LISTA03: Równania stanu i transmitancje

Przygotowanie

1. Jak wyznaczyć równanie charakterystyczne i punkt równowagi na podstawie:
   a) równania n-tego rzędu; b) równań stanu; c) transmitancji
2. Jakie ograniczenia spełnia układ, który można opisać za pomocą transmitancji?
3. Co to są warunki początkowe i jak je zdefiniować (zadać) w przypadku:
   a) równania n-tego rzędu; b) układu n równań 1-ego rzędu; c) transmitancji
4. Jak zadać warunki początkowe przy uruchamianiu symulacji od zadanego stanu równowagi (w wybranym punkcie pracy)
5. Co to jest i kiedy można zastosować twierdzenie o wartości końcowej?

Zadania 1. Dla układów równań
a) zapisz w postaci równań stanu (macierzy) i podaj równanie charakterystyczne
b) wyznacz transmitancje dla zmiennych x_1 i x_2 i podaj równanie charakterystyczne
c) przedstaw równania statyczne i wyznacz punkt/punkty równowagi

Przykłady

1) $$\begin{cases} 4\ddot{x}_1(t) + b_3\dot{x}_1(t) - b_1 x_2(t) = u_1(t) \\ b_1\dot{x}_2(t) - b_1\dot{x}_1(t) + 2x_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t) + cx_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \\ m\ddot{x}_1(t) + 3\dot{x}_1(t) - x_2(t) = u_1(t) \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} 4\ddot{x}_1(t) + b_2\dot{x}_1(t) + 4x_1(t) - cx_2(t) = u_1(t) \\ b_1\dot{x}_2(t) + cx_2(t) - 2x_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + 2\dot{x}_1(t) + 4x_1(t) - x_2(t) = u_1(t) \\ b\dot{x}_2(t) + x_2(t) - 2x_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} 4\ddot{x}_1(t) + b\dot{x}_1(t) - b\dot{x}_2(t) + 3x_1(t) = u_1(t) \\ b\dot{x}_2(t) - b\dot{x}_1(t) + x_2(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) + c_2 x_1(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t) + c_1 x_2(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + 4\dot{x}_1(t) + 2x_2(t) + cx_1(t) = u_1(t) + 2u_2(t) \\ 2x_2(t) + cx_1(t) + 3\dot{x}_2(t) + 3\dot{x}_1(t) = 0 \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + 4\dot{x}_1(t) + cx_1(t) + 2x_2(t) = u_1(t) + 2u_2(t) \\ 2x_2(t) + 2x_1(t) + 3\dot{x}_2(t) + 3\dot{x}_1(t) = u_1(t) \end{cases}$$

9) $$\begin{cases} 5\ddot{x}_1(t) + cx_1(t) + 5x_2(t) = u_1(t) \\ 2\dot{x}_2(t) + 2\dot{x}_1(t) + 3x_2(t) + 2x_1(t) = u_1(t) + 2u_2(t) \end{cases}$$

10) $$\begin{cases} 5\ddot{x}_1(t) + b\dot{x}_1(t) + 5x_2(t) = 2u_1(t) \\ 2\dot{x}_2(t) + 2\dot{x}_1(t) + 2x_2(t) + 2x_1(t) = u_1(t) + 2u_2(t) \end{cases}$$

Zadania 2. Dla podanych przykładów kaskad zbiorników

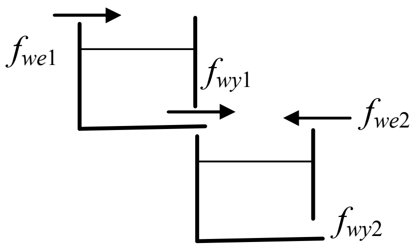
a) skonstruuj dokładny model kaskady, a następnie
- określ zmienne wejściowe i wyjściowe (zmienne stanu) - uzasadnij,
- wyznacz równanie statyczne i charakterystyczne,
- wyznacz punkt/punkty równowagi.

b) skonstruuj uproszczony (zlinearyzowany) model kaskady:
- przedstaw go w postaci równań stanu,
- napisz równanie statyczne i charakterystyczne,
- wyznacz punkt/punkty równowagi,
- wyznacz bieguny i określ warunki stabilności

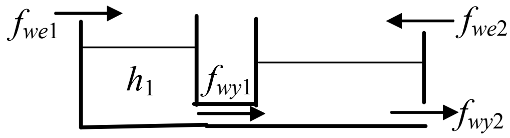
c) przedstaw uproszczony model kaskady w postaci transmitancji i na tej podstawie
- wyznacz punkt/punkty równowagi,
- wyznacz bieguny i określ warunki stabilności.

