tx(t)$

Odpowiedź impulsowa $g(t)$ a transmitancja $G(s)$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

$$x(s) = G(s) * u(s), \quad \text{gdzie } u(t) = \delta(t), \Rightarrow x(s) = G(s) * 1$$

Rozwinięcie $x(s)$ w szereg Taylora w otoczeniu $s=0$

$$x(s)|_{s=0} \approx x(0) + \frac{1}{1!} s x^{(1)}(0) + \frac{1}{2!} s^2 x^{(2)}(0) + \dots$$

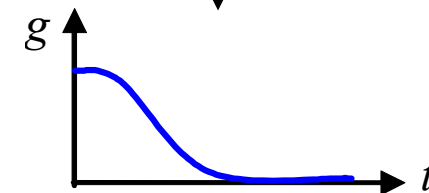
$$m_i = (-1)^i x^{(i)}(s=0)$$

$m_i = i$ -ty moment funkcji $x(t)$

$x^{(i)}(s) =$ pochodna transformaty funkcji $x(t)$

$$m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \frac{1}{3!} m_3 s^3 + \dots$$

pomiary momentów (m_0, m_1, \dots)



gdy $u(t) = \delta(t)$

$$G(s) = x(s)$$

Identyfikacja na podstawie odpowiedzi impulsowej (reakcja na $\delta(t)$)

Metoda momentów

podstawy

$$x(s)|_{s=0} \approx x(0) + \frac{1}{1!} s x^{(1)}(0) + \frac{1}{2!} s^2 x^{(2)}(0) + \dots = m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \frac{1}{3!} m_3 s^3 + \dots$$

↓ gdy $u(t) = \delta(t)$

$$x(s) = G(s)$$

Zakładamy, np.:

$$G_{m,n}(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1} = (m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \dots)$$

$$(m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \dots)(1 + a_1 s + \dots + a_n s^n) = b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m$$

Wymnożyć i porównać współczynniki przy s

Gdy $u(t) = \delta(t)$

$$x(s) = G(s) \cdot 1 \Rightarrow G(s) = x(s)$$

Gdy $u(t) = 100 \cdot \delta(t)$

$$x(s) = G(s) \cdot 100 \Rightarrow G(s) = x(s)/100$$

$$\frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1} : 100$$

Identyfikacja na podstawie odpowiedzi impulsowej (reakcja na $\delta(t)$)

Metoda momentów

przykład

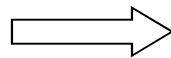
$$G_{2,3}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} = \left(m_0 - \frac{1}{1!} m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \dots \right)$$

$$\left(m_0 - \frac{1}{1} m_1 s + \frac{1}{2} m_2 s^2 - \frac{1}{6} m_3 s^3 \dots \right) (1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2$$

$$\begin{array}{l}
 m_0 \left| \begin{array}{l} + m_0 a_1 s \\ - m_1 s \end{array} \right| \begin{array}{l} + m_0 a_2 s^2 \\ - m_1 a_1 s^2 \\ + \frac{1}{2} m_2 s^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} + m_0 a_3 s^3 \\ - m_1 a_2 s^3 \\ + \frac{1}{2} m_2 a_1 s^3 \\ - \frac{1}{6} m_3 s^3 \end{array} \right| + \\
 \dots \dots \dots \left| \begin{array}{l} - m_1 a_3 s^4 + \\ + \frac{1}{2} m_2 a_2 s^4 + \frac{1}{2} m_2 a_3 s^5 + \\ - \frac{1}{6} m_3 a_1 s^4 - \frac{1}{6} m_3 a_2 s^5 - \frac{1}{6} m_3 a_3 s^6 + \\ \dots \dots \dots \end{array} \right| \\
 -b_0 \left| -b_1 s \right| -b_2 s^2 = 0
 \end{array}$$



