LISTA02: Projektowanie układów drugiego rzędu

Przygotowanie:

1. Jakie własności ma równanie 2-ego rzędu $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u$ jeśli:
   a) c>0; b) c=0; c) c<0
   Określ położenie biegunów, stabilność, oscylacje
2. Jakie pary biegunów mogą wystąpić w układzie drugiego rzędu?
3. Wzory Viète'a dla $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$: $\lambda_1 + \lambda_2 = -b/a$, $\lambda_1\lambda_2 = c/a$. Oba pierwiastki są ujemne ($\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0$) jeśli $\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \wedge \lambda_1\lambda_2 > 0$. Czy dotyczy to także pierwiastków zespolonych?

Zadania 1.

Szczególne formy (typy) równania różniczkowe 2-ego rzędu:

1) równanie oscylacyjne $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\, \dot{x}(t) + \omega_n^2\, x(t) = b_0 u(t)$, ω_n>0
2) równanie komplementarne do oscylacyjnego $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\, \dot{x}(t) - \omega_n^2\, x(t) = b_0 u(t)$, ω_n>0
3) równanie $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) = b_0 u(t)$

Wyznacz równanie charakterystyczne i bieguny (sprawdź poprawność wyznaczonych wzorów)
Określ położenie biegunów na płaszczyźnie zespolonej w zależności od wartości tłumienia.

Zadania 2.

a) Dobierz *a* tak aby w odpowiedzi układu nie pojawiały się oscylacje.
b) Dobierz *a* tak aby układ był stabilny.
c) Dobierz *a* tak aby układ dochodził do stanu równowagi bez przeregulowań
d) Kiedy układ jest niestabilny i bez oscylacji

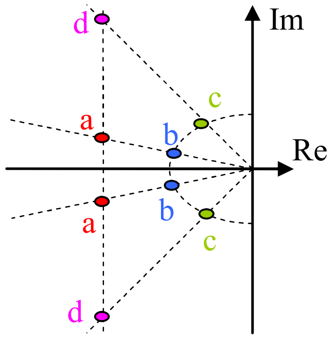
Przykłady:

1) $\ddot{x}(t) + 5\,\dot{x}(t) + ax(t) = bu(t)$
2) $a\ddot{x}(t) + 4\,\dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$
3) $\ddot{x}(t) + a\,\dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$
4) $a\ddot{x}(t) + 2a\,\dot{x}(t) + 4x(t) = -2u(t)$
5) $a\ddot{x}(t) - 2a\,\dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$
6) $-\ddot{x}(t) - 2a\,\dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$
7) $\ddot{x}(t) + 3a\,\dot{x}(t) + 9x(t) = u(t)$
8) $a\ddot{x}(t) + 2a\,\dot{x}(t) + 9x(t) = u(t)$
9) $a\ddot{x}(t) - 3\,\dot{x}(t) + 9x(t) = u(t)$
10) $-\ddot{x}(t) - 3a\,\dot{x}(t) + 9x(t) = u(t)$
11) $5\ddot{x}(t) + 5a\,\dot{x}(t) + ax(t) = bu(t)$
12) $a\ddot{x}(t) + 4\,\dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$
13) $\ddot{x}(t) + 4\,\dot{x}(t) + ax(t) = u(t)$
14) $a\ddot{x}(t) + 2a\,\dot{x}(t) - 4x(t) = u(t)$
15)
16) $-\ddot{x}(t) + 2a\,\dot{x}(t) - 4x(t) = u(t)$
17) $\ddot{x}(t) + 3\,\dot{x}(t) + 9ax(t) = u(t)$
18) $\ddot{x}(t) + 2a\,\dot{x}(t) + 9ax(t) = u(t)$

Dobierz *a* - w sensie określ zakres wartości parametru *a*.
Zadania rozwiąż na dwa sposoby: a) analiza biegunów, b) wyznaczenie ξ). Porównaj zgodność odpowiedzi otrzymanych dwoma sposobami.
Układy na granicy stabilności są uznawane jako układy niestabilne.
Równanie statyczne jest układem stabilnym.
Poprawne rozwiązanie to nie tylko zgodność odpowiedzi końcowej, ale również poprawne wprowadzanie warunków (ograniczeń) w trakcie rozwiązania.
Inne (alternatywne) sposoby badania stabilności (np. kryteria stabilności, wzory Viète'a) - jako dodatkowe sprawdzenie wyników.

Zastosowanie (podsumowanie kursu i zaliczenie)

Z1. Dobierz brakujące wartości współczynników równań o postaci:
$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\ \dot{x}(t) + \omega_n^2\ x(t) = \omega_n^2 u(t)$, tak aby położenie biegunów tych równań (a, b, c i d) było zgodne z rysunkiem,



1)

LAB: Przedstaw położenie biegunów na wykresie. Wyznacz (symulacyjnie) i porównaj odpowiedzi skokowe i impulsowe tych układów.