Przykłady:

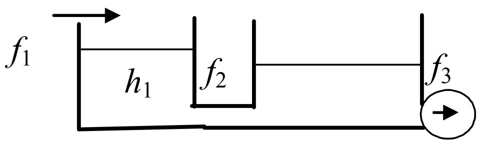
1)



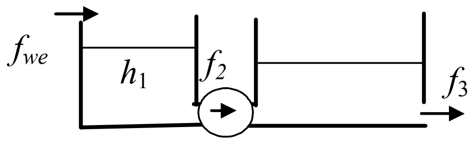
2)



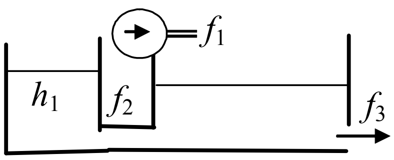
3)



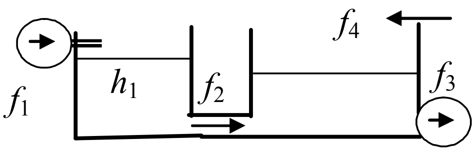
4)



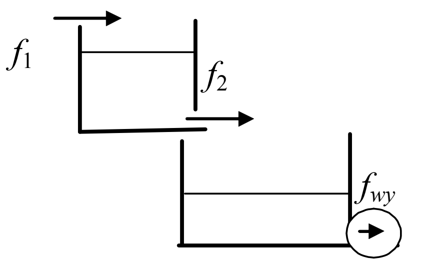
5)



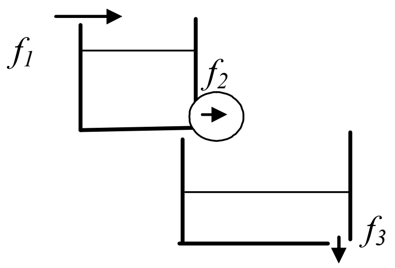
6)



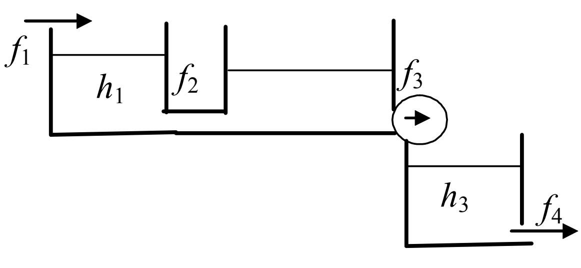
7)



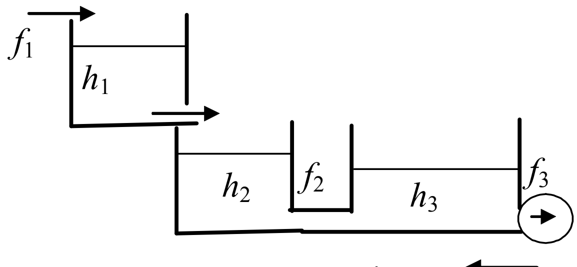
8)



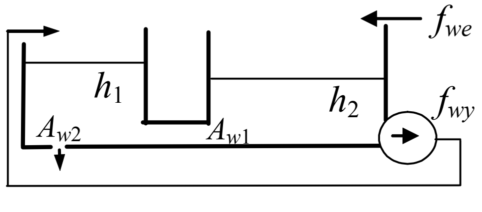
9)



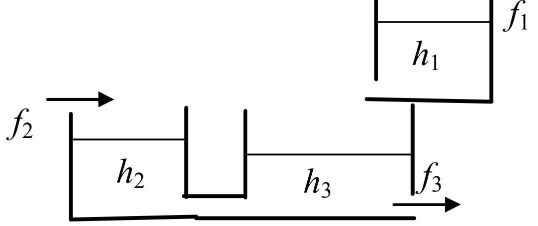
10)



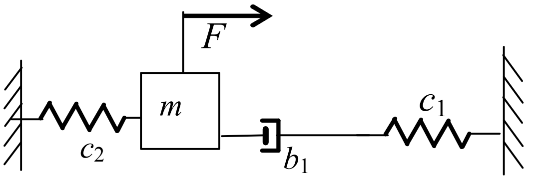
13)

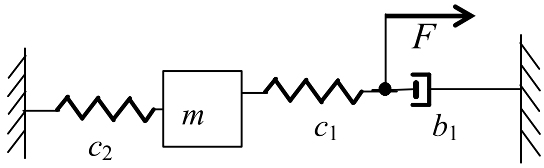


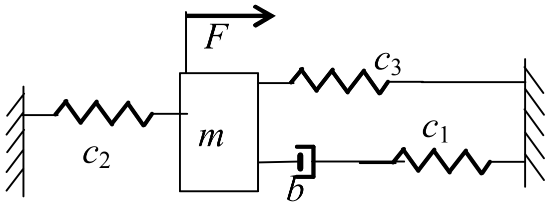
14)

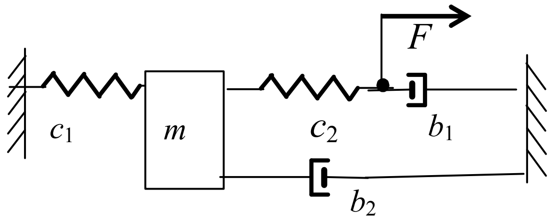


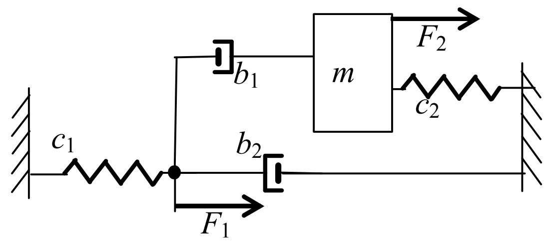
Zadania 3. Dla układów mechanicznych
a) skonstruuj model (równania bilansowe sił)
b) zapisz model w postaci równań stanu (macierzy) i podaj równanie charakterystyczne
c) wyznacz transmitancje wszystkich zmiennych wyjściowych (x_1, x_2, ...), podaj równanie charakterystyczne
d) przedstaw równania statyczne i wyznacz punkt/punkty równowagi
e) dla układów drugiego rzędu wyznacz tłumienie ξ