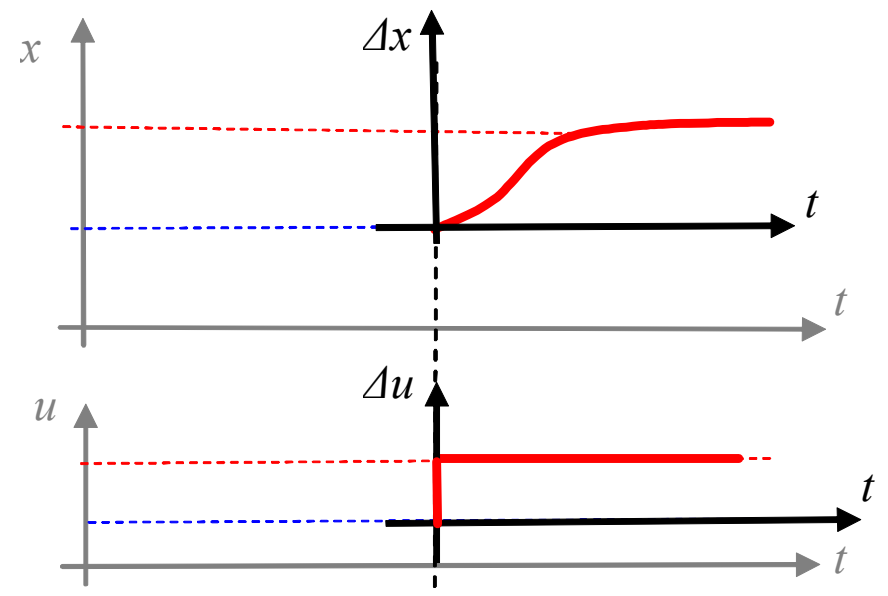
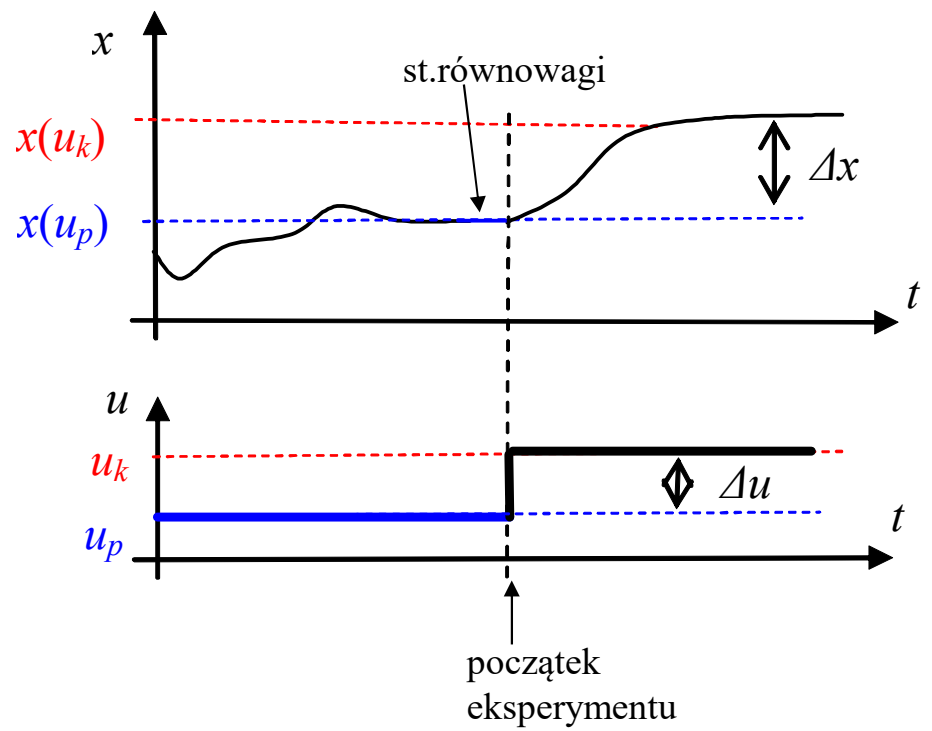
$$\begin{aligned}
 b_0 &= m_0 \\
 m_0 a_1 - b_1 &= m_1 \\
 m_0 a_2 - m_1 a_1 - b_2 &= \frac{1}{2} m_2 \\
 \dots &
 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ m_1 & -m_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} m_2 & -m_1 & m_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} m_3 & -\frac{1}{2} m_2 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} m_4 & -\frac{1}{6} m_3 & \frac{1}{2} m_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \frac{1}{2} m_2 \\ \frac{1}{6} m_3 \\ \frac{1}{24} m_4 \\ \frac{1}{120} m_5 \end{bmatrix} \quad 17$$

