LISTA01: Rozwiązywanie i własności równań różniczkowych

Przygotowanie teoretyczne

1. Na czym polega całkowanie równań różniczkowych? Co to jest całka ogólna i szczególna r.r.?
2. Przedstaw procedurę rozwiązywania równań różniczkowych – na czym polega klasyczna metoda rozwiązywania równań różniczkowych? Kiedy można ją zastosować?

Oznaczenia: u – wejście, wymuszenie; x – wyjście, rozwiązanie; a, b – parametry

Zadania 1. Dla podanych przykładów, przedstaw rozwiązanie ogólne i szczególne dla:
a) $u(t)=2$, warunki początkowe to stan równowagi,
b) $u(t)=2$, warunki początkowe $x(0)=2$ (jeśli potrzeba więcej, to wybrać dowolne)
c) $u(t)=3\cdot 1(t)$, w warunkach początkowych wszystkie pochodne $x(t)$ są równe zero.
d) $u(t)=3\cdot\sin(2t)$, zerowe warunki początkowe

1) $a\dot{x}(t)+2x(t)=3u(t)$
2) $2\dot{x}(t)+ax(t)=2u(t)$
3) $2\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+3x(t)=2u(t)$, $b=10$
4) $2\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+3x(t)=2u(t)$, $b=2$
5)

Zastosuj ogólna metodę rozwiązywania równań różniczkowych liniowych.
LAB: Rozwiąż równania symulacyjnie i porównaj z rozwiązaniem analitycznym.

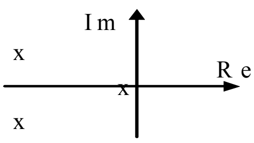
Zadania 2. Dla podanego równania różniczkowego
a) podaj czy jest liniowe, stacjonarne, jaki ma rząd,
b) napisz równanie statyczne i charakterystyczne,
c) wyznacz punkt/punkty równowagi,
d) podaj przykłady warunków początkowych,
Przykłady:

1) $a\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+bx(t)=\ddot{u}(t)+2u(t)$
2) $\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+b\sqrt{x(t)}=u(t)$
3) $4\dddot{x}(t)+\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+x^2(t)=u(t)$
4) $\ddot{x}(t)+4\dot{x}(t)+ax^3(t)=u(t)$
5) $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+ax(t)=u(t)+2\dot{u}(t)$
6) $\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+2x(t)=u(t)+a\dot{u}(t)$
7) $a^2\dddot{x}(t)+\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+u_1(t)x(t)=u_2(t)$
8) $2\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+a(t)x(t)=2u_1(t)+3u_2(t)$
9) $5\dddot{x}(t)+\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+x(t)u_1(t)=u_2(t)$
10) $2\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+a^3x(t)=2u_1(t)+3u_2(t)$
11) $\ddot{x}^2(t)+3\dot{x}(t)+ax(t)=u^2(t)$
12) $\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+ax(t)=u^2(t)$
13) $b^2\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+x(t)=\sqrt{au(t)}+\dot{u}(t)$
14) $3\dddot{x}(t)+2\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)=2u_1(t)+\dot{u}_1(t)$
15) $a\,\dot{x}(t)+2ab\,x(t)=2\ddot{u}(t)+\dot{u}(t)$
16) $a\,\dot{x}(t)-2ab\,x(t)=2u(t)+\dot{u}(t)$

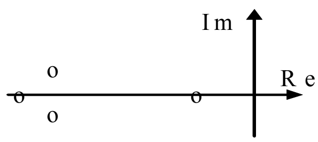
LAB*: Rozwiąż analitycznie i/lub symulacyjnie

Zadania 3. Dla układu, który ma wskazane bieguny:
a) przedstaw ogólną postać rozwiązania swobodnego (wskaż które parametry zależą od biegunów)
b) naszkicuj rozwiązanie swobodne i jego składniki (z dokładnością do warunków początkowych)
c) naszkicuj odpowiedź skokową układu o podanych biegunach
d) naszkicuj odpowiedź impulsową układu o biegunach
e) naszkicuj składniki rozwiązania swobodnego i wskaż który z nich zaniknie najszybciej? (uzasadnij)
f) który biegun ma decyduje o czasie zanikania rozwiązania swobodnego? (uzasadnij)
g) zaproponuj i uzasadnij uproszczenie układu

