

III. Analiza i projektowanie układów liniowych

7. Własności obiektów

7.1. Interpretacja fizyczna rozwiązania i stabilność układu

7.1.1. Stabilność

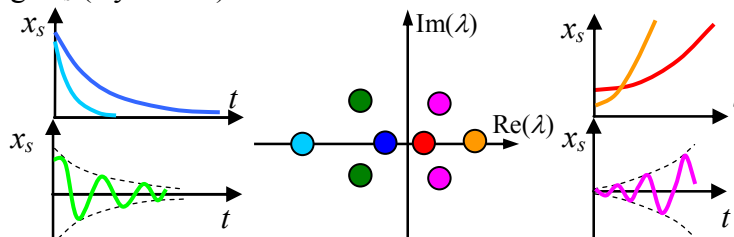
Równania różniczkowe stosowane w praktyce inżynierskiej do opisu dynamiki układów fizycznych (obiektów/procesów technologicznych) wynikają z podstawowych praw fizyki. Mogą to być równania zarówno liniowe, jak i nieliniowe (p. 2). W przypadku równań nieliniowych stosuje się różne metody upraszczania opisu (np. dodatkowe założenia, linearyzacja), tak aby otrzymać równania (modele) liniowe, co pozwala wykorzystywać różne narzędzia (metody) analityczne wynikające z możliwości rozwiązywania równań liniowych.

Funkcja $x(t)$, która jest rozwiązaniem równania różniczkowego opisuje reakcję układu (obiektu) na określone wymuszenie (sygnał) podawane na wejście układu $u(t)$. Rozwiązanie szczególne opisuje tę reakcję w warunkach, gdy wymuszenie zostało podane na układ (obiekt), który znajdował się w konkretnych warunkach początkowych. Warunki początkowe są niejako podsumowaniem całej przeszłości układu do chwili $t=0$ – znamy wymuszenie i stan układu (warunki początkowe) w chwili $t=0$ i nie ważne jakie było wcześniej wymuszenie i co się działo w układzie¹.

W rozwiązaniu $x(t)$ wyróżnia się dwie składowe:

- składowa swobodna $x_s(t)$, która nie zależy od wymuszenia (sygnału wejściowego) a jedynie od własności (parametrów) samego układu – to składowa, która decyduje o stabilności układu,
- składowa wymuszona $x_w(t)$, która zależy zarówno od wymuszenia, jak i od własności układu – to składowa opisująca zachowanie układu w stanie równowagi.

Jeśli całe rozwiązanie swobodne zanika z czasem do zera, to układ osiąga stan równowagi i mówimy, że układ jest **stabilny**. O stabilności układu decydują pierwiastki równania charakterystycznego, nazywane **biegunami układu**. Analizując własności funkcji (I-35)-(I-39) łatwo można wskazać związek pomiędzy położeniem biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej a własnościami rozwiązania swobodnego x_s (Rys. III-1).



Rys. III-1. Położenie biegunów a składowe rozwiązania

Bieguny, które leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej (mają ujemną część rzeczywistą), odpowiadają składowym rozwiązaniom, które zanikają z czasem. Bieguny w prawej półpłaszczyźnie (mają dodatnią część rzeczywistą) są związane ze składowymi (funkcjami) rosnącymi w nieskończoność ($\pm\infty$). Jeśli wszystkie bieguny układu leżą w lewej półpłaszczyźnie, to całe rozwiązanie swobodne $x_s(t)$ zanika z czasem, a to oznacza, że układ jest stabilny. Jeśli bieguny są liczbami zespolonymi, to część rzeczywista odpowiada za stabilność, a część urojona za występowanie oscylacji i ich częstotliwość.

7.1.2. Stan równowagi i punkt równowagi

Jeśli na wejście układu stabilnego $u(t)$ podawane jest ograniczone wymuszenie, to sygnał wyjściowy układu (rozwiązanie $x(t)$) też będzie ograniczony – składowa $x_s(t)$ zanika i pozostaje tylko ograniczona składowa $x_w(t)$. W szczególności gdy wymuszenie ma stałą wartość (u_k), to układ stabilny zawsze dochodzi do punktu równowagi (x_k). Układ niestabilny trwa w punkcie równowagi tylko gdy jest to jego stan początkowy – najmniejsze zakłócenie powoduje trwałe oddalenie od tego punktu (\cdot).



Rys. III-2. Punkt równowagi stabilnej (s) i niestabilnej (n)

Jeśli układ ma punkt równowagi (jedno rozwiązanie)² i warunki początkowe ... to

Stan równowagi a punkt równowagi. Punkt pracy. Wzmocnienie (tu? jest już używane w r.8!!!)?

¹ w ogólności warunki początkowe mogą być określone w innej chwili czasu

² p. 1.2.2 - układ oznaczony i nieoznaczony

7.1.3. Podstawowe elementy analizy dynamiki układu

Równanie różniczkowe jest ogólną formą modelu obiektu (układu), która zawiera pełny opis własności statycznych i dynamicznych. Znając równanie różniczkowe można je próbować rozwiązać, choć to nie zawsze jest konieczne lub możliwe. Funkcja rozwiązania nawet dla układów liniowych może być dość złożona. Tymczasem już najprostsze elementy analizy dostarczają informacji o spodziewanych własnościach obiektu. Na przykład:

$$a) a\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + bx(t) = 2u(t)$$

$$d) 4\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x^2(t) = u(t)$$

$$b) 3\dot{x}(t) + 4\dot{u}(t) = bx(t) + 2u(t)$$

$$c) \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = au(t)$$

1° Napisz równanie statyczne i charakterystyczne układu. (*^f)

2° Naszkicuj charakterystykę statyczną układu.

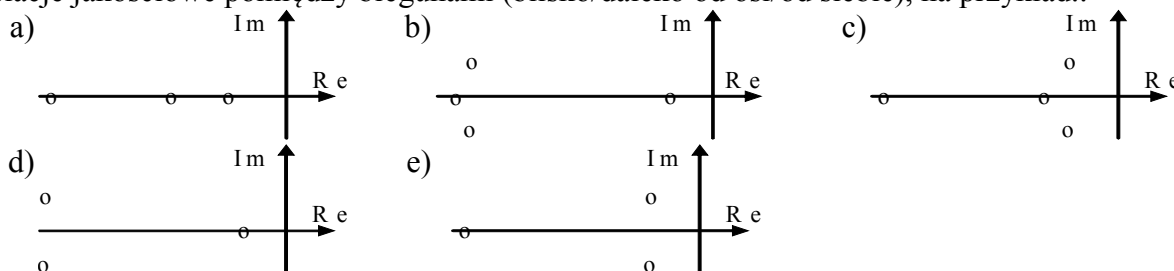
3° Ile punktów równowagi ma układ? Wyznacz je dla $u(t) = u_0$.