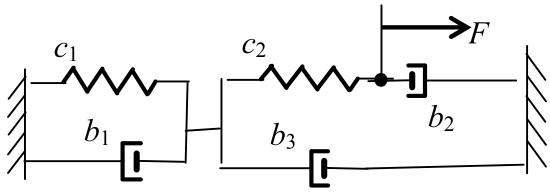
1)


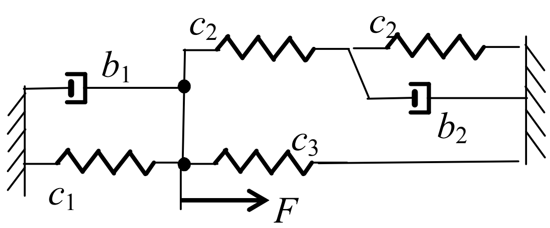
2)


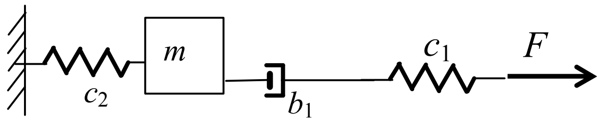
3)


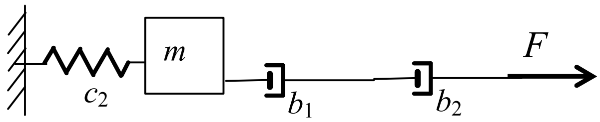
4)


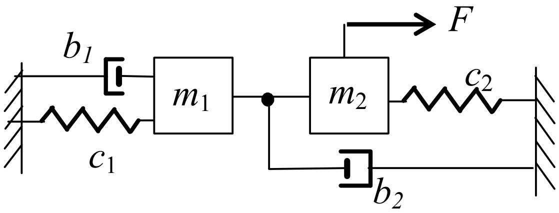
5)


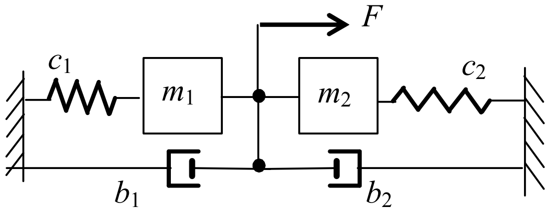
6)


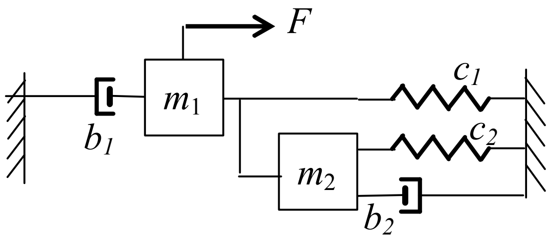
7)


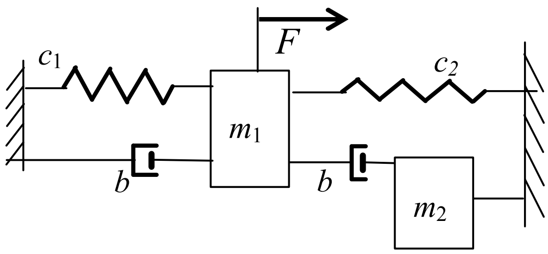
8a)


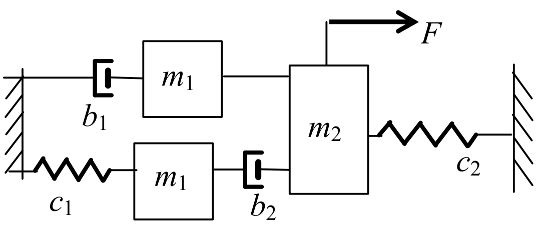
8b)


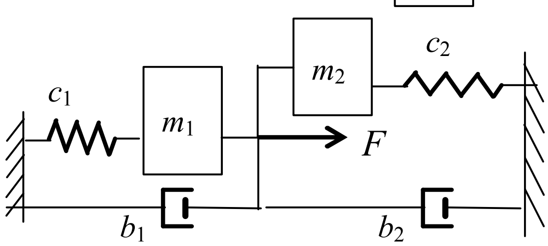
9)


10)


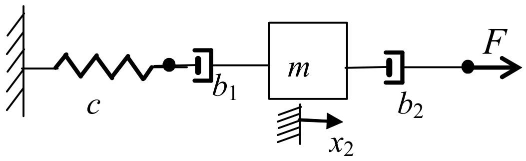
11)


12)


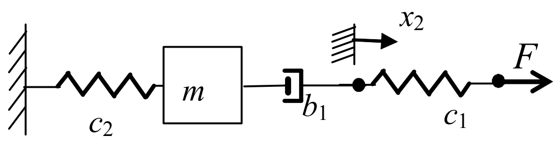
13)


14)


15)

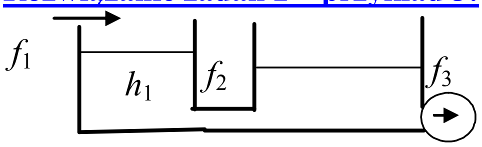


16)



Jak wyznaczyć transmitancję gdy nie ma zewnętrznego wymuszenia?
Dodać różne przykłady modeli mechanicznych – wózki, windy, ...