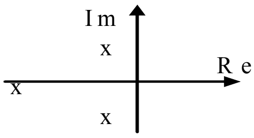
Przykład 1



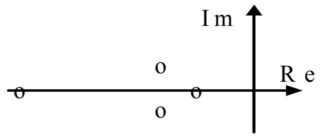
Przykład 2



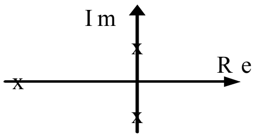
Przykład 3



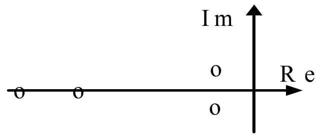
Przykład 4



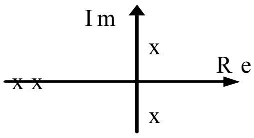
Przykład 5



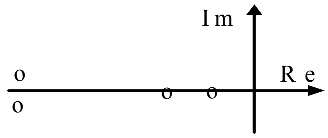
Przykład 6



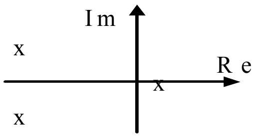
Przykład 7



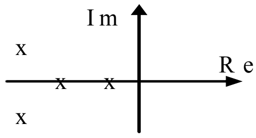
Przykład 8



Przykład 9



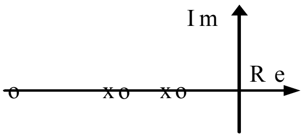
Przykład 10



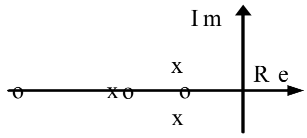
LAB: Sprawdź wykresy symulacyjnie dla wybranych wartości biegunów. Nieważne są konkretne wartości biegunów, ale relacje pomiędzy wartościami (podobne, znacznie różne). Jeśli w rozwiązaniu występują oscylacje to tak dobrać wartość pulsacji, żeby te oscylacje były widoczne. Porównaj rozwiązania dla różnych warunków początkowych.

Zadania 4. Porównaj własności układów o biegunach oznaczonych ‘x’ i ‘o’:
a) który szybciej osiągnie stan równowagi,

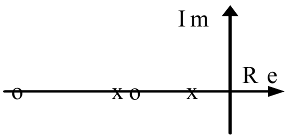
Przykład 1



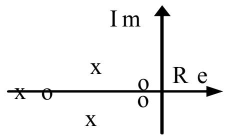
Przykład 2



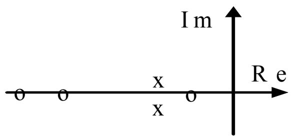
Przykład 3



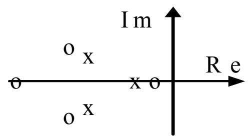
Przykład 4



Przykład 5



Przykład 6



LAB: Porównaj reakcje układów symulacyjnie.

Na podsumowanie kursu
Zadania 5.
1) Znamy wzmocnienie układu k_u i jego bieguny (np. -3 i -2±j). Należy odtworzyć równanie różniczkowe.
2) Znamy równanie statyczne układu: x=3u, oraz jego bieguny (wykres). Należy odtworzyć równanie różniczkowe
3) Uprość układ z zadania 1 i 2 (jeśli to możliwe) i przedstaw równanie różniczkowe po uproszczeniu
4) Dla jednego układu znamy bieguny (np. -3, -2), a dla drugiego układu znamy tłumienie i pulsację drgań. Który układ jest szybszy?