Z2. Dobierz *a* tak aby układ miał określone własności dynamiki (stabilny/niestabilny, z/bez oscylacji)

Przykłady:

1a) $\ddot{x}(t) + 5\ \dot{x}(t) + ax(t) = bu(t)$

2a) $(a+1)\ddot{x}(t) + 4\ \dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$

3a) $\ddot{x}(t) + (a+4)\ \dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$

4a) $(a+1)\ddot{x}(t) + 2a\ \dot{x}(t) + 4x(t) = -2u(t)$

5a) $a\ddot{x}(t) - 2a^2\ \dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$

6a) $-\ddot{x}(t) - 2a^2\ \dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$

7a) $\ddot{x}(t) + 3(a+4)\ \dot{x}(t) + 9x(t) = u(t)$

8a)

1b)

2b) $(a-1)\ddot{x}(t) + 4\ \dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$

3b) $\ddot{x}(t) + (a-4)\ \dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$

4b)

5b)

6b)

7b) $\ddot{x}(t) + 3(a-4)\ \dot{x}(t) + 9x(t) = u(t)$

8b) $(a-2)\ddot{x}(t) + 4\ \dot{x}(t) + 5x(t) = u(t)$

Rozwiązanie zadanie 1

1) $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\ \dot{x}(t) + \omega_n^2\ x(t) = b_0 u(t)$, $\omega_n>0$

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1} = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2-1}\right)$$

Jeśli $\xi^2 \geq 1$**,** to pierwiastki są rzeczywiste: $\lambda_1 = \omega_n\left(-\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)$ i $\lambda_2 = \omega_n\left(-\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)$.

Ponieważ $\omega_n>0$, to znak pierwiastków zależy od wyrażeń: $-\xi + \sqrt{\xi^2-1}$ i $-\xi - \sqrt{\xi^2-1}$.

a) Jeśli $\xi > 1$, to układ stabilny ponieważ:

$$-\xi + \sqrt{\xi^2-1} < 0 \qquad\qquad -\xi - \sqrt{\xi^2-1} < 0$$

sprawdzenie
$$\sqrt{\xi^2-1} < \xi \quad |()^2$$
$$\xi^2 - 1 < \xi^2$$
$$-1 < 0$$

b) $\xi \leq -1$, to układ niestabilny ponieważ:

$$(-\xi) + \sqrt{\xi^2-1} > 0 \qquad\qquad (-\xi) - \sqrt{\xi^2-1} > 0$$

$>0 \quad + \quad >0$

sprawdzenie
$$\sqrt{\xi^2-1} < (-\xi) \quad |()^2$$
$$\xi^2 - 1 < \xi^2$$
$$-1 < 0$$

c) Jeśli $\xi = 1$, to mamy pierwiastek podwójny $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n < 0$, układ stabilny.

d) Jeśli $\xi = -1$, to mamy pierwiastek podwójny $\lambda_{1,2} = (-\xi)\omega_n > 0$, układ niestabilny.

Jeśli $\xi^2 < 1$**,** to pierwiastki są zespolone: $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = -\xi\omega_n$ i $\mathrm{Im}(\lambda_{1,2}) = \pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$.

Ponieważ $\omega_n>0$, to znak części rzeczywistej (położenie pierwiastków) zależy od ξ:

a) jeśli $0 < \xi < 1$, to $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = -\xi\omega_n<0$, układ stabilny,

b) jeśli $-1 < \xi < 0$, to $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = -\xi\omega_n>0$, układ niestabilny,

c) jeśli $\xi = 0$, to $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = -\xi\omega_n=0$, układ na granicy stabilności.

2) $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\ \dot{x}(t) - \omega_n^2\ x(t) = b_0 u(t)$, $\omega_n>0$

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2+1} = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2+1}\right)$$

Ponieważ $\omega_n>0$, to znak pierwiastków zależy od wyrażeń: $-\xi + \sqrt{\xi^2+1}$ i $-\xi - \sqrt{\xi^2+1}$.

a) Jeśli $\xi \geq 0$, to:

$$-\xi + \sqrt{\xi^2+1} > 0 \qquad\qquad -\xi - \sqrt{\xi^2+1} < 0$$

sprawdzenie
$$\sqrt{\xi^2+1} > \xi \quad |()^2$$
$$\xi^2 + 1 > \xi^2$$
$$1 > 0$$

b) Jeśli $\xi < 0$, to:

$$(-\xi) + \sqrt{\xi^2+1} > 0 \qquad\qquad (-\xi) - \sqrt{\xi^2+1} < 0$$

$>0 \quad + \quad >0$

sprawdzenie
$$\sqrt{\xi^2+1} > (-\xi) \quad |()^2$$
$$\xi^2 + 1 > \xi^2$$
$$1 > 0$$

Zawsze $\lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2+1} > 0$ i $\lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2+1} < 0$

Rozwiązanie zadanie 2 – przykład 1: $\ddot{x}(t) + 5\,\dot{x}(t) + ax(t) = bu(t)$

I. Rozwiązanie na podstawie wyznaczonych pierwiastków

$$\lambda^2 + 5\lambda + a = 0$$

$$\Delta = 25 - 4a\,, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4a}}{2}$$

Zad.1a. (Odpowiedź bez oscylacji)
Układ musi spełniać warunek: $\Delta \ge 0 \quad \rightarrow \quad 25 - 4a \ge 0 \quad \rightarrow \quad a \le 25/4$

Odpowiedź zad.1a: $\boxed{a \le 25/4}$

Zad.1b. (Układ stabilny)
Układ musi spełniać warunek: $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$
Rozważamy dwa przypadki: 1° ($\Delta < 0$) - bieguny zespolone; 2° ($\Delta \ge 0$) - bieguny rzeczywiste