Identyfikacja na podstawie reakcji na wymuszenie skokowe/impulsowe

Eksperyment na rzeczywistym obiccie



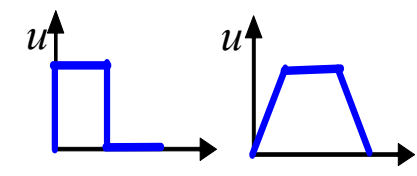
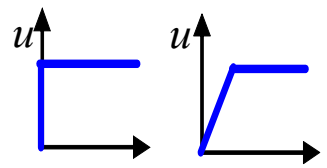
wzmocnienie układu: $k = \frac{\Delta x}{\Delta u}$

Dodać weryfikację modelu i porównanie jakości różnych metod na ch-kach czasowych i częstotliwościowych

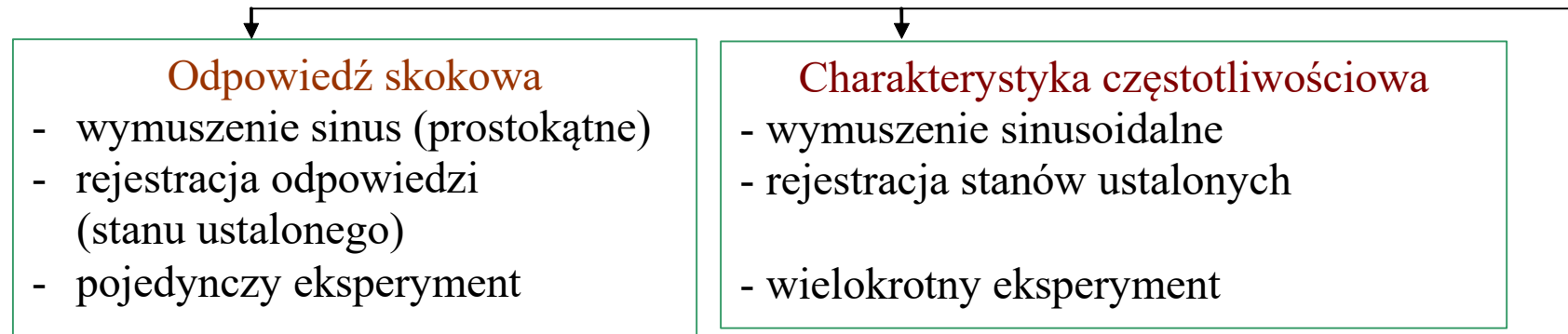
odpowiedź na wymuszenie skokowe

$\xrightarrow{\text{różn.}}$
 $\xleftarrow{\text{całk.}}$

odpowiedź na wymuszenie impulsowe