4° Ile biegunów ma układ? Wyznacz je – analitycznie lub symulacyjnie. (*^g)

7.1.4. Waga (znaczenie) biegunów

Nawet pojedynczy dodatni biegun¹ układu determinuje niestabilność układu. Natomiast bieguny ujemne mają różny wpływ na postać rozwiązania swobodnego – nie wszystkie są tak samo ważne. Stąd wynikają możliwości **uproszczenia modeli** przez pomijanie nieistotnych biegunów², co obniża rząd układu i ułatwia analizę.

Można również nie zmieniać modelu tylko zastosować **ograniczenie analizy** do najbardziej istotnych biegunów. Przedstawienie biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej pomaga zauważyć relacje jakościowe pomiędzy biegunami (blisko/daleko od osi/od siebie), na przykład.:



1° Która składowa w rozwiązaniu swobodnym zaniknie najszybciej? Uzasadnij.

2° Który biegun ma decyduje o czasie zanikania rozwiązania swobodnego? Uzasadnij.

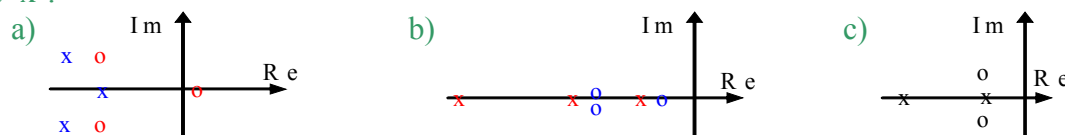
3° Które z biegunów są najbardziej znaczące?

4° Które bieguny można by pominąć przy analizie układu?

7.1.5. Projektowanie własności dynamicznych przez zmianę położenia biegunów

Ścisły związek między rozwiązaniem swobodnym a biegunami układu jest wykorzystywany do projektowania własności dynamicznych na podstawie położenia biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej. Idea polega na rysowaniu na płaszczyźnie zespolonej tak zwanych **linii pierwiastkowych**, które ilustrują zmianę położenia biegunów w zależności od wybranego parametru układu³.

Załóżmy, że zmiana pewnego parametru układu spowodowała przesunięcie biegunów z pozycji 'o' na 'x':



Jak zmieniła się reakcja obiektu?

¹ tzn. leżący w dodatniej półpłaszczyźnie zespolonej (o dodatniej części rzeczywistej)

² Patrz: metody upraszczania modeli, np. [13], [3/r.5.4]

³ Patrz: linie pierwiastkowe, metoda Evansa (np. [1]). W zasadzie jest to metoda przeznaczona do projektowania układów sterowania, ale można ją rozszerzyć na dowolny liniowy obiekt

7.2. Podstawowe badania – punkt równowagi, odpowiedź skokowa i impulsowa

7.2.1. Sprawdzenie wyznaczonych biegunów

Równoważność różnych postaci wielomianu (I-5):

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) \quad (\text{III-1})$$

można wykorzystać do sprawdzenia poprawności wyznaczonych biegunów układu (λ_i). Wyznaczanie biegunów (III-1) odbywa się na podstawie równania:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\text{III-2})$$

lub

$$x^n + \dots + \frac{a_2}{a_n} x^2 + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} = 0 \quad (\text{III-3})$$

Na podstawie biegunów można zapisać postać iloczynową wielomianu charakterystycznego:

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n), \quad (\text{III-4})$$

która może zawierać nie tylko wielomiany rzeczywiste (pierwiastki λ_i mogą być rzeczywiste i/lub zespolone). Po wymnożeniu i uporządkowaniu wielomianu, uzyskujemy postać ogólną:

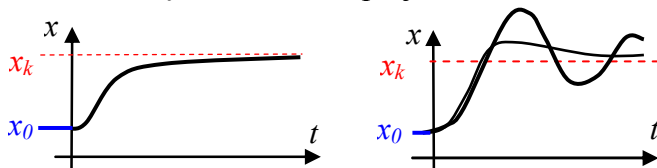
$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) = x^n + \dots + \frac{a_2}{a_n} x^2 + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} \quad (\text{III-5})$$

Znając wszystkie bieguny układu można odtworzyć równanie charakterystyczne układu oraz składową swobodną rozwiązania (I-35)÷(I-39) z dokładnością wartości współczynników A_i , wynikających z wartości wymuszenia i do warunków początkowych.

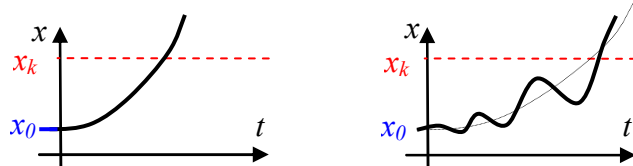
8. Analiza i projektowanie modeli pierwszego i drugiego rzędu

8.1. Wprowadzenie – znaczenie i zastosowanie modeli pierwszego i drugiego rzędu

W badaniach dynamiki szczególną rolę odgrywają liniowe modele dynamiki drugiego rzędu, ponieważ jest to najprostszy model, który może reprezentować wszystkie typy biegunów i związane z tym typy składowych swobodnych (p. 1.4.2). Na wykresach poniżej (Rys. III-3, Rys. III-4) przedstawiono możliwe typy odpowiedzi na wymuszenie skokowe w zadanym punkcie pracy. Dla tego typu modeli opracowano więc wiele metod projektowania obiektów i układów sterowania.



Rys. III-3. Odpowiedź układu stabilnego na wymuszenie skokowe: aperiodyczna (bez przeregulowań) i oscylacyjna (z przeregulowaniami)

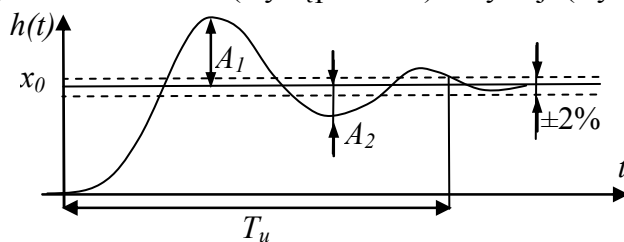


Rys. III-4. Odpowiedź układu niestabilnego na wymuszenie skokowe

Modele drugiego rzędu są zazwyczaj efektem różnego rodzaju uproszczeń zastosowanych na etapie konstrukcji modelu lub podczas analizy. Modele tego typu pojawiają się często jako punkt wyjścia do opracowywania różnych metod badania i projektowania układów automatyki, ponieważ:

- ich własności dynamiczne nie zależą od wymuszenia (punktu pracy),
- są dość proste by wykonać badania analityczne,
- mogą opisać każdy przypadek reakcji - stabilny i niestabilny, z oscylacjami lub bez nich.