1° (a), (b)

$$\begin{cases} \Delta < 0 & \rightarrow \quad 25 - 4a < 0 \quad \rightarrow \quad a > 25/4 \\ \mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = \dfrac{-5}{2} < 0 & \rightarrow \text{zawsze} \end{cases}$$

Odp.1° [a ∧ b]: $a > 25/4$

2° (a), (b), (c)

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 & \rightarrow \quad a \le 25/4 \\ \mathrm{Re}(\lambda_1) = \dfrac{-5+\sqrt{25-4a}}{2} < 0 & \rightarrow (2°\mathrm{b}) \rightarrow \quad a > 0 \\ \mathrm{Re}(\lambda_2) = \dfrac{-5-\sqrt{25-4a}}{2} < 0 & \rightarrow (2°\mathrm{c}) \rightarrow \quad \text{zawsze} \end{cases}$$

(2°b) $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$	(2°c) $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$
$\dfrac{-5+\sqrt{25-4a}}{2} < 0$	$\dfrac{-5-\sqrt{25-4a}}{2} < 0$
$-5+\sqrt{25-4a} < 0$	$-5-\sqrt{25-4a} < 0$
$\sqrt{25-4a} < 5 \quad \lvert(\ )^2$	$\sqrt{25-4a} > -5 \qquad \rightarrow$ zawsze
$25 - 4a < 25$	
$-4a < 0 \quad \rightarrow \quad a > 0$	

Odp.2° [a ∧ b ∧ c]: $a \le 25/4 \ \wedge\ \boldsymbol{a > 0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{0 < a \le 25/4}$

Podczas rozwiązywania każdej z nierówności b i c, można przyjąć, że $\sqrt{\Delta}$ jest zawsze nieujemny, bo w sumie nierówności b i c uwzględniają przypadek gdy $\sqrt{\Delta}$ >0 i $\sqrt{\Delta}$ <0.

Alternatywny sposób rozwiązania **2°** (sprawdzenie):

2° (a), (b), (c)

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 & \rightarrow \quad a \le 25/4 \\ \mathrm{Re}(\lambda_1) = \dfrac{-5+\sqrt{25-4a}}{2} < 0 & \\ \mathrm{Re}(\lambda_2) = \dfrac{-5-\sqrt{25-4a}}{2} < 0 & \end{cases} \quad \rightarrow (2°\mathrm{bc}) \rightarrow \quad a > 0$$

(2°bc) Dla $\ddot{x}(t) + 5\,\dot{x}(t) + ax(t) = bu(t)$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -5/1 < 0$ zawsze $\qquad \lambda_1\lambda_2 = a/1 > 0 \quad \rightarrow a > 0$

Odp.2° [a ∧ bc]: $a \le 25/4 \ \wedge\ a > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < a \le 25/4$

Odpowiedź zad 1b [1° ∨ 2°]: $\boldsymbol{a > 25/4} \ \vee\ \mathbf{0 < a \le 25/4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a > 0}}$

Zad.1c. (Układ stabilny, bez oscylacji)
Układ musi spełniać warunek: $\Delta \geq 0$ i $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$

1°

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 & \text{(a)} \\ \mathrm{Re}(\lambda_1) = \dfrac{-5+\sqrt{25-4a}}{2} < 0 & \text{(b)} \\ \mathrm{Re}(\lambda_2) = \dfrac{-5-\sqrt{25-4a}}{2} < 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

$\rightarrow \quad a \leq 25/4$

$\rightarrow (1°\text{b}) \rightarrow \quad a > 0$

$\rightarrow (1°\text{c}) \rightarrow$ zawsze

Rozwiązanie takie jak Zad.1b/p.2°

Odpowiedź zad 1c: $\boxed{0 < a \leq 25/4}$

II. Rozwiązanie na podstawie własności równania oscylacyjnego

$$\ddot{x}(t) + 5\,\dot{x}(t) + ax(t) = bu(t)$$

1° Jeśli $a > 0$, to

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\,\dot{x}(t) + \omega^2\,x(t) = u(t),\ \omega > 0$$

gdzie:

$$\begin{cases} \omega^2 = a \\ 2\xi\omega = 5 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} \omega = \sqrt{a} & > 0 \text{ (z def.)} \\ \xi = 5/(2\sqrt{a}) & \end{matrix}$$

2° Jeśli $a < 0$, to

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\,\dot{x}(t) - \omega^2\,x(t) = u(t),\ \omega > 0$$

gdzie:

$$\begin{cases} -\omega^2 = a \\ 2\xi\omega = 5 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} \omega = \sqrt{-a} & > 0 \text{ (z def.)} \\ \xi = 5/(2\sqrt{-a}) & \end{matrix}$$

3° Jeśli a=0, to pierwiastki $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -5$ (człon inercyjno-całkujący) – układ na granicy stabilności

Zad.1a. (Odpowiedź bez oscylacji)
Układ musi spełniać warunek:
1°) równanie oscylacyjne i $|\xi| \geq 1$, lub 2°) równanie komplementarne do oscylacyjnego, lub 3°) a=0