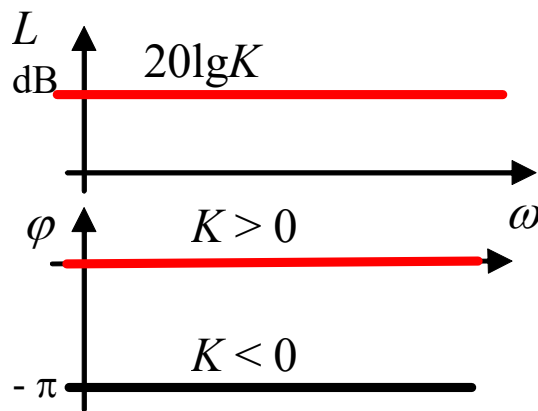


Identyfikacja na podstawie odpowiedzi/charakterystyk częstotliwościowych

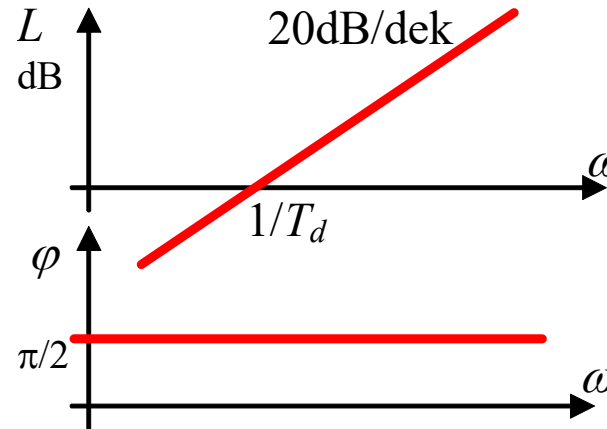


Identyfikacja na podstawie charakterystyk częstotliwościowych

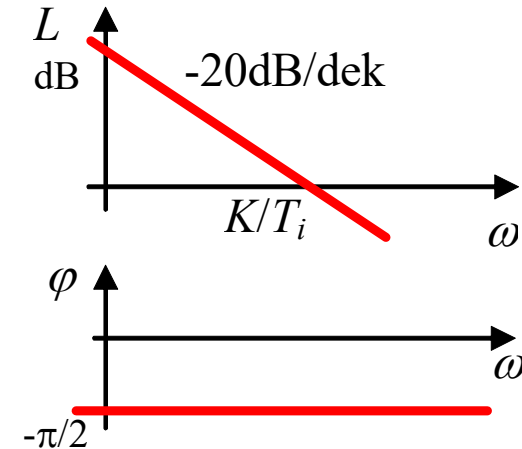
$$G(j\omega) = K$$



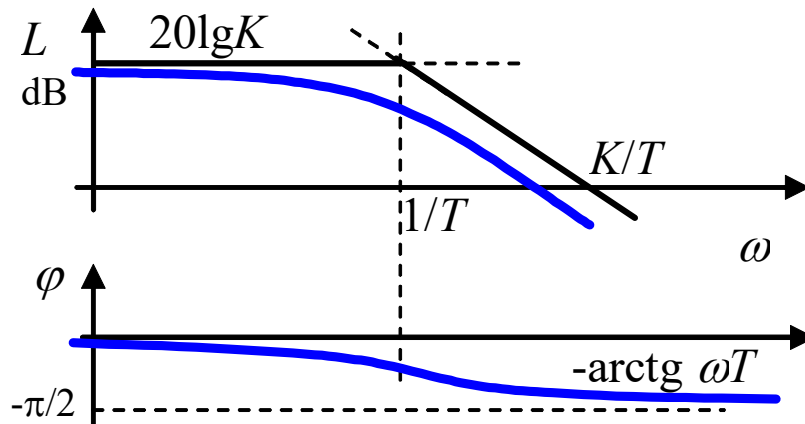
$$G(j\omega) = j\omega T_d$$



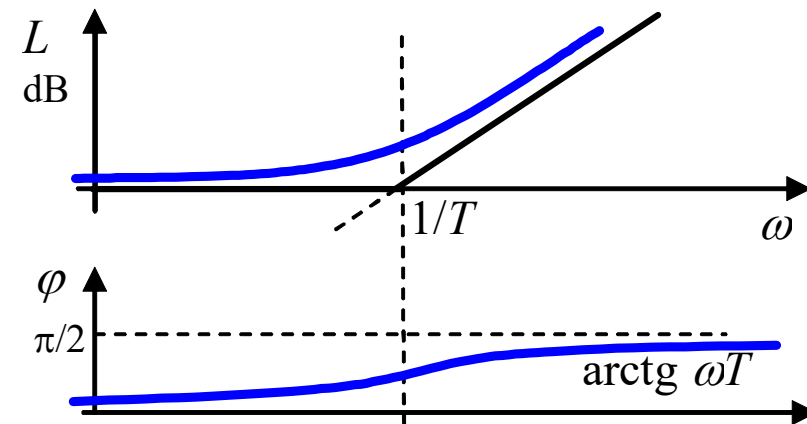
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T_i} = -j \frac{K}{\omega T_i}$$