Rozwiązanie zadań 2 – przykład 3:



$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_1(t) - f_2(t) \\ A_2\dot{h}_2(t) = f_2(t) - f_3(t) \end{cases}$$

$$f_2(t) = A_{w1}\sqrt{2g\left(h_1(t)-h_2(t)\right)} \approx a_1\left(h_1(t)-h_2(t)\right)$$

Zad.2a) Dokładny model kaskady i badania

- Dokładny model kaskady: $\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_1(t) - A_{w1}\sqrt{2g\left(h_1(t)-h_2(t)\right)} \\ A_2\dot{h}_2(t) = A_{w1}\sqrt{2g\left(h_1(t)-h_2(t)\right)} - f_3(t) \end{cases}$
- Zmienne wyjściowe (zmienne stanu) h_1, h_2. Zmienne wejściowe f_1, f_3.
- Równania statyczne: $\begin{cases} 0 = f_1 - A_{w1}\sqrt{2g\left(h_1-h_2\right)} \\ 0 = A_{w1}\sqrt{2g\left(h_1-h_2\right)} - f_3 \end{cases} \rightarrow A_{w1}\sqrt{2g\left(h_1-h_2\right)} = f_1 = f_3$
- Punkt równowagi: dla $f_1 = f_3$ jest wiele rozwiązań (punktów równowagi)
  dla $f_1 \neq f_3$ brak rozwiązań (punktu równowagi)

Zad.2b) Równania stanu i badania

- Uproszczony model kaskady: $\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_1(t) - a_1\left(h_1(t)-h_2(t)\right) \\ A_2\dot{h}_2(t) = a_1\left(h_1(t)-h_2(t)\right) - f_3(t) \end{cases}$
- Równania stanu
  w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{A_1} & \frac{a_1}{A_1} \\ \frac{a_1}{A_2} & \frac{-a_1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$

- Równanie charakterystyczne:

$$\begin{vmatrix} \frac{-a_1}{A_1} - \lambda & \frac{a_1}{A_1} \\ \frac{a_1}{A_2} & \frac{-a_1}{A_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{-a_1}{A_1} - \lambda\right)\left(\frac{-a_1}{A_2} - \lambda\right) - \frac{a_1^2}{A_1 A_2} = 0$$

$$\left(\frac{a_1 + A_1\lambda}{A_1}\right)\left(\frac{a_1 + A_2\lambda}{A_2}\right) - \frac{a_1^2}{A_1 A_2} = 0 \quad |(A_1 A_2)$$

$$\left(a_1 + A_1\lambda\right)\left(a_1 + A_2\lambda\right) - a_1^2 = 0$$

$$A_1 A_2\lambda^2 + a_1\left(A_1 + A_2\right)\lambda + a_1^2 - a_1^2 = 0$$

$$A_1 A_2\lambda^2 + a_1\left(A_1 + A_2\right)\lambda = 0$$

$$\lambda\left(A_1 A_2\lambda + a_1\left(A_1 + A_2\right)\right) = 0$$

- Bieguny: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{-a_1\left(A_1 + A_2\right)}{A_1 A_2}$ <0, bo wszystkie współczynniki są dodatnie. Układ na granicy stabilności.
- Równania statyczne:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{A_1} & \frac{a_1}{A_1} \\ \frac{a_1}{A_2} & \frac{-a_1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$

- Prostsza postać równań statycznych: $\begin{cases} 0 = f_1 - a_1\left(h_1 - h_2\right) \\ 0 = a_1\left(h_1 - h_2\right) - f_3 \end{cases} \rightarrow a_1\left(h_1 - h_2\right) = f_1 = f_3$
- Punkt równowagi: dla $f_1 = f_3$ jest wiele rozwiązań (punktów równowagi)
  dla $f_1 \neq f_3$ brak rozwiązań (punktu równowagi)

Podsumowanie: zerowy biegun i brak punktu równowagi przy stałym wymuszeniu – układ ma własności całkujące.

Zad.2c) Transmitancje i badania

Układ ma 4 transmitancje (2 we, 2 wy) o takim samym mianowniku (kaskada współdziałająca).