1° (a), (b) $\begin{cases} a > 0 \\ \xi \geq 1 \end{cases}$

$$\xi = 5/(2\sqrt{a}) \geq 1$$
$$5/2 \geq \sqrt{a}$$
$$25/4 \geq a$$

1° (a), (c) $\begin{cases} a > 0 \\ \xi \leq -1 \end{cases}$

$$\xi = 5/(2\sqrt{a}) \leq -1$$
$$-5/2 \geq \sqrt{a} \rightarrow \text{ nigdy}$$
$$\text{bo } \omega = \sqrt{a} > 0$$

Odp.1° [a ∧ (b∨c)]: $a > 0 \ \wedge \ 25/4 \geq a \quad \rightarrow \quad 0 < a \leq 25/4$

2° $a < 0$
Odp.2°: $a < 0$

3° $a = 0$
Odp.3°: $a = 0$

Odpowiedź zad 1a [1° ∨ 2° ∨ 3°]: $0 < a \leq 25/4 \ \vee \ a < 0 \ \vee \ a = 0 \ \rightarrow \boxed{a \leq 25/4}$

Zad.1b. (Układ stabilny)
Układ musi spełniać warunek: równanie oscylacyjne i $\xi > 0$

1° (a), (b) $\begin{cases} a > 0 \\ \xi > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \ \xi = 5/(2\sqrt{a}) > 0 \rightarrow$ zawsze bo $\omega = \sqrt{a} > 0$

Odpowiedź zad 1b: $\boxed{a > 0}$

Zad.1c. (Układ stabilny, bez oscylacji)
Układ musi spełniać warunek: równanie oscylacyjne i $\xi \geq 1$

1° (a), (b) $\begin{cases} a > 0 \\ \xi \geq 1 \end{cases}$

$$\rightarrow \ \xi = 5/(2\sqrt{a}) \geq 1$$
$$5/2 \geq \sqrt{a}$$
$$25/4 \geq a$$

Odpowiedź zad 1c: $\boxed{0 < a \leq 25/4}$

Rozwiązanie zadanie 2 – przykład 2: $a\ddot{x}(t)+4\,\dot{x}(t)+6x(t)=u(t)$

IA. Rozwiązanie na podstawie wyznaczonych pierwiastków

$$a\ddot{x}(t)+4\,\dot{x}(t)+6x(t)=u(t)$$

$$a\lambda^2+4\lambda+6=0$$

$$\Delta=16-24a=4(4-6a),\qquad \lambda_{1,2}=\frac{-4\pm2\sqrt{4-6a}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4-6a}}{a},\ a\neq0$$

Dla a=0 mamy równanie pierwszego rzędu: $4\,\dot{x}(t)+6x(t)=u(t)$ z jednym biegunem $\lambda_1=-6/4$.

Zad.1a. (Odpowiedź bez oscylacji)

1° Jeśli $a\neq0$, to układ musi spełniać warunek: $a\neq0$ i $\Delta\geq0$ $\rightarrow$ $4(4-6a)\geq0$ $\rightarrow$ $a\leq2/3$

2° Dla a=0 układ również reaguje bez oscylacji

Odpowiedź zad.1a [1° ∨ 2°]: ($a\neq0$ ∧ $a\leq2/3$) ∨ a=0 $\rightarrow$ $\boxed{a\leq2/3}$

Zad.1b. (Układ stabilny)

Jeśli $a\neq0$, to układ musi spełniać warunek: $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})<0$. Rozważamy dwa przypadki gdy $a\neq0$:
1° ($\Delta<0$) lub 2° ($\Delta\geq0$).
W rozwiązaniu należy również uwzględnić przypadek 3° dla a=0.

1° (a) $\Delta<0,\ a\neq0$ $\rightarrow$ $4(4-6a)<0$ $\rightarrow$ $a>2/3$

(b) $\mathrm{Re}(\lambda_1)=\mathrm{Re}(\lambda_2)=\dfrac{-2}{a}<0$ $\rightarrow$ zawsze (bo $a>2/3$)

Odp.1° [a ∧ b]: $a>2/3$

2°

(a) $\Delta\geq0,\ a\neq0$ $\rightarrow$ $a\leq2/3$, $a\neq0$

(b) $\mathrm{Re}(\lambda_1)=\dfrac{-2+\sqrt{4-6a}}{a}<0$ $\rightarrow$ (2°b) $\rightarrow$ zawsze

(c) $\mathrm{Re}(\lambda_2)=\dfrac{-2-\sqrt{4-6a}}{a}<0$ $\rightarrow$ (2°c) $\rightarrow$ $a>0$

(2°b) $\mathrm{Re}(\lambda_1)<0$	(2°c) $\mathrm{Re}(\lambda_2)<0$
$\dfrac{-2+\sqrt{4-6a}}{a}<0$	$\dfrac{-2-\sqrt{4-6a}}{a}<0$
gdy a>0	gdy a>0
$-2+\sqrt{4-6a}<0$	$-2-\sqrt{4-6a}<0$
$\sqrt{4-6a}<2\quad \vert(\ )^2$	$\sqrt{4-6a}>-2$ $\rightarrow$ zawsze
$4-6a<4$	
$-6a<0$ $\rightarrow$ $a>0$ ($\rightarrow$ zawsze)	
gdy a<0	gdy a<0
$-2+\sqrt{4-6a}>0$	$-2-\sqrt{4-6a}>0$
$\sqrt{4-6a}>2$	$\sqrt{4-6a}<-2$ $\rightarrow$ nigdy
$\sqrt{4-6a}>2\quad \vert(\ )^2$	
$4-6a>4$	
$-6a>0$ $\rightarrow$ a < 0 ($\rightarrow$ zawsze)	