$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$



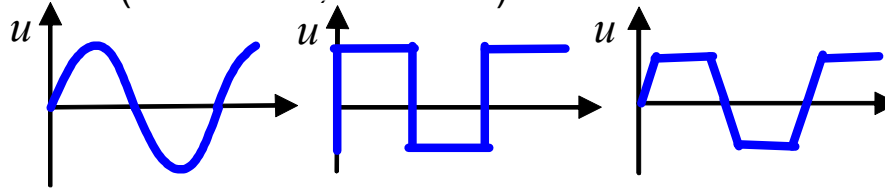
$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$



Identyfikacja na podstawie charakterystyk częstotliwościowych

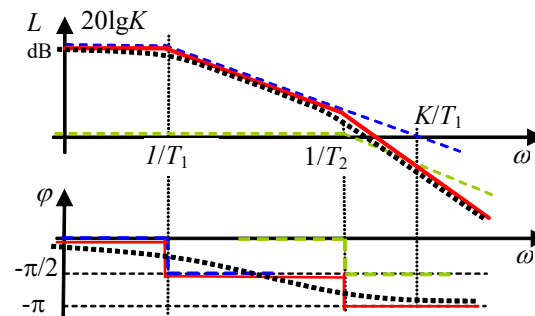
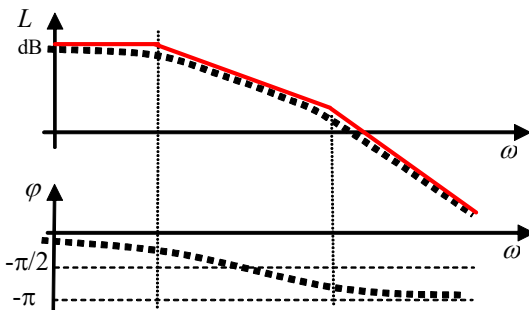
1. Zarejestruj stany ustalone odpowiedzi układu na wymuszenia harmoniczne w odpowiednim zakresie częstotliwości i amplitud. W układach liniowych:

- \sin na wejściu \rightarrow \sin na wyjściu (ta sama częstotliwość)
- przybliżenia



2. Przedstaw wyniki w postaci logarytmicznych wykresów modułu $L(\omega)$ i fazy $\varphi(\omega)$.

3. Na podstawie wykresu modułu odtwórz przebieg charakterystyki asymptotycznej, tzn. krzywą łamaną o nachyleniach, które są wielokrotnościami $\pm 20\text{dB/dek}$.