• Uproszczony model kaskady:	$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_1(t) - a_1\big(h_1(t) - h_2(t)\big) \\ A_2\dot{h}_2(t) = a_1\big(h_1(t) - h_2(t)\big) - f_3(t) \end{cases}$
• Równanie operatorowe:	$\begin{cases} A_1 s h_1(s) = f_1(s) - a_1\big(h_1(s) - h_2(s)\big) \\ A_2 s h_2(s) = a_1\big(h_1(s) - h_2(s)\big) - f_3(s) \end{cases}$
• Transmitancje (1) - uporządkowanie równania operatorowego:	$\begin{cases} (A_1 s + a_1)h_1(s) = f_1(s) + a_1 h_2(s) \\ (A_2 s + a_1)h_2(s) = a_1 h_1(s) - f_3(s) \end{cases}$
- podstawienie i rozwiązanie:	$\begin{cases} M_1 h_1(s) = f_1(s) + a_1 h_2(s) \\ M_2 h_2(s) = a_1 h_1(s) - f_3(s) \end{cases} \quad \rightarrow h_1(s) = \dfrac{f_1(s) + a_1 h_2(s)}{M_1}$

$$M_2 h_2(s) = a_1 \frac{f_1(s) + a_1 h_2(s)}{M_1} - f_3(s) \quad |\cdot M_1$$

$$M_1 M_2 h_2(s) = a_1 f_1(s) + a_1^2 h_2(s) - M_1 f_3(s)$$

$$\left(M_1 M_2 - a_1^2\right)h_2(s) = a_1 f_1(s) - M_1 f_3(s) \quad \rightarrow h_2(s) = \frac{a_1 f_1(s) - M_1 f_3(s)}{M_1 M_2 - a_1^2}$$

$$M_1 h_1(s) = f_1(s) + a_1 \frac{a_1 f_1(s) - M_1 f_3(s)}{M_1 M_2 - a_1^2} \quad |\cdot\left(M_1 M_2 - a_1^2\right)$$

$$M_1\left(M_1 M_2 - a_1^2\right)h_1(s) = \left(M_1 M_2 - a_1^2\right)f_1(s) + a_1^2 f_1(s) - a_1 M_1 f_3(s)$$

$$M_1\left(M_1 M_2 - a_1^2\right)h_1(s) = M_1 M_2 f_1(s) - a_1 M_1 f_3(s)$$

$$\left(M_1 M_2 - a_1^2\right)h_1(s) = M_2 f_1(s) - a_1 f_3(s) \quad \rightarrow h_1(s) = \frac{M_2 f_1(s) - a_1 f_3(s)}{M_1 M_2 - a_1^2}$$

Zgodnie z przewidywaniem wyprowadzono:

$h_1 = \dfrac{M_2}{M} f_1 + \dfrac{-a_1}{M} f_3$	$h_1(s) = \dfrac{A_2 s + a_1}{M(s)} f_1(s) + \dfrac{-a_1}{M(s)} f_3(s)$
$h_2 = \dfrac{a_1}{M} f_1 + \dfrac{-M_1}{M} f_3$	$h_2(s) = \dfrac{a_1}{M(s)} f_1(s) + \dfrac{-(A_1 s + a_1)}{M(s)} f_3(s)$
gdzie $M = M_1 M_2 - a^2$	gdzie $M(s) = s\big(A_1 A_2 s + a_1 A_1 + a_1 A_2\big)$

• Transmitancje (2) - alternatywna metoda z zastosowaniem wzorów Cramera

- uporządkowanie równania operatorowego:	$\begin{cases} A_1 s h_1(s) + a_1 h_1(s) - a_1 h_2(s) = f_1(s) \\ -a_1 h_1(s) + A_2 s h_2(s) + a_1 h_2(s) = -f_3(s) \end{cases}$
- zapis macierzowy:	$\begin{bmatrix} A_1 s + a_1 & -a_1 \\ -a_1 & A_2 s + a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(s) \\ -f_3(s) \end{bmatrix}$
- wzory Cramera: $h_i = \dfrac{W_i}{W}$	$W = \det\begin{bmatrix} A_1 s + a_1 & -a_1 \\ -a_1 & A_2 s + a_1 \end{bmatrix} = (A_1 s + a_1)(A_2 s + a_1) - a_1^2 = M(s)$ $W_1 = \det\begin{bmatrix} f_1(s) & -a_1 \\ -f_3(s) & A_2 s + a_1 \end{bmatrix} = (A_2 s + a_1)f_1(s) - a_1 f_3(s)$ $W_2 = \det\begin{bmatrix} A_1 s + a_1 & f_1(s) \\ -a_1 & -f_3(s) \end{bmatrix} = -(A_2 s + a_1)f_3(s) + a_1 f_1(s)$
- wyniki	$h_1(s) = \dfrac{W_1}{W} = \dfrac{(A_2 s + a_1)f_1(s) - a_1 f_3(s)}{M(s)} = \dfrac{A_2 s + a_1}{M(s)} f_1(s) + \dfrac{-a_1}{M(s)} f_3(s)$

$$h_2(s)=\frac{W_2}{W}=\frac{a_1 f_1(s)-(A_2 s+a_1)f_3(s)}{M(s)}=\frac{a_1}{M(s)}f_1(s)+\frac{-(A_2 s+a_1)}{M(s)}f_3(s)$$

Transmitancje oczywiście identyczne jak poprzednio. Uwaga: mianownik (W) wyznaczany na podstawie jednego przekształcenia (bardzo podobne do równań stanu)