Badanie własności dynamiki układów liniowych dowolnego rzędu opiera się na analizie biegunów układu, czyli pierwiastków równania (wielomianu) charakterystycznego. Ponieważ każdy wielomian rzeczywisty można rozłożyć na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia pierwszego i/lub drugiego (I-2), to oznacza, że własności układów wyższego rzędu wynikają ze złożenia własności układów pierwszego i drugiego rzędu. W pierwszym rzędzie dotyczy to stabilności, ale także czasu ustalania odpowiedzi (T_u) i szybkości zanikania (występowania) oscylacji (Rys. III-5).



Rys. III-5. Charakterystyczne cechy

Wpływ każdego z biegunów (λ_k) można oszacować w następujący sposób [źródło]:

- odległość biegunu od osi urojonej, czyli $|\text{Re}(\lambda_k)|$ decyduje o czasie zaniku składowej swobodnej T_u :

$$|\text{Re}(\lambda_k)| = 4/T_u \quad (\text{III-6})$$

- oscylacyjność μ wyznacza szybkość tłumienia kolejnych przeregulowań:

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = e^{-2\pi/\mu}, \text{ gdzie } \mu = \left| \frac{\text{Im}(\lambda_k)}{\text{Re}(\lambda_k)} \right| \quad (\text{III-7})$$

Na podstawie najbardziej istotnych biegunów stabilnego układu określa się w ten sposób:

- stopień stabilności = $\min|\text{Re}(\lambda_k)|$,
- stopień oscylacyjności = $\max|\text{Im}(\lambda_k)/\text{Re}(\lambda_k)|$.

8.2. Analiza i projektowanie układu drugiego rzędu na podstawie biegunów

8.2.1. Własności równań drugiego rzędu

Podstawowy sposób badania własności dynamicznych równania drugiego rzędu typu:

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u(t) \quad (\text{III-8})$$

polega na analizie równania charakterystycznego:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (\text{III-9})$$

za pomocą klasycznej metody wyznaczenia wyróżnika Δ i pierwiastków $\lambda_{1,2}$ (przy założeniu, że $a_2 \neq 0$):

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2} \quad (\text{III-10})$$

Na podstawie (III-10) można wskazać różne przypadki składników (I-35)-(I-39), jakie zawiera rozwiązanie swobodne równania drugiego rzędu (Tab. III-1).

Tab. III-1. Rozwiązania liniowego równania drugiego rzędu ($a_2 \neq 0$)

Przypadek	Bieguny: $\lambda_1 = \alpha + j\omega$, $\lambda_2 = \alpha - j\omega$	Rozwiązanie swobodne
$\Delta > 0$	$\text{Re}(\lambda_{1,2}) = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2}$, $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$	$A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -a_1/(2a_2)$, $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$	$A_1e^{\lambda_1 t} + A_2te^{\lambda_1 t}$
$\Delta < 0$	$\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -a_1/(2a_2)$, $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = \sqrt{-\Delta}/(2a_2) \neq 0$	$Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$, gdzie

Osiągnięcie założonego celu badań nie zawsze wymaga wyliczenia biegunów układu i wyznaczania rozwiązania. W automatyce zazwyczaj wystarczy sprawdzenie warunków, które determinują własności układu przez położenie biegunów.

1° Jeśli $\Delta > 0$, to bieguny układu są rzeczywiste (reakcja bez oscylacji) i warunkiem stabilności jest spełnienie obu nierówności:

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \quad (\text{III-11})$$

2° Jeśli $\Delta = 0$, to układ ma podwójny biegun rzeczywisty (reakcja bez oscylacji), a stabilność wynika ze spełnienia warunku:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_2} < 0 \quad (\text{III-12})$$

3° Jeśli $\Delta < 0$, to układ ma parę biegunów zespolonych (reakcja z oscylacjami), więc warunkiem stabilności jest:

$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} < 0 \quad (\text{III-13})$$

W przypadku gdy wszystkie parametry a_2 , a_1 i a_0 są różne od zera, stabilność równania można również określić na podstawie kryterium Hurwitza lub Routha. **Dodać**

Jeśli $a_2 \neq 0$, ale parametr a_0 lub a_1 może być równy 0, to mamy szczególne przypadki równania (III-8).

- **Dla $a_0 = 0$** - równanie jest rzędu drugiego $a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) = u_1(t)$, z dodatnim wyróżnikiem ($\Delta = a_1^2 > 0$) i można zastosować wzór (III-10), ale można też zastosować proste przekształcenie:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda = \lambda(a_2\lambda + a_1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \frac{-a_1}{a_2}, \quad (\text{III-14})$$

Charakterystyczną cechą tego przypadku jest biegun zerowy (λ_1), co oznacza że w odpowiedzi układu występuje składnik o stałej wartości (Ae^{0t}). Tym samym, w najlepszym przypadku, układ znajduje się na granicy stabilności, o ile drugi biegun $\lambda_2 < 0$ (a_1 i a_2 są tego samego znaku).

- **Dla $a_1 = 0$** - równanie jest rzędu drugiego $a_2\ddot{x}(t) + a_0x(t) = u_1(t)$, a na podstawie (III-10) otrzymujemy:

$$a_2\lambda^2 + a_0 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-a_0}{a_2}}, \quad (\text{III-15})$$

Jeśli parametry a_0 i a_1 są tego samego znaku, to układ ma parę biegunów urojonych ($\Delta < 0$, $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$) i w odpowiedzi pojawią się niegasnące oscylacje (układ na granicy stabilności). Natomiast gdy znaki a_0 i a_1 są przeciwne, to układ ma dwa bieguny rzeczywiste ($\Delta > 0$) – jeden dodatni i jeden ujemny (układ niestabilny).

Podsumowanie wszystkich przypadków (III-11)÷(III-15) przedstawiono na Rys. III-6.