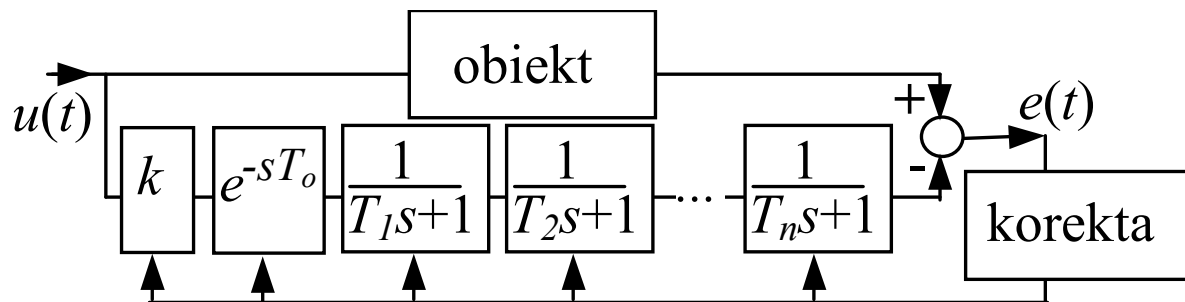
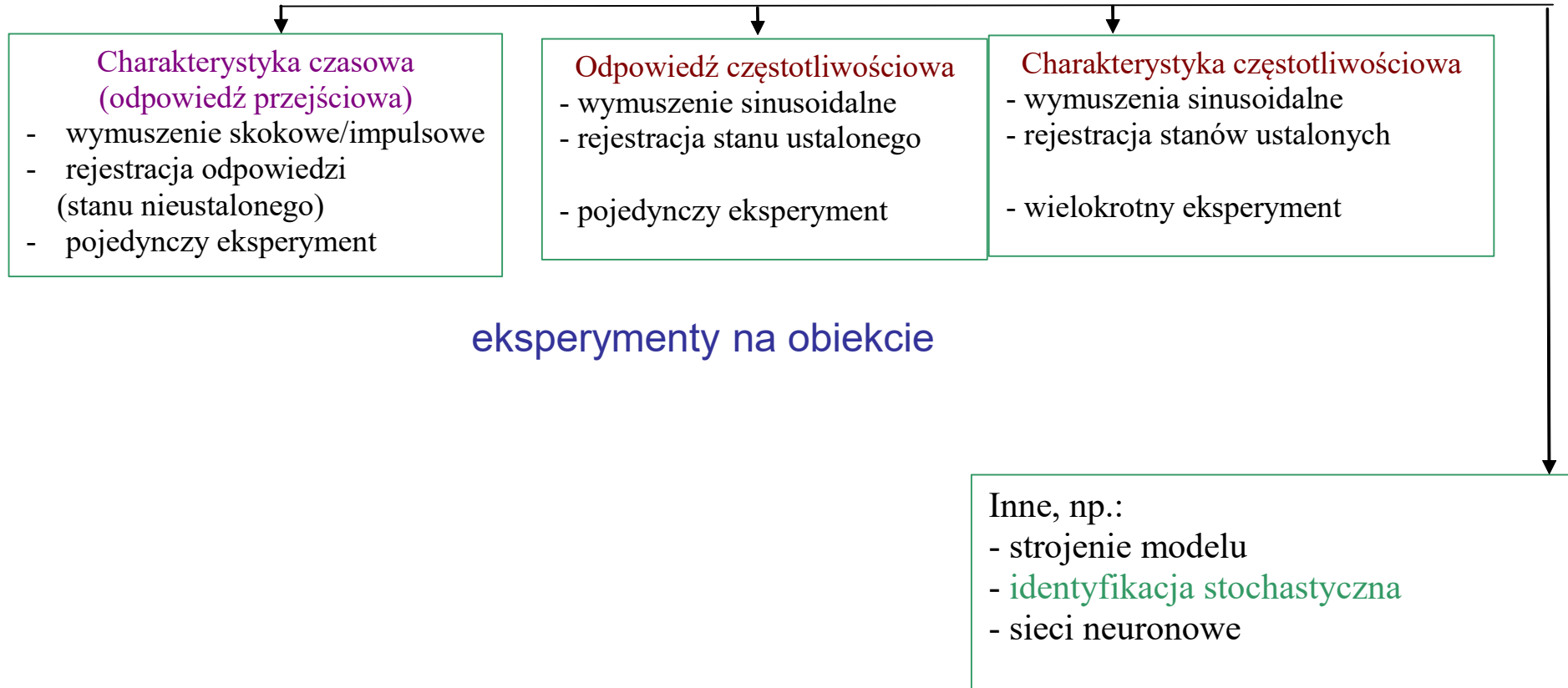
4. Na podstawie charakterystyki asymptotycznej odtwórz się charakterystykę fazową części minimalnofazowej - $\varphi^*(\omega)$.

5. Porównując charakterystykę $\varphi^*(\omega)$ z wykresem doświadczalnym $\varphi(\omega)$, zidentyfikuj człony nieminimalnofazowe (opóźnienie, przesuwnik fazowy) lub stwierdź ich brak.

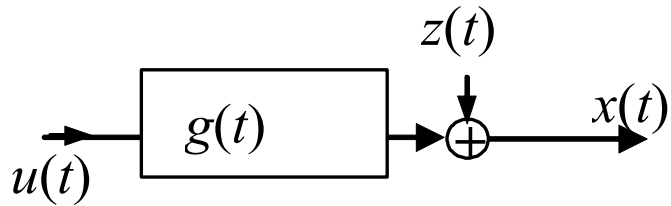
6. Porównanie wykresów $\varphi^*(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ pozwala też na korektę asymptotycznego wykresu modułu, szczególnie w przypadku występowania członów oscylacyjnych.