- Transmitancje (3) - alternatywna metoda z operatorem macierzowym

- zapis równania operatorowego: $s\mathbf{x}(s)=\mathbf{A}\mathbf{x}(s)+\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$

$$\begin{cases} sh_1(s)=\dfrac{a_1}{A_1}f_1(s)-\dfrac{a_1}{A_1}h_1(s)+\dfrac{a_1}{A_1}h_2(s) \\ sh_2(s)=\dfrac{a_1}{A_2}h_1(s)-\dfrac{a_1}{A_2}h_2(s)-\dfrac{1}{A_2}f_3(s) \end{cases}$$

$$s\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{-a_1}{A_1} & \dfrac{a_1}{A_1} \\ \dfrac{a_1}{A_2} & \dfrac{-a_1}{A_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{A_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix}$$

- operacje macierzowe $\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$

$$\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+\dfrac{a_1}{A_1} & \dfrac{-a_1}{A_1} \\ \dfrac{-a_1}{A_2} & s+\dfrac{a_1}{A_2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{A_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{A_1 s+a_1}{A_1} & \dfrac{-a_1}{A_1} \\ \dfrac{-a_1}{A_2} & \dfrac{A_2 s+a_1}{A_2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{A_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix}$$

- odwrotność $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$

$$\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\dfrac{W_{11}}{W} & (-1)^{1+2}\dfrac{W_{12}}{W} \\ (-1)^{2+1}\dfrac{W_{21}}{W} & (-1)^{2+2}\dfrac{W_{22}}{W} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{A_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix}$$

$$W=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\det\begin{bmatrix} \dfrac{A_1 s+a_1}{A_1} & \dfrac{-a_1}{A_1} \\ \dfrac{-a_1}{A_2} & \dfrac{A_2 s+a_1}{A_2} \end{bmatrix}=\frac{(A_1 s+a_1)(A_2 s+a_1)}{A_1 A_2}-\frac{a_1^2}{A_1 A_2}=\frac{M(s)}{A_1 A_2}$$

gdzie $M(s)=s(A_1 A_2 s+a_1 A_1+a_1 A_2)$

$$W_{11}=\frac{A_2 s+a_1}{A_2}\quad\rightarrow\frac{W_{11}}{W}=\frac{A_2 s+a_1}{A_2}\frac{A_1 A_2}{M(s)}=\frac{(A_2 s+a_1)A_1}{M(s)},$$

$$W_{12}=\frac{-a_1}{A_2}\quad\rightarrow\frac{W_{12}}{W}=\frac{-a_1}{A_2}\frac{A_1 A_2}{M(s)}=\frac{-a_1 A_1}{M(s)},$$

$$W_{21}=\frac{-a_1}{A_1}\quad\rightarrow\frac{W_{21}}{W}=\frac{-a_1}{A_1}\frac{A_1 A_2}{M(s)}=\frac{-a_1 A_2}{M(s)},$$

$$W_{22}=\frac{A_1 s+a_1}{A_1}\quad\rightarrow\frac{W_{22}}{W}=\frac{A_1 s+a_1}{A_1}\frac{A_1 A_2}{M(s)}=\frac{(A_1 s+a_1)A_2}{M(s)}$$

$$\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{(A_2 s+a_1)A_1}{M(s)} & -\dfrac{-a_1 A_1}{M(s)} \\ -\dfrac{-a_1 A_2}{M(s)} & \dfrac{(A_1 s+a_1)A_2}{M(s)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{A_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{A_2 s+a_1}{M(s)} & \dfrac{a_1 A_1}{M(s)A_2} \\ \dfrac{a_1 A_2}{M(s)A_1} & \dfrac{A_1 s+a_1}{M(s)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix}$$

- wyniki

$$h_1(s)=\frac{A_2 s+a_1}{M(s)}f_1(s)+\frac{-a_1}{M(s)}f_3(s)$$

$$h_2(s)=\frac{W_2}{W}=\frac{a_1 f_1(s)-(A_2 s+a_1)f_3(s)}{M(s)}=\frac{a_1}{M(s)}f_1(s)+\frac{-(A_2 s+a_1)}{M(s)}f_3(s)$$

Można też tak

	$$s\begin{bmatrix} A_1 h_1(s) \\ A_2 h_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & +a_1 \\ a_1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix}$$
- operacje macierzowe	$$\begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 s + a_1 & -a_1 \\ -a_1 & A_2 s + a_1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix}$$
-	$$\det\begin{bmatrix} A_1 s + a_1 & -a_1 \\ -a_1 & A_2 s + a_1 \end{bmatrix} = (A_1 s + a_1)(A_2 s + a_1) - a_1^2$$

dokończyć

- Równanie charakterystyczne

  $s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2) = 0$

  Pierwiastki: zawsze s_1=0 (własności całkujące) i s_2<0 (parametry A_1, A_2, a są zawsze dodatnie)

  Stabilność: zawsze na granicy stabilności

- Punkt równowagi (na podstawie tw. o wartości końcowej)