Odp.2° [a ∧ b ∧ c]: ($a\neq0$ ∧ $a\leq2/3$) ∧ a>0 $\rightarrow$ **$0<a\leq2/3$**

Alternatywny sposób rozwiązania **2°** (sprawdzenie):

2° (a), (b), (c)

$$\begin{cases} \Delta \geq 0,\ \ a \neq 0 & \text{(a)} \\ \mathrm{Re}(\lambda_1) = \dfrac{-2+\sqrt{4-6a}}{a} < 0 & \text{(b)} \\ \mathrm{Re}(\lambda_2) = \dfrac{-2-\sqrt{4-6a}}{a} < 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

$\rightarrow \quad a \leq 2/3\,,\ a \neq 0$

$\rightarrow (2°\text{bc}) \rightarrow \quad a > 0$

Wzory Viete'a dla $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$: $\quad \lambda_1 + \lambda_2 = -b/a\,,\ \lambda_1\lambda_2 = c/a$

$$\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0 \quad \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \ \wedge\ \lambda_1\lambda_2 > 0$$

(2°bc) Dla $a\ddot{x}(t) + 4\,\dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -4/a < 0 \quad \rightarrow a > 0 \qquad\qquad \lambda_1\lambda_2 = 6/a > 0 \quad \rightarrow a > 0$$

Odp.2° [a ∧ bc]: $\quad (a \neq 0 \ \wedge\ a \leq 2/3) \ \wedge\ a > 0 \quad \rightarrow\ 0 < a \leq 2/3$

3° (a), (b)

$$\begin{cases} a = 0 & \text{(a)} \\ \lambda_1 = -6/4 < 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

$\rightarrow$ zawsze

Odp.3°: $\ a = 0$

<u>**Odpowiedź zad 1b**</u> **[**1° ∨ **2°** ∨ **3°]:** $a > 2/3\ \vee\ \mathbf{0 < a \leq 2/3}\ \ \vee\ \ \mathbf{a = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a \geq 0}}$

Zad.1c. (Układ stabilny, bez oscylacji)

Jeśli $a \neq 0$, to układ musi spełniać warunek: $\Delta \geq 0$ i $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ (Przypadek 1°). W rozwiązaniu należy również uwzględnić przypadek 2° dla a=0.

1° (a), (b), (c)

$$\begin{cases} \Delta \geq 0,\ \ a \neq 0 & \text{(a)} \\ \mathrm{Re}(\lambda_1) = \dfrac{-2+\sqrt{4-6a}}{a} < 0 & \text{(b)} \\ \mathrm{Re}(\lambda_2) = \dfrac{-2-\sqrt{4-6a}}{a} < 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

$\rightarrow \quad a \leq 2/3\,,\ a \neq 0$

$\rightarrow (2°\text{b}) \rightarrow$ zawsze

$\rightarrow (2°\text{c}) \rightarrow \quad a > 0$

Rozwiązanie takie jak Zad.1b/p.2°

2° (a), (b)

$$\begin{cases} a = 0 & \text{(a)} \\ \lambda_1 = -6/4 < 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

$\rightarrow$ zawsze

Odp.2°: $\ a = 0$

<u>**Odpowiedź zad 1c**</u> **[**1° ∨ **2°]:** $\quad \mathbf{0 < a \leq 2/3}\ \ \vee\ \ \mathbf{a = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{0 \leq a \leq 2/3}}$

IB. Rozwiązanie na podstawie wyznaczonych pierwiastków

$a\ddot{x}(t)+4\,\dot{x}(t)+6x(t)=u(t)\;\;/\,a\neq 0$

$$\ddot{x}(t)+\frac{4}{a}\,\dot{x}(t)+\frac{6}{a}x(t)=\frac{u(t)}{a}$$

$$\lambda^2+\frac{4}{a}\lambda+\frac{6}{a}=0$$

$$\Delta=\frac{16}{a^2}-\frac{24}{a}=4\left(\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}\right),\qquad \lambda_{1,2}=\frac{-\frac{4}{a}\pm 2\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}}{2}=-\frac{2}{a}\pm\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}},\; a\neq 0$$

Dla a=0 mamy równanie pierwszego rzędu: $4\,\dot{x}(t)+6x(t)=u(t)$ z jednym biegunem $\lambda_1=-6/4$.

Zad.1a. (Odpowiedź bez oscylacji)

1° Jeśli $a\neq 0$, to układ musi spełniać warunek: $a\neq 0$ i $\Delta\geq 0$

$$\Delta\geq 0 \;\rightarrow\; 4\left(\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}\right)\geq 0 \;\rightarrow\; \frac{4}{a^2}(4-6a)\geq 0 \;\rightarrow\; a\leq 2/3$$

2° Dla a=0 układ również reaguje bez oscylacji

Odpowiedź zad.1a [1° ∨ 2°]: $(a\neq 0 \;\wedge\; a\leq 2/3)\;\vee\; a=0 \;\rightarrow\; \boxed{a\leq 2/3}$

Zad.1b. (Układ stabilny)

Jeśli $a\neq 0$, to układ musi spełniać warunek: $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})<0$. Rozważamy dwa przypadki gdy $a\neq 0$:
1° ($\Delta<0$) lub 2° ($\Delta\geq 0$).
W rozwiązaniu należy również uwzględnić przypadek 3° dla a=0.