7. Na podstawie charakterystyki asymptotycznej zidentyfikuj człony minimalnofazowe.

Porównanie metod identyfikacji



Identyfikacja stochastyczna (estymacja parametrów)



Odpowiedź impulsowa $g(t)$ a transmitancja $G(s)$

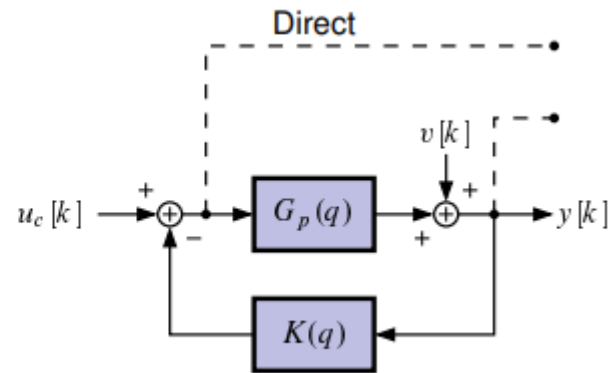
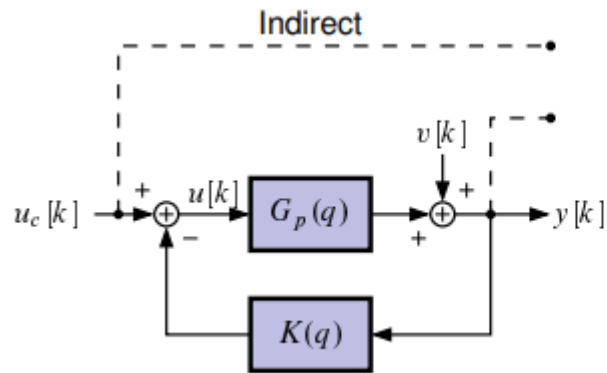
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

$$x(s) = G(s) * u(s), \quad \text{gdzie } :u(t) = \delta(t), \Rightarrow x(s) = G(s) * 1$$

Identyfikacja obiektów niestabilnych

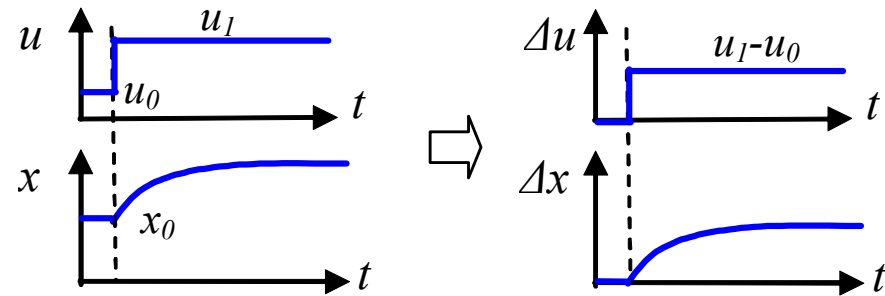
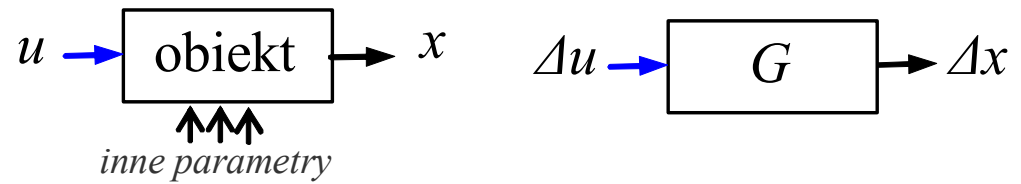
„closed-loop identification of transfer function model for unstable systems”