	Oscylacje		bez oscylacji		z oscylacjami	
	$\Delta > 0$		$\Delta = 0$		$\Delta < 0$	
$a_2 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_0 \neq 0$						
$a_2 \neq 0$, $a_1 = 0$,						
$a_2 \neq 0$, $a_0 = 0$						

Rys. III-6. Przypadki

W ten sposób można nie tylko badać własności istniejących obiektów, ale także projektować własności nowych układów – dobierać parametry (wymiary, materiały, ...) elementów, tak aby układ wykazywał określone własności (stabilność, oscylacyjność). Na przykład znając dwa z trzech parametrów (a_0 , a_1 i a_2) równania (III-8) można wyznaczyć przedział wartości nieznanego parametrów tak, aby układ był stabilny/niestabilny i/lub żeby w reakcji układu występowały lub nie oscylacje.

Tab. III-2. Przypadki liniowego równania drugiego rzędu ($a_2 \neq 0$)

Stabilność	Oscylacje		bez oscylacji		z oscylacjami	
	warunki		$\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0 \rightarrow \text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$		$\Delta < 0 \rightarrow \text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$	
stabilny	$\text{Re}(\lambda_1) < 0 \wedge \text{Re}(\lambda_2) < 0$		$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \wedge \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0$		$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} < 0$	
na granicy stabilności	$\text{Re}(\lambda_1) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda_2) \leq 0$		$\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = \frac{-a_1}{a_2} < 0$		$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} = 0$	
niestabilny	$\text{Re}(\lambda_1) > 0 \vee \text{Re}(\lambda_2) > 0$		$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} > 0 \vee \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} > 0$		$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} > 0$	

...
Odpowiedź skokowa, impulsowa, częstotliwościowa (tu???)

8.3. Równania oscylacyjne i komplementarne

8.3.1. Własności i parametry równania oscylacyjnego

Najbardziej charakterystyczną postacią modelu drugiego rzędu (III-8) jest równanie oscylacyjne zapisywane w postaci:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \omega_n > 0 \tag{III-16}$$

gdzie: ξ - współczynnik tłumienia, ω_n – pulsacja drgań własnych nietłumionych ($\omega_n = 2\pi f_n$, gdzie f_n to częstotliwość drgań własnych nietłumionych). Na podstawie równania charakterystycznego można wyznaczyć bieguny układu:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ \lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases} \tag{III-17}$$

Analizując wzór (III-17) można wykazać że układ ma parę biegunów rzeczywistych lub zespolonych, leżących w lewej lub prawej półpłaszczyźnie zespolonej, a tym samym jego rozwiązanie jest aperiodyczne lub oscylacyjne, stabilne lub niestabilne. Typ biegunów zależy jedynie od tłumienia ξ .

Jeśli $\xi^2 \geq 1$, to pierwiastki są rzeczywiste (reakcje bez oscylacji), a stabilność zależy od znaku ξ :

1° $\xi \geq 1 \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) < 0$ i $\operatorname{Re}(\lambda_2) = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) < 0 \rightarrow$ układ stabilny,
w tym $\xi = 1 \rightarrow$ pierwiastek podwójny $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n < 0$,

2° $\xi \leq -1 \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) > 0$ i $\operatorname{Re}(\lambda_2) = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) > 0 \rightarrow$ układ niestabilny
w tym $\xi = -1 \rightarrow$ pierwiastek podwójny $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n > 0$.

Jeśli $\xi^2 < 1$, to pierwiastki są zespolone (reakcje z oscylacjami), a stabilność również zależy od ξ :

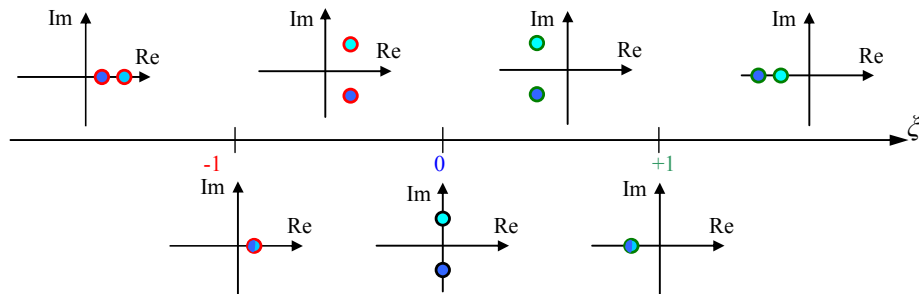
3° $0 < \xi < 1 \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = -\xi\omega_n < 0 \rightarrow$ układ stabilny,

4° $-1 < \xi < 0 \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = -\xi\omega_n > 0 \rightarrow$ układ niestabilny,

5° $\xi = 0 \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = -\xi\omega_n = 0 \rightarrow$ układ na granicy stabilności
(pierwiastki urojone $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_n$).

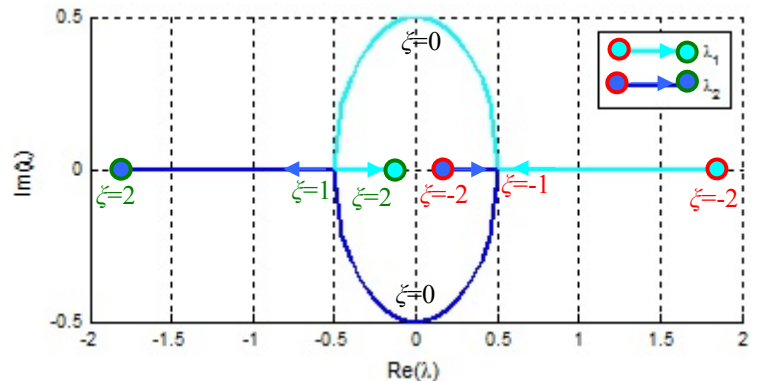
Dodać dowód w załączniku B?

Podsumowanie powyższych zależności przedstawiono na Rys. III-7.



Rys. III-7. Zależność biegunów układu oscylacyjnego od tłumienia ξ

Wpływ wartości tłumienia ξ na położenie biegunów można również przedstawić w postaci tak zwanych linii pierwiastkowych. Na Rys. III-8 tłumienie ξ zmienia się w zakresie od wartości -2 do 2 (strzałki pokazują kierunek wzrostu ξ).



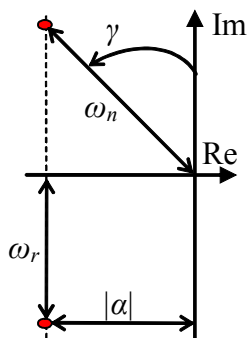
Rys. III-8. Linie pierwiastkowe dla $-2 \leq \xi \leq 2$ ($\omega_n = 0.5$)

Równanie oscylacyjne (III-16) obejmuje przypadki reakcji z i bez oscylacji. Jedynie dla ułamkowych wartości ξ , jest równaniem oscylacyjnym sensu stricto, to znaczy, że jego rozwiązanie ma charakter oscylacyjny (zawiera składową sinusoidalną), ponieważ bieguny zawierają część rzeczywistą (α) i urojoną (ω_r):

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha + j\omega_r \\ \lambda_2 = -\alpha - j\omega_r \end{cases}$$

$$\text{gdzie: } \alpha = \xi\omega_n, \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{III-18})$$

Przedstawiając bieguny na płaszczyźnie zespolonej (Rys. III-9) i korzystając z zależności geometrycznych (III-19) można zauważyć ścisły związek pomiędzy parametrami równania oscylacyjnego a położeniem biegunów.