1°

(a) $\Delta<0,\; a\neq 0$ $\;\rightarrow\; 4\left(\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}\right)=\frac{4}{a^2}(4-6a)<0 \;\rightarrow\; a>2/3$

(b) $\mathrm{Re}(\lambda_1)=\mathrm{Re}(\lambda_2)=\frac{-2}{a}<0$ $\;\rightarrow$ zawsze (bo $a>2/3$)

Odp.1° [a ∧ b]: $a>2/3$

2°

(a) $\Delta\geq 0,\; a\neq 0$ $\;\rightarrow\; a\leq 2/3,\, a\neq 0$

(b) $\mathrm{Re}(\lambda_1)=-\frac{2}{a}+\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}<0$ $\;\rightarrow$ (2°b) $\rightarrow\; a>0$

(c) $\mathrm{Re}(\lambda_2)=-\frac{2}{a}-\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}<0$ $\;\rightarrow$ (2°c) $\rightarrow\; a>0$

(2°b) $\mathrm{Re}(\lambda_1)<0$	(2°c) $\mathrm{Re}(\lambda_2)<0$
$-\frac{2}{a}+\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}<0$	$-\frac{2}{a}-\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}<0$
$\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}<\frac{2}{a}$	$\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}>-\frac{2}{a}$
gdy a>0	zawsze jeśli a>0
$\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}<\frac{2}{a}\quad \vert(\;)^2$	$\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}>-\frac{2}{a}$ $\rightarrow$ dla $a>0$ zawsze
$\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}<\frac{4}{a^2}$	
$-\frac{6}{a}<0 \;\rightarrow$ dla $a>0$ zawsze	

gdy a<0	gdy a<0
$\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}<\frac{2}{a}$ $\rightarrow$ dla a<0 nigdy	$\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}}>-\frac{2}{a}$ $\vert(\ )^2$
	$\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}>\frac{4}{a^2}$ $\rightarrow$ dla $a<0$ zawsze

Odp.2° [a ∧ b ∧ c]: (*a*≠0 ∧ $a \le 2/3$) ∧ *a*>0 → 0 < *a* ≤ 2/3
Alternatywny sposób rozwiązania **2°** z zastosowaniem wzorów Viete'a – analogicznie jak IA

3° (a) (b)
$$\begin{cases} a = 0 \\ \lambda_1 = -6/4 < 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \text{zawsze}$$

Odp.3°: *a* = 0

<u>Odpowiedź zad 1b</u> [1° ∨ 2° ∨ 3°]: $a > 2/3$ ∨ **0 < *a* ≤ 2/3** ∨ ***a* = 0** → $\boxed{a \ge 0}$

Zad.1c. (Układ stabilny, bez oscylacji)
Jeśli $a \neq 0$, to układ musi spełniać warunek: $\Delta \ge 0$ i $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ (Przypadek 1°). W rozwiązaniu należy również uwzględnić przypadek 2° dla a=0.

1° (a) (b) (c) (c)
$$\begin{cases} \Delta \ge 0,\ a \neq 0 & \rightarrow \quad a \le 2/3,\ a \neq 0 \\ \mathrm{Re}(\lambda_1) = -\frac{2}{a}+\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}} < 0 & \rightarrow (2°b) \rightarrow \quad a>0 \\ & \rightarrow (2°c) \rightarrow \quad a>0 \\ \mathrm{Re}(\lambda_2) = -\frac{2}{a}-\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a}} < 0 & \rightarrow (2°c) \rightarrow \quad a>0 \end{cases}$$

Rozwiązanie takie jak Zad.1b/p.2°

2° (a) (b)
$$\begin{cases} a = 0 \\ \lambda_1 = -6/4 < 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \text{zawsze}$$

Odp.2°: $a = 0$

<u>Odpowiedź zad 1c</u> [1° ∨ 2°]: 0 < *a* ≤ 2/3 ∨ *a* = 0 → $\boxed{0 \le a \le 2/3}$

II. Rozwiązanie na podstawie własności równania oscylacyjnego

$$a\ddot{x}(t)+4\,\dot{x}(t)+6x(t)=u(t)\ \ /\ a\neq 0$$

$$\ddot{x}(t)+\frac{4}{a}\,\dot{x}(t)+\frac{6}{a}x(t)=\frac{u(t)}{a}$$

1° Jeśli $a>0$

$$\ddot{x}(t)+2\xi\omega\,\dot{x}(t)+\omega^2\ x(t)=u(t)\,,\ \omega>0$$

gdzie:

$$\begin{cases}\omega^2=\dfrac{6}{a}\\ 2\xi\omega=\dfrac{4}{a}\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{array}{l}\omega=\sqrt{6/a}\quad >0\ (\text{z def.})\\ \xi=\dfrac{4}{a}\dfrac{1}{2\sqrt{6/a}}=\dfrac{2}{\sqrt{6a}}\end{array}$$

2° Jeśli $a<0$

$$\ddot{x}(t)+2\xi\omega\,\dot{x}(t)-\omega^2\ x(t)=u(t)\,,\ \omega>0$$

gdzie:

$$\begin{cases}-\omega^2=\dfrac{6}{a}\\ 2\xi\omega=\dfrac{4}{a}\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{array}{l}\omega=\sqrt{-6/a}\quad >0\ (\text{z def.})\\ \xi=\dfrac{4}{-(-a)}\dfrac{1}{2\sqrt{-6/a}}=\dfrac{-2}{\sqrt{-6a}}\end{array}$$

3° Dla a=0 mamy równanie pierwszego rzędu: $4\,\dot{x}(t)+6x(t)=u(t)$ z jednym biegunem $\lambda_1=-6/4$, czyli układ stabilny, bez oscylacji.