  1° wyjście h_1 przy stałych wymuszeniach f_1 i f_3

$$\lim_{t\to\infty} h_1(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{A_2 s + a}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)}\frac{f_{10}}{s} + \lim_{s\to 0} s\frac{-a}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)}\frac{f_{30}}{s}$$, o ile granica istnieje!

$$= \lim_{s\to 0}\frac{A_2 s + a}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} f_{10} + \lim_{s\to 0}\frac{-a}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} f_{30}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{A_2 s + a}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} f_{10} + \lim_{s\to 0}\frac{-a}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} f_{30}$$

Próba obliczenia granicy:

- przez podstawienie s=0:

$$= \frac{A_2 0 + a}{0(A_1 A_2 0 + aA_1 + aA_2)} f_{10} + \frac{-a}{0(A_1 A_2 0 + aA_1 + aA_2)} f_{30}$$

$$= \quad \infty \quad\quad -\infty$$ (symbol nieoznaczony)

- połączenie wyrażeń i podstawienie s=0:

$$= \lim_{s\to 0}\frac{(A_2 s + a) f_{10} - af_{30}}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} = \lim_{s\to 0}\frac{A_2 s f_{10} + a(f_{10} - f_{30})}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)}$$

jeśli $f_{10} = f_{30}$, to:

$$= \lim_{s\to 0}\frac{A_2 s f_{10}}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} = \lim_{s\to 0}\frac{A_2 f_{10}}{(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} = \frac{A_2 f_{10}}{(A_1 A_2 0 + aA_1 + aA_2)} = \frac{A_2 f_{10}}{a(A_1 + A_2)}$$

jeśli $f_{10} \neq f_{30}$, to:

$$= \lim_{s\to 0}\frac{A_2 s f_{10} + a(f_{10} - f_{30})}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} = \frac{A_2 0 f_{10} + a(f_{10} - f_{30})}{0(A_1 A_2 0 + aA_1 + aA_2)} = +\infty \text{ lub } -\infty$$

Jednak cała powyższa próba wyznaczenia granicy jest niepotrzebna ☺, ponieważ wiemy że układ ma własności całkujące i wobec tego granica $\lim_{t\to\infty} x(t)$ przy stałym wymuszeniu nie istnieje – warunki zastosowania twierdzenia o wartości końcowej nie są spełnione

2° wyjście h_1 przy wymuszeniach impulsowych f_1 i f_3 (wiemy, że granica istnieje)

$$\lim_{t\to\infty} h_1(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{A_2 s + a}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} 1 + \lim_{s\to 0} s\frac{-a}{s(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} 1$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{A_2 s + a}{(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)} + \lim_{s\to 0}\frac{-a}{(A_1 A_2 s + aA_1 + aA_2)}$$

$$= \frac{A_2 0 + a}{(A_1 A_2 0 + aA_1 + aA_2)} + \frac{-a}{(A_1 A_2 0 + aA_1 + aA_2)} = \frac{0}{A_1 + A_2} = 0$$

Sprawdzenie (część odpowiedzi):
Zadania 1.

Równania stanu: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$

Transmitancje: $x_1(s) = \frac{L_{11}(s)}{M_{11}(s)} u_1(s) + \frac{L_{12}(s)}{M_{12}(s)} u_2(s)$, $x_2(s) = \frac{L_{21}(s)}{M_{21}(s)} u_1(s) + \frac{L_{22}(s)}{M_{22}(s)} u_2(s)$

	R.charakterystyczne	Punkt równowagi
1)	$4s^3 + b_3 s^2 - b_1 s + 2 = 0$	$x_1 = (u_1 + u_2)/2$, $x_2 = -u_1 / b_1$
2)	$ms^3 + 3s^2 - s + c = 0$	$x_1 = (u_1 + u_2)/c$, $x_2 = -u_1$
3)	$4b_1 s^3 + (4c + b_1 b_2)s^2 + (cb_2 + 4b_1)s + 2c = 0$	$x_1 = u_1 + u_2/2$, $x_2 = (3u_1 + 2u_2)/c$
4)	$mbs^3 + (m + 2b)s^2 + (2 + 4b)s + 2 = 0$	$x_1 = (2u_1 + u_2)/2$, $x_2 = 3u_1 + 2u_2$
5)	$4bs^3 + 4s^2 + 4bs + 3 = 0$	$x_1 = u_1/3$, $x_2 = u_1 + u_2$
6)	$ms^3 + mc_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + c_1 c_2 = 0$	$x_1 = u_1/c_2$, $x_2 = (u_1 + u_2)/c_1$
7)	$3ms^3 + (2m + 12)s^2 + (3c + 2)s = 0$	jeśli $u_1 + 2u_2 = 0$ to wiele rozwiązań
8)	$3ms^3 + (12 + 2m)s^2 + (3c + 2)s + 2c - 4 = 0$	$x_1 = \frac{2u_2}{c-2}$, $x_2 = \frac{(c-2)u_1 - 4u_2}{2c-4}$
9)	$10s^3 + 15s^2 + (2c - 10)s + 3c - 10 = 0$	$x_1 = \frac{-2u_1 - 10u_2}{3c-10}$, $x_2 = \frac{(c-2)u_1 + 2cu_2}{3c-10}$
10)	$5s^3 + (5 + b)s^2 + (b - 5)s - 5 = 0$	$x_1 = u_1/10 + u_2$, $x_2 = 2u_1/5$

Zadania 2 (część odpowiedzi):.