Rys. III-9. Parametry a położenie biegunów układu oscylacyjnego

$$\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2} = \sqrt{(-\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} = \omega_n$$

$$\sin \gamma = \frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2}} = \frac{\xi\omega_n}{\sqrt{\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}} = \xi \quad (\text{III-19})$$

8.3.2. Równania drugiego rzędu komplementarne do równania oscylacyjnego

Nie każde równanie drugie rzędu można zapisać w postaci równania oscylacyjnego. Równaniem komplementarnym do oscylacyjnego jest zapis:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \quad \omega_n > 0 \quad (\text{III-20})$$

Biegunki układu wyznaczone na podstawie równania charakterystycznego mają postać:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 + 1} = \omega_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 + 1}) \quad (\text{III-21})$$

Ze wzoru (III-21) od razu wynika, że równanie (III-20) ma tylko rzeczywiste biegunki, a dokładniejsza analiza pokazuje, że niezależnie od wartości tłumienia ξ , jeden biegun jest zawsze ujemny a jeden zawsze dodatni:

$$1^\circ \xi \geq 0 \rightarrow \lambda_1 = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) > 0 \text{ i } \lambda_2 = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 + 1}) < 0 \rightarrow \text{układ niestabilny,}$$

$$2^\circ \xi < 0 \rightarrow \lambda_1 = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) > 0 \text{ i } \lambda_2 = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 + 1}) < 0 \rightarrow \text{układ niestabilny.}$$

Równanie komplementarne zawsze jest niestabilne.

Zarówno w równaniu oscylacyjnym (III-16), jak i komplementarnym (III-20) występuje warunek $\omega_n > 0$. Wobec tego zapisy te nie obejmują przypadku:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) = b_0 u(t) \quad (\text{III-22})$$

czyli równania z zerowym biegunem (III-14), to znaczy układu na granicy stabilności.

8.3.3. Analiza własności dynamiki na podstawie tłumienia układu

Z własności równania oscylacyjnego i komplementarnego wynika druga metoda badania własności układów drugiego rzędu. Należy najpierw sprowadzić badany model do jednej z postaci (III-16), (III-20) lub (III-22), przyjmując wymagane założenia i wykorzystać własności tych równań. Tak więc w ogólnym przypadku równań typu:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t) \quad (\text{III-23})$$

mogą wystąpić następujące przypadki.

1° Jeśli $a_2 \neq 0$ i $a_0/a_2 > 0$, mamy równanie oscylacyjne:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \quad \omega_n > 0 \quad (\text{III-24})$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{a_1}{a_2} \dot{x}(t) + \frac{a_0}{a_2} x(t) = \frac{1}{a_2} u_1(t)$$

W tym przypadku należy wyznaczyć pulsację i tłumienie:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2} \\ 2\xi\omega_n = \frac{a_1}{a_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \\ \xi = \frac{a_1}{2a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \end{cases}, \quad (\text{III-25})$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem $\sqrt{a_0 a_2}$ jest zawsze dodatnie, co wynika z wcześniejszego warunku $a_0/a_2 > 0$. Własności układu (stabilność, oscylacje) zależą jedynie od tłumienia ξ .

2° Jeśli $a_2 \neq 0$ i $a_0/a_2 < 0$, to mamy przypadek równania komplementarnego do oscylacyjnego:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \omega_n > 0$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{a_1}{a_2} \dot{x}(t) + \frac{a_0}{a_2} x(t) = \frac{1}{a_2} u_1(t) \tag{III-26}$$

Równanie jest zawsze niestabilne, niezależnie od wartości ζ – p.(III-20)

3° Jeśli $a_2 \neq 0$ i $a_0 = 0$, otrzymujemy równanie z zerowym biegunem:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) = u_1(t), \tag{III-27}$$

które jest albo na granicy stabilności, albo jest niestabilne (III-14).....

8.4. Zadania – badanie i projektowanie „jakościowe” (LISTA 02, LAB 05)

8.4.1. Własności liniowych równań drugiego rzędu

W tabeli Tab. III-3 zestawiono własności równania różniczkowego drugiego rzędu. Uzyskane wnioski są podstawą dla metod prostego, „jakościowego” projektowania własności dynamicznych obiektów i układów sterowania.

Tab. III-3. Własności liniowych równań drugiego rzędu ($a_2 \neq 0$)

$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t)$									
przypadki	$a_0 / a_2 > 0$						$a_0 / a_2 < 0$	$a_0 = 0$	
równanie	równanie oscylacyjne: $\ddot{x} + 2\xi\omega \dot{x} + \omega^2 x = u, \omega > 0$						*(kompl.)	** (całk.)	
wyróżnik Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$			$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	
tłumienie ξ	$\xi < -1$	$\xi = -1$	$-1 < \xi < 0$	$\xi = 0$	$0 < \xi < 1$	$\xi = 1$	$\xi > 1$	$-\infty < \xi < \infty$	
bieguny λ_i	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$ $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$	$\text{Re}(\lambda_i) = 0$ $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$ $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$
stabilność	niestabilne		na granicy stab.	stabilne			niestabilne	na granicy stab. lub niestab.	
oscylacje	bez oscylacji		oscylacje			bez oscylacji			

* Równanie postaci $\ddot{x} + 2\xi\omega \dot{x} - \omega^2 x = u, \omega > 0$

** Równanie $\ddot{x} + b\dot{x} = u$ ma dwa rzeczywiste pierwiastki, w tym $\lambda_1 = 0$.

Na przykład, jeśli $\Delta \geq 0$, to układ może być stabilny lub nie, ale na pewno w odpowiedzi nie pojawią się oscylacje. Jeśli $\Delta < 0$, to w odpowiedzi wystąpią oscylacje (mniej lub bardziej widoczne), a warunkiem stabilności jest $-a_1 / a_2 < 0$, czyli ten sam znak parametrów a_1 i a_2 .