Metody pośrednie i bezpośrednie

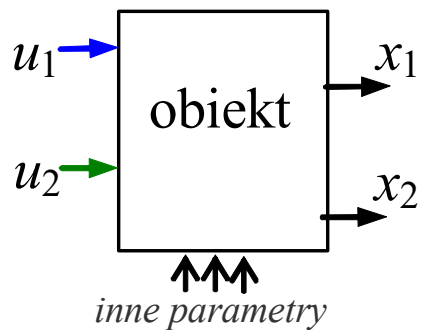


Identyfikacja eksperymentalna - własności

- modele liniowe, stabilne
- modele black-box
- SISO
- możliwa automatyzacja

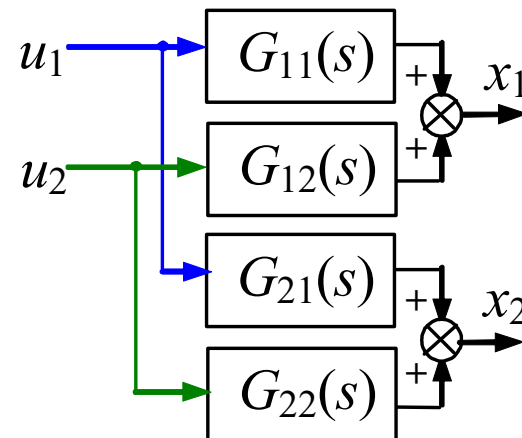


MIMO

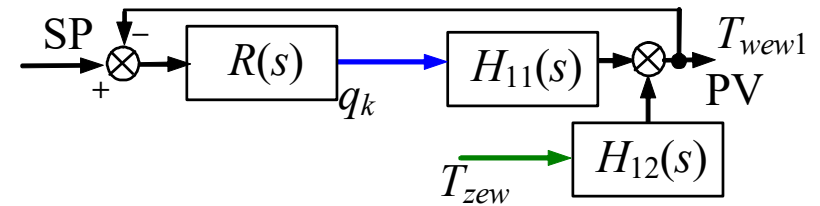
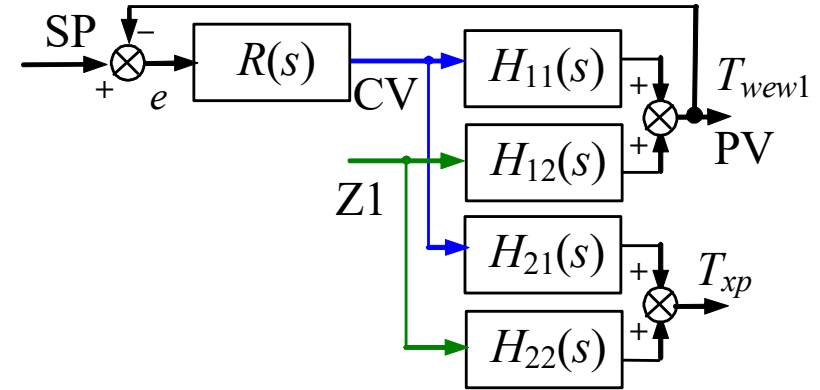
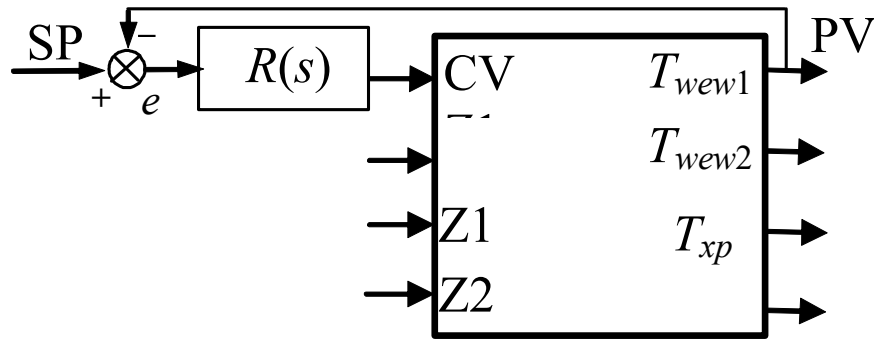


$$x_1(s) = G_{11}(s)u_1(s) + G_{12}(s)u_2(s)$$

$$x_2(s) = G_{21}(s)u_1(s) + G_{22}(s)u_2(s)$$



Identyfikacja na potrzeby projektowania



Struktura modelu