Zad.1a. (Odpowiedź bez oscylacji)
Układ musi spełniać warunek:
1°) równanie oscylacyjne i $|\xi|\geq 1$, lub 2°) równanie komplementarne do oscylacyjnego, lub 3°) a=0

1° (a) (b) $\begin{cases}a>0\\ \xi\geq 1\end{cases}$

$$\xi=2/\sqrt{6a}\geq 1$$
$$2\geq\sqrt{6a}$$
$$2/3\geq a$$

1° (a) (c) $\begin{cases}a>0\\ \xi\leq -1\end{cases}$

$$\xi=2/\sqrt{6a}\leq -1\quad\rightarrow\ \text{nigdy}$$
$$\text{bo}\ \ \omega=\sqrt{6/a}>0$$

Odp.1° [a ∧ (b∨c)]: 0 < *a* ≤ 2/3

2° $a<0$
Odp.2°: *a* < 0

3° $a=0$
Odp.3°: *a* = 0

<u>Odpowiedź zad 1a</u>: [1° ∨ 2° ∨ 3°] 0 < *a* ≤ 2/3 ∨ *a* < 0 ∨ *a* = 0 $\rightarrow$ $\boxed{\mathbf{a\leq 2/3}}$

Zad.1b. (Układ stabilny)
Układ musi spełniać warunek: równanie oscylacyjne i ξ >0, lub 3°) a=0

1° (a) (b) $\begin{cases}a>0\\ \xi>0\end{cases}$ $\rightarrow\ \xi=2/\sqrt{6a}>0\rightarrow$ zawsze bo $\omega=\sqrt{6/a}>0$

<u>Odpowiedź zad 1b:</u> $\boxed{\mathbf{a\geq 0}}$

Zad.1c. (Układ stabilny, bez oscylacji)
Układ musi spełniać warunek: równanie oscylacyjne i ξ ≥ 1 lub 3°) a=0

1° (a) (b) $\begin{cases}a>0\\ \xi\geq 1\end{cases}$ $\rightarrow\ \xi=2/\sqrt{6a}\geq 1$

$$2\geq\sqrt{6a}$$
$$2/3\geq a$$

<u>Odpowiedź zad 1c:</u> $\boxed{\mathbf{0\leq a\leq 2/3}}$

Sprawdzenie (część odpowiedzi):

Przykład	Zad.1a	Zad.1b	Zad.1c	Zad.1d
1	$a \le 25/4$	$a > 0$	$0 < a \le 25/4$	
2	$a \le 2/3$	$a \ge 0$	$0 \le a \le 2/3$	$a < 0$
3	$a \le -4 \lor a \ge 4$	$a > 0$	$a \ge 4$	$a \le -4$
4	$a \le 0 \lor a \ge 4$	$a \ge 0$	$a \ge 4$ i a=0	$a < 0$
5	$a \le 0 \lor a \ge 4$	$a = 0$	$a = 0$	$a < 0 \lor a \ge 4$
6	zawsze	nigdy	nigdy	zawsze
7	$a \le -2 \lor a \ge 2$	$a > 0$	$a \ge 2$	$a \le -2$
8	$a \le 0 \lor a \ge 9$	$a \ge 0$	$a \ge 9$ i a=0	
9	$a \le 1/4$	nigdy	nigdy	
10	zawsze	nigdy	nigdy	

Uwagi i podpowiedzi

1) Rozwiązywanie nierówności z pierwiastkiem

Ogólne zasady:

– wyznacz dziedzinę wyrażenia (dziedzina funkcji pierwiastkowej),

– wykonaj przekształcenia, tak by po jednej stronie został tylko pierwiastek.

– o ile jest to konieczne (poprawne) podnieś obustronnie do kwadratu - pamiętaj, że:

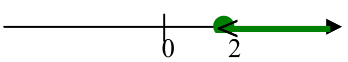
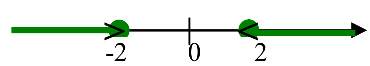
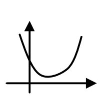
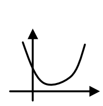
(1) gdy obie strony są dodatnie, znak nierówności jest zachowany,

(2) gdy obie strony są ujemne, znak nierówności zmienia się,

(3) gdy jedna strona dodatnia a druga ujemna, to nierówność będzie albo zawsze prawdziwa, albo zawsze fałszywa (więc nie ma potrzeby podnosić do kwadratu),

- wyznacz odpowiedź uwzględniając dziedzinę wyrażenia.