Jeśli wszystkie współczynniki równania różniczkowego (a_2, a_1, a_0) mogą przyjmować dowolne wartości (także zero), to możliwości zawarte Tab. III-3 należy uzupełnić o dwa przypadki:

- jeśli $a_2 = 0$ mamy równanie pierwszego rzędu:

$$a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t) \tag{III-28}$$

z jednym pierwiastkiem $\lambda_1 = -a_0 / a_1$, które może być stabilne lub niestabilne (w tym $\lambda_1 = 0$),

- jeśli $a_2 = a_1 = 0$ mamy równanie statyczne:

$$a_0 x(t) = u_1(t) \tag{III-29}$$

w którym własności dynamiczne nie występują, czyli jest zawsze stabilne.

Zakładając, że współczynniki równań różniczkowych 1÷8 są dodatnie ($a, b, c > 0$), poniższa tabela zawiera różne warianty równań drugiego rzędu, różniące się znakami współczynników. Podsumowując :

		O/N	ζ	$\zeta > 0$, gdy ...	$\text{Re}(\lambda), \text{Im}(\lambda)$
1	$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$				
2	$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$				

3	$a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$			
4	$a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$			
5	$-a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$			
6	$-a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$			
7	$-a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$			
8	$-a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$			

Dodać analizę r.2.rzędu przez kryterium Routha

8.4.2. Przykładowe zadania projektowe (LISTA 02)

Wynik analizy układu za pomocą analizy biegunów i współczynnika tłumienia ζ musi być oczywiście ten sam, co można wykorzystać do wybrania metody, która w danym przypadku będzie prostsza, albo do sprawdzenia poprawności uzyskanych wyników. Dodatkowo można zastosować kryterium Routha do potwierdzenia wyników.

1° Dobierz a tak aby w odpowiedzi układu nie pojawiały się oscylacje.

2° Dobierz a tak aby układ był stabilny.

3° Dobierz a tak aby układ dochodził do stanu równowagi bez przeregulowań (stabilny, bez oscylacji)

4° Kiedy układ jest niestabilny i bez oscylacji

5° Odpowiedź skokowa układu stabilizuje się na poziomie x_w

Z równania statycznego wyznacz a_0 tak by dla $u=1$ stan ustalony wynosił 10. Następnie dobierz a_1 tak by układ był stabilny

Dodać (przykłady obiektów)

Wybór metody

Poprawność biegunów:

W przypadku układów drugiego rzędu sprawdzenie poprawności:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad \leftrightarrow \quad a_2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = a_2(\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2) \quad (\text{III-30})$$

Stąd wynikają wzory Viéte'a dla wielomianu drugiego stopnia:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{oraz} \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{a_0}{a_2} \quad (\text{III-31})$$

Dodać. Zastosowanie wzorów Viéte'a do projektowania (dobory parametrów) – kiedy i jak.

Wzory (I-6) są prawdziwe ($a_n \neq 0$) można wykorzystać jako narzędzie pomocnicze przy wyznaczaniu pierwiastków, podobnie jak wzory skróconego mnożenia

1° Wyznacz bieguny i sprawdź poprawność wyznaczonych wzorów dla:

a) dowolnego równania drugiego rzędu (III-8),

b) równania oscylacyjnego (III-16),

c) równania komplementarnego do równania oscylacyjnego (III-20).

2° Układ ma dwa ujemne bieguny: -10 i -2. Odtwórz model obiektu. Czy ten model jest jednoznaczny? Co można powiedzieć o współczynniku tłumienia tego układu? (*^h)

8.4.3. Charakterystyki czasowe modelu oscylacyjnego (LAB 05)

Przedmiotem badań są własności równania oscylacyjnego (III-16), które wynikają z analizy teoretycznej wzorów na pierwiastki równania charakterystycznego.

Tab. III-4. Odpowiedzi czasowe członu oscylacyjnego

Przedział	Wybrana wartość ζ	Położenie biegunów w układzie Im(Re)	Odpowiedź skokowa $h(t)$	Odpowiedź impulsowa $k(t)$
$\zeta < -1$				
$-1 < \zeta < 0$				

$\xi = 0$				
$0 < \xi < 1$				
$1 < \xi$				

Na laboratorium odtworzyć te wykresy:

- 1° Wyznacz przedziały wartości ξ , które odpowiadają różnym typom reakcji układu na zmiany – stabilny/niestabilny, z/bez oscylacji. Określ położenie biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej dla wyznaczonych przedziałów wartości ξ i na ich granicach.
- 2° Przygotuj schemat i skrypt do badań symulacyjnych, przewidując możliwość uruchomienia symulacji od dowolnego stanu równowagi (punktu pracy):
 - sparametryzuj funkcję skokową na wejściu (zmiennie u_0 i du),
 - oblicz w skrypcie warunki początkowe dla bloków całkujących,
 - sprawdź przygotowany model przez wykonanie symulacji w stanie równowagi ($du=0$).
- 3° Wykonaj symulacje typowych reakcji układu przy pobudzeniu skokiem jednostkowym $u=1(t)$ dla wybranych wartości współczynnika tłumienia ξ .
- 4° Powtórz punkt 3° dla pobudzenia impulsowego $u_0=\delta(t)$: Dodać opis
 - zaproponuj sposób realizacji funkcji, która przybliży impuls Diraca,
 - przed wykonaniem symulacji spróbuj przewidzieć przebieg wykresów (\Rightarrow).

Zilustrować własności wynikające z rys. Rys. III-10

8.5. Odpowiedzi skokowe i impulsowe układów drugiego rzędu

8.5.1. Typy i parametry odpowiedzi skokowych równania oscylacyjnego

Typowym elementem badania dynamiki obiektów jest obserwacja reakcji układu na skokową zmianę wartości zmiennej wejściowej. Rozwiązanie równania drugiego rzędu jest na tyle proste, że można wyznaczyć dokładny wzór funkcji i przeprowadzić jego analizę, wykorzystując typowe operacje badania przebiegu funkcji (załącznik B.2).