Przyjęto następujące oznaczenia:

A_1, A_2 – powierzchnia dna odpowiednio pierwszego i drugiego zbiornika

A_{w1}, A_{w2} – powierzchnia otworów odpowiednio pierwszego i drugiego zbiornika (o ile występują)

a_1, a_2 – współczynnik wynikający z linearyzacji swobodnego wypływu odpowiednio pierwszego i drugiego zbiornika (o ile występuje)

Ukł.	Model dokładny			Model zlinearyzowany
	równania	we	p. równowagi	r.charkterystyczne
3)	$\begin{cases} A_1\dot{h}_1 = f_1 - A_{w1}\sqrt{2g(h_1-h_2)} \\ A_2\dot{h}_2 = A_{w1}\sqrt{2g(h_1-h_2)} - f_3 \end{cases}$	f_1, f_3	Jeśli f_1=f_3, to wiele rozwiązań[1]: $h_1 - h_2 = \dfrac{f_1^2}{2gA_{w1}^2}$	$s(bs+c)=0$ $b = A_1A_2$ $c = a_1(A_1+A_2)$
4)	$\begin{cases} A_1\dot{h}_1 = f_{we} - f_2 \\ A_2\dot{h}_2 = f_2 - A_{w2}\sqrt{2gh_2} \end{cases}$	f_{we}, f_2	Jeśli f_2=f_{we}, to h_1 ma wiele rozw.[1] $h_2 = \dfrac{f_2^2}{2gA_{w2}^2}$	$s(A_2s+a_2)=0$
5)	$\begin{cases} A_1\dot{h}_1 = -A_{w1}\sqrt{2g(h_1-h_2)} \\ A_2\dot{h}_2 = f_1 + A_{w1}\sqrt{2g(h_1-h_2)} - A_{w2}\sqrt{2gh_2} \end{cases}$	f_1	$h_1 = h_2 = \dfrac{f_1^2}{2gA_{w2}^2}$	$as^2+bs+c=0$ $a = A_1A_2$ $b = A_1(a_1+a_2)+A_2a_1$ $c = a_1a_2$
6)	$\begin{cases} A_1\dot{h}_1 = f_1 - A_{w1}\sqrt{2g(h_1-h_2)} \\ A_2\dot{h}_2 = A_{w1}\sqrt{2g(h_1-h_2)} - f_3 + f_4 \end{cases}$	f_1, f_3, f_4	Jeśli f_1=f_3-f_4, to wiele rozwiązań[1]: $h_1 - h_2 = \dfrac{f_1^2}{2gA_{w1}^2}$	$s(bs+c)=0$ $b = A_1A_2$ $c = a_1(A_1+A_2)$
7)	$\begin{cases} A_1\dot{h}_1 = f_1 - A_{w1}\sqrt{2gh_1} \\ A_2\dot{h}_2 = A_{w1}\sqrt{2gh_1} - f_{wy} \end{cases}$	f_1, f_{wy}	Jeśli f_1=f_{wy}, to h_2 ma wiele rozw.[1] $h_1 = \dfrac{f_1^2}{2gA_{w1}^2}$	$s(A_1s+a_1)=0$
8)	Analogicznie jak p.4			
9)	$\begin{cases} A_1\dot{h}_1 = f_1 - A_{w1}\sqrt{2g(h_1-h_2)} \\ A_2\dot{h}_2 = A_{w1}\sqrt{2g(h_1-h_2)} - f_3 \\ A_3\dot{h}_3 = f_3 - A_{w3}\sqrt{2gh_3} \end{cases}$	f_1, f_3	Jak p.3, oraz $h_3 = \dfrac{f_3^2}{2gA_{w3}^2}$	$s(bs+c)(A_3s+a_3)=0$ $b = A_1A_2$ $c = a_1(A_1+A_2)$
10)				

[1] Jeśli podane przepływy są równe, to nieskończenie wiele rozwiązań. Jeśli przepływy są różne, to brak rozwiązania (brak punktu równowagi przy stałym niezerowym wymuszeniu)

Zadania 3 (część odpowiedzi):.

Oznaczenia: x_1, x_2, ... – punkty „bilansowe"

Ukł	Równania bilansowe	P. równowagi	R.charkterystyczne
1)	$\begin{cases} F = m\ddot{x}_1 + c_2x_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ 0 = b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_1x_2 \end{cases}$	$x_1 = F/c_2$ $x_2 = 0$	$M_1M_2 - b_1^2s^2 = 0$ $M_1 = ms^2 + b_1s + c_2$ $M_2 = b_1s + c_1$
5)	$\begin{cases} F_1 = c_1x_1 + b_2\dot{x}_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ F_2 = m\ddot{x}_2 + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2x_2 \end{cases}$	$x_1 = F_1/c_1$ $x_2 = F_2/c_2$	$M_1M_2 - b_1^2s^2 = 0$ $M_1 = b_1s + b_2s + c_1$ $M_2 = ms^2 + b_1s + c_2$