Przykłady

$4 - x + \sqrt{x-2} > 0 \quad \to \quad \sqrt{x-2} > 4 - x$	$-x - 5 + \sqrt{x^2-4} < 0 \quad \to \quad \sqrt{x^2-4} < 5 + x$
Dziedzina: $x - 2 \ge 0 \quad \to x \ge 2$  	Dziedzina: $x^2 - 4 \ge 0 \to x^2 \ge 4 \to x \le -2 \lor x \ge 2$ 
1a) Jeśli $\sqrt{x-2} \ge 0$ i $4 - x \ge 0$ $(x \le 4)$, to $+\sqrt{x-2} > 4 - x$ (1) $x - 2 > (4-x)^2$ $x - 2 > 16 - 8x + x^2$ $x^2 - 8x + 18 < 0$  Odp.1a) nigdy	1a) Jeśli $\sqrt{x^2-4} \ge 0$ i $5 + x \ge 0$ $(x \ge -5)$, to $+\sqrt{x^2-4} < 5 + x$ (1) $x^2 - 4 < (5+x)^2$ $x^2 - 4 < 25 + 10x + x^2$ $x > -2.9$ Odp. a) $x > -2.9 \quad \land \quad x \ge -5 \quad \to \quad x > -2.9$ ale dziedzinie tylko $-2.9 < x \le -2 \lor x \ge 2$
1b) Jeśli $\sqrt{x-2} \ge 0$ i $4 - x < 0$ $(x > 4)$, to $+\sqrt{x-2} > 4 - x$ (zawsze, +>-) (3) Odp.1b) $x > 4$ (w dziedzinie)	1b) Jeśli $\sqrt{x^2-4} \ge 0$ i $5 + x < 0$ $(x < -5)$, to $+\sqrt{x^2-4} < 5 + x$ (nigdy, +<-) (3) Odp.b) nigdy
Odp.1) $x > 4$, przy założeniu $\sqrt{x-2} \ge 0$	Odp.1) $-2.9 < x \le -2 \lor x \ge 2$, przy założeniu $\sqrt{x^2-4} \ge 0$
2a) Jeśli $\sqrt{x-2} < 0$ i $4 - x \ge 0$ $(x \le 4)$, to $-\sqrt{x-2} > 4 - x$ (nigdy,->+) (3) Odp.2a) nigdy	2a) Jeśli $\sqrt{x^2-4} < 0$ i $5 + x \ge 0$ $(x \ge -5)$, to $-\sqrt{x^2-4} < 5 + x$ (zawsze, -<+) (3) Odp.2a) $x \ge -5$, ale w dziedzinie tylko $-5 \le x \le -2 \lor x \ge 2$
2b) Jeśli $\sqrt{x-2} < 0$ i $4 - x < 0$ $(x > 4)$, to $-\sqrt{x-2} > 4 - x$ (2) $\sqrt{x-2} < x - 4$ (1) $x - 2 < (x-4)^2$ $x - 2 < x^2 - 8x + 16$ $x^2 - 8x + 18 > 0$ (zawsze)  Odp.2b) $x > 4$ (w dziedzinie)	2b) Jeśli $\sqrt{x^2-4} < 0$ i $5 + x < 0$ $(x < -5)$, to $-\sqrt{x^2-4} < 5 + x$ (2) $\sqrt{x^2-4} > -(5+x)$ (obie str.>0) $x^2 - 4 > (-(5+x))^2$ $x^2 - 4 > 25 + 10x + x^2$ $x < -2.9$ Odp.2b) $x < -2.9 \quad \land \quad x < -5 \quad \to \quad x < -5$ (w dziedzinie)
Odp.2) $x > 4$, przy założeniu $\sqrt{x-2} < 0$	Odp.2) $x \le -2 \quad \lor \quad x \ge 2$, przy założeniu $\sqrt{x^2-4} < 0$
Odp. $\sqrt{x^2-4} < 0$ (niezależnie od znaku $\sqrt{x-2}$)	Odp. $-2.9 < x \le -2 \lor x \ge 2$ (niezależnie od znaku $\sqrt{x^2-4}$)

Komentarz:
1) Analizując przypadki dla nieujemnej (1) i ujemnej (2) wartości funkcji pierwiastkowej, zauważamy że odpowiedzi cząstkowe w poszczególnych przypadkach (1a i 1b oraz 2a i 2b) nigdy się nie pokrywają, tylko uzupełniają.

Zastosowanie rozwiązywania nierówności z funkcją pierwiastkową występuje w Zadaniu 2, gdzie analizowane są gdy dwa bieguny układu drugiego rzędu (2 pierwiastki wielomianu 2.stopnia):

- Wyznaczanie dziedziny na podstawie argumentu funkcji pierwiastkowej odpowiada wyznaczeniu zakresu wartości, gdy biegun (wyrażenie) ma wartość rzeczywistą (dla wartości poza tym zakresem biegun ma wartość zespoloną i rozwiązywana jest inna nierówność).
- Przy rozwiązywaniu nierówności z funkcją pierwiastkową uwzględniamy tylko dodatnią wartość pierwiastka (np. tylko $\sqrt{16} = 4$), ponieważ zawsze analizowane są dwa bieguny układu i jeden z nich zawiera dodatnią a drugi ujemną wartość funkcji pierwiastkowej. Poszukiwane jest rozwiązanie nierówności (zakres wartości), które zawsze spełnia nierówność (niezależnie od znaku funkcji pierwiastkowej).