Odpowiedź skokowa znormalizowanego¹ równania oscylacyjnego :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t), \quad \omega_n > 0 \quad (\text{III-32})$$

- dla $|\xi| > 1$ ma postać:

$$1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t} = 1 - \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{\omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} - \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{\omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} \quad (\text{III-33})$$

gdzie $\alpha_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$, $\alpha_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$;

- dla $|\xi| < 1$ można przedstawić w różny sposób:

$$1 + \frac{\alpha - j\omega_r}{2j\omega_r} e^{(\alpha + j\omega_r)t} - \frac{\alpha + j\omega_r}{2j\omega_r} e^{(\alpha - j\omega_r)t} = 1 + \frac{-\xi - j\sqrt{1 - \xi^2}}{2j\sqrt{1 - \xi^2}} e^{(\alpha + j\omega_r)t} - \frac{-\xi + j\sqrt{1 - \xi^2}}{2j\sqrt{1 - \xi^2}} e^{(\alpha - j\omega_r)t} \quad (\text{III-34})$$

$$1 - e^{\alpha t} \left(\cos\omega_r t - \frac{\alpha}{\omega_r} \sin\omega_r t \right) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \right) \quad (\text{III-35})$$

$$1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2}}{\omega_r} e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi_1) \quad (\text{III-36})$$

$$1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2}}{\omega_r} e^{\alpha t} \cos(\omega_r t - \varphi_2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t - \varphi_2) \quad (\text{III-37})$$

gdzie: $\lambda_1 = \alpha + j\omega_r$, $\lambda_2 = \alpha - j\omega_r$, $\alpha = -\xi\omega_n$, $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, $\varphi_1 = \arctg\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right)$, $\varphi_2 = \arctg\left(\frac{-\alpha}{\omega_r}\right)$.

¹ Wzmocnienie układu $k_{ukl}=1$

Wzór pochodnej odpowiedzi skokowej i porównaj go ze wzorem na odpowiedź impulsową.

Analizując przedstawione rozwiązania, w szczególności wzory (III-33) i (III-36), można wskazać interpretację i uzasadnienie nazw parametrów równania oscylacyjnego (ζ , ω_n). Tłumienia ζ ... Pulsacja własna układu ω_n , a precyzyjnie "pulsacja drgań własnych nietłumionych" ...

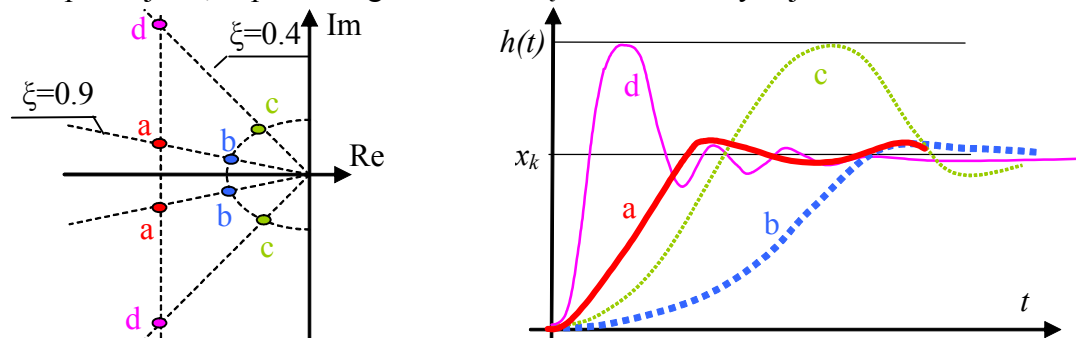
Parametry te mają wpływ na charakterystyczne cechy odpowiedzi skokowych:

- czas ustalania się odpowiedzi, czyli ...
- przeregulowanie, czyli ...

Są one często stosowane w automatyce i pełnią rolę wskaźników jakości

Na Rys. III-10 przedstawiono w jakościowy sposób relację pomiędzy wartością parametrów ζ , ω_n (co odpowiada położeniu biegunów - Rys. III-9), a przebiegiem odpowiedzi skokowej stabilnego członu oscylacyjnego dla $\zeta < 1$:

- odległość od osi urojonej ($|\text{Re}(\lambda_{1,2})|$) decyduje o szybkości ustalania odpowiedzi (stabilizacji),
- tłumienie ζ odpowiada głównie za wielkość przeregulowania,
- pulsacja ω_n odpowiada głównie za częstotliwość oscylacji.



Rys. III-10. Położenie biegunów a odpowiedź układu oscylacyjnego

Stosując klasyczne metody badania przebiegu zmienności funkcji można wyznaczyć dokładne wzory zależności:.....

Powyższe zależności można wykorzystać do wyznaczenia podstawowych wskaźników jakości na podstawie parametrów ζ i ω_n , lub do projektowania układów o zadanych wskaźnikach jakości.

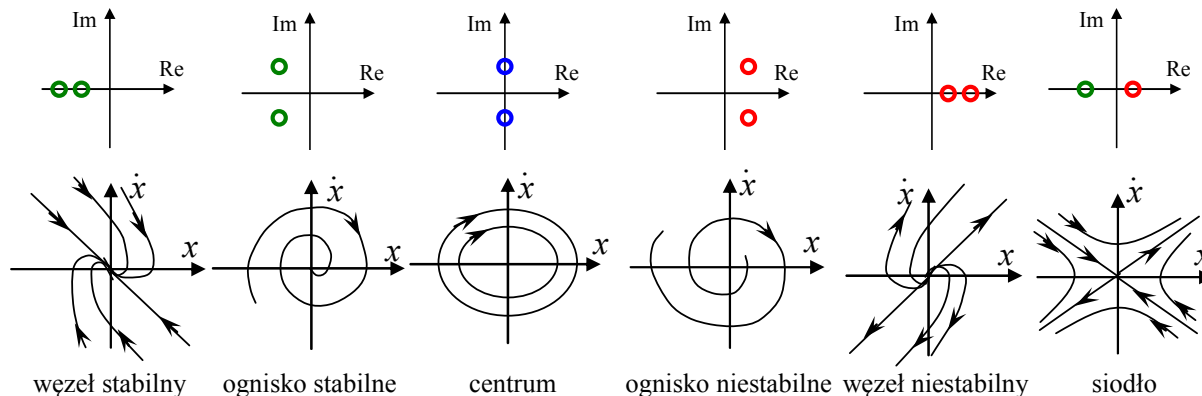
9. Portrety fazowe

9.1. Wprowadzenie - definicja i własności portretu fazowego

Portret fazowy to rodzina trajektorii w układzie współrzędnych $[x, \dot{x}]$, przedstawiających zachowanie obiektu obserwowane przy stałym wymuszeniu ale dla różnych warunków początkowych, które są wówczas jedyną przyczyną zmian obserwowanych w układzie. Jest to graficzny sposób zobrazowania własności dynamicznych obiektów 1. lub 2 rzędu liniowych i nieliniowych ¹. Portrety fazowe najłatwiej jest uzyskać metodami symulacyjnymi na podstawie równań różniczkowych (\Rightarrow). Ilość trajektorii koniecznych do odtworzenia portretu można znacznie ograniczyć ze względu na jedną z podstawowych własności – trajektorie nie przecinają się ponieważ badane są **układy deterministyczne**².

9.2. Portrety fazowe układów liniowych (LAB ...)

W układach liniowych można wyróżnić sześć charakterystycznych typów portretów, związanych położeniem biegunów układu (Rys. III-11).



Rys. III-11. Charakterystyczne typy portretów fazowych układów liniowych

Każda trajektoria portretu reprezentuje ewolucję stanu obiektu od określonego warunku początkowego. Jeśli układ jest stabilny to dąży do punktu równowagi, a jeśli jest niestabilny to się oddala od tego punktu. Kierunek zmian (strzałkę czasu na trajektorii) określa się jednoznacznie na podstawie własności funkcji pochodnej – jeśli pochodna jest dodatnia to funkcja rośnie ($\dot{x} > 0 \Rightarrow x \uparrow$), jeśli pochodna jest ujemna to funkcja maleje ($\dot{x} < 0 \Rightarrow x \downarrow$), pochodna równa 0 oznacza maksimum lub minimum funkcji.

Portrety fazowe układów liniowych dobrze ilustrują własność **globalnej stabilności** lub niestabilności tych układów. Ponieważ w układzie liniowym jest możliwy tylko jeden punkt równowagi (\Rightarrow), więc układ stabilny dąży do tego punktu niezależnie od warunków początkowych (jest stabilny globalnie).

Na podstawie przedstawionych własności portretów fazowych wyjaśnij następujące spostrzeżenia praktyczne, dlaczego:

- 1° trajektorie przecinają oś x pod kątem 90° ,
- 2° punkt równowagi znajduje się na osi x ,
- 3° przy wymuszeniu zerowym punkt równowagi leży w środku układu współrzędnych,
- 4° z trajektorii można odczytać amplitudy przebiegu rozwiązania swobodnego. (*¹)

Jaki wpływ na portret fazowy układu ma wartość wymuszenia u ? (*¹)

9.3. Symulacyjne generowanie portretów fazowych

9.3.1. Wprowadzenie – warunki generowania portretów

Portret fazowy w programie symulacyjnym powstaje przez wielokrotne uruchomienie obliczeń reakcji obiektu dla stałego wymuszenia (zwykle równego zero) i różnych warunków początkowych oraz przedstawienie wyników w układzie współrzędnych $[x, \dot{x}]$. To oznacza, że badany model może

¹ Portrety fazowe mają szczególne zastosowanie w przypadku występowania nieliniowości typu nasycenie, strefa nieczułości, przekładnik, ..., czyli funkcji nieróżniczkowalnych. Więcej np. w [3/r.2.4]

² przejście z jednego punktu przestrzeni do kolejnego jest określone (nie ma możliwości wyboru)

być co najwyżej drugiego rzędu i musi umożliwić zainicjowanie różnych warunków początkowych¹. Model może być nieliniowy i mogą to być nawet funkcje typu nasycenie, strefa martwa, przekaźnik, itp.² – portrety fazowe wspomagają szczególnie badania stabilności takich właśnie przypadków. Własności modeli liniowych można badać w prostszy sposób (nawet analitycznie) a na podstawie położenia biegunów łatwo przewidzieć typ portretu (węzeł/ognisko stabilne/niestabilne, centrum, siodło). Portrety modeli nieliniowych są bardziej złożone, na przykład mogą zawierać więcej niż jeden punkt równowagi a stabilność trajektorii może zależeć od warunków początkowych. Nieznajomość obszarów stabilności utrudnia generowanie nieznanego portretu, wiadomo jednak, że model różniczkowalny ma w odpowiednio małym otoczeniu każdego punktu równowagi portret podobny do układów liniowych.

9.4. Zadania (LAB...)

9.4.1. Portrety układów liniowych

Celem badań jest wygenerowanie charakterystycznych typów portretów fazowych układu liniowego drugiego rzędu (Rys. III-11).

1° Wygeneruj wszystkie typy portretów fazowych równania oscylacyjnego oraz portret typu siodło. Wykorzystaj model przygotowany w punkcie 8.4.3. Dobierz wartości parametrów równania i warunki początkowe, dla których można uzyskać typowe portrety.

Uwagi do wykonania:

- wykorzystaj możliwość wsadowego uruchamiania symulacji i napisz skrypt realizujący zadanie,
- ustal stałe wymuszenie i wybierz warunki początkowe w różnych punktach płaszczyzny stanu (nie tylko na osiach),
- w przypadku układów niestabilnych zwróć uwagę na odpowiedni dobór warunków początkowych i czasu symulacji (przy szybkim oddalaniu się od punktu równowagi może nastąpić przekroczenie zakresu wartości zmiennych),
- zaznacz kierunki trajektorii i punkt (punkty?) równowagi, określ stabilność układu.

2° Określ związki pomiędzy wygenerowanymi portretami fazowymi a typami odpowiedzi skokowych otrzymanymi w punkcie 8.4.3. Wskaż odpowiadające sobie punkty wartości ekstremalnych na wykresach czasowych i portretach.

9.4.2. Portrety układów nieliniowych

Jako przykład analizy układów nieliniowych niech posłużą dwa równania, pozornie niewiele różniące się od badanego wcześniej równania liniowego drugiego rzędu:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx^2 + dx = F \quad (\text{III-38})$$

oraz

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx^3 + dx = F \quad (\text{III-39})$$

W przypadku odpowiednio dobranych wartości parametrów powyższe równania mogłyby opisywać na przykład model dynamiki układu z nieliniową sprężyną (\Rightarrow).

Celem badań jest wygenerowanie portretów fazowych równań(III-38) i (III-39) oraz określenie stabilności tych układów. Równania są nieliniowe i trudno jest przewidzieć wygląd portretów (\Rightarrow), więc przed rozpoczęciem symulacji warto zwrócić uwagę przynajmniej na rząd modelu, na postać równania statycznego i ilość punktów równowagi.

1° Wykonaj portret fazowy badanego równania dla następujących przypadków:

a) $a=1, b=1, c=0.01, d=-10, F_0=0,$

b) $a=1, b=1, c=-0.01, d=10, F_0=0.$

Zaznacz kierunki trajektorii. Wskaż punkt/punkty równowagi. Określ stabilność układu.

2° Określ wpływ wskazanych parametrów na kształt portretu badanego równania:

- jak się zmieni portret dla $F_0 > 0$?
- jak zapewnić żeby układ miał punkt równowagi na przykład w punkcie $x_0=5$?

3° Wykonaj linearyzację badanego równania i zbadaj stabilność układu analitycznie (\Rightarrow).

¹ tego warunku nie spełniają modele w postaci transmitancji

² nieliniowe nieróżniczkowalne