Podpowiedzi i/lub odpowiedzi

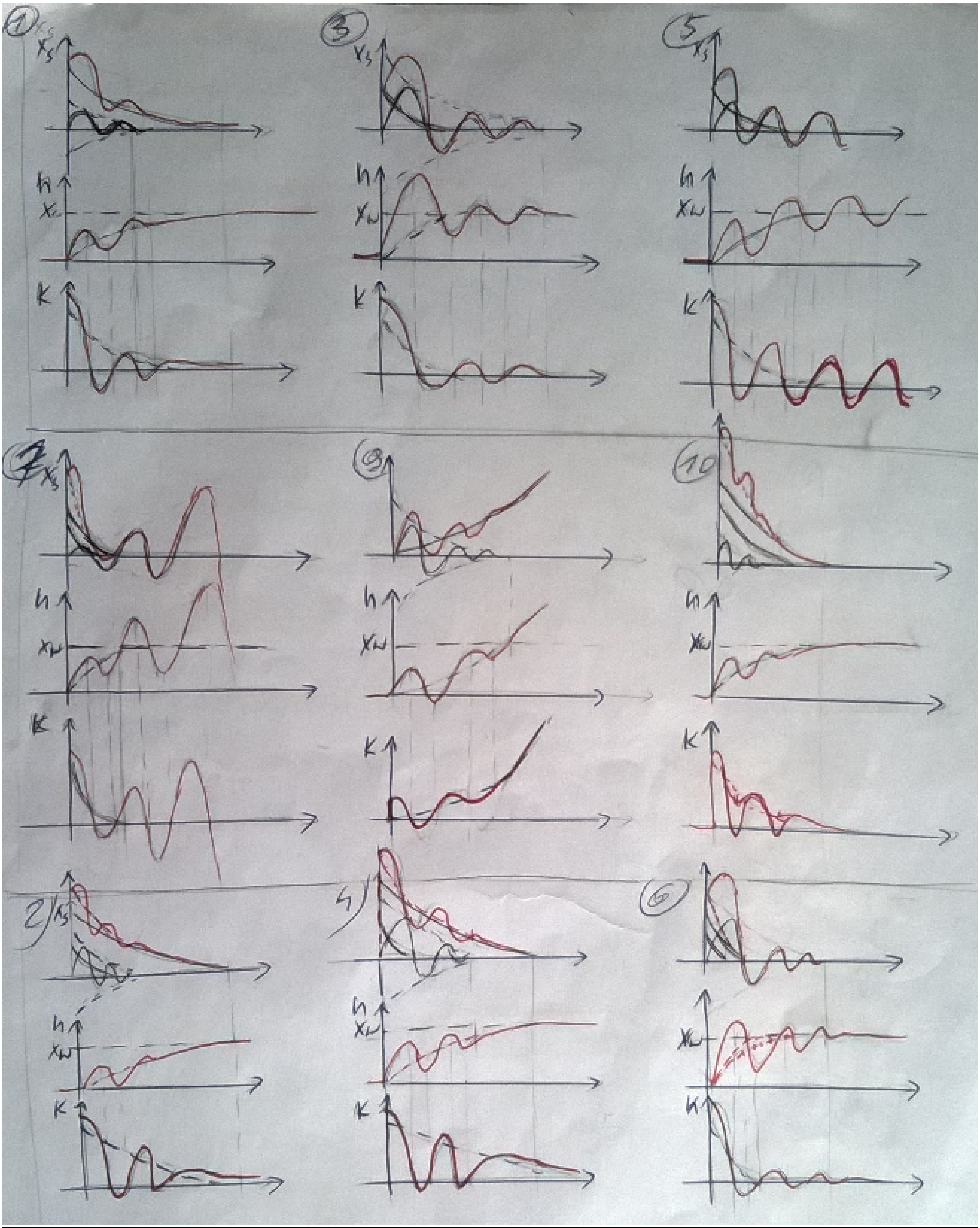
Zadanie 1

Zadanie 2

	Typ, rząd	R.statyczne	R.charakterystyczne	P.równowagi
1	ls, 2	$bx = 2u$	$a\lambda^2 + \lambda + b = 0$	
2	n, 2	$b\sqrt{x} = u$	-	
3	n, 3	$x^2 = u$	-	
4	n, 2	$ax^3 = u$	-	
5	ls, 2	$ax = u$	$\lambda^2 + 2\lambda + a = 0$	
6	ls, 2	$2x = u$	$\lambda^2 + a\lambda + 2 = 0$	
7	n, 3	$u_1 x = u_2$	-	
	lns, 3, gdy $u_1(t)$ można przyjąć jako parametr	$u_{10} x = u_2$		
	ls, 3, gdy $u_1(t)$ - stały parametr			
8	lns, 2	$a_0 x = 2u_1 + 3u_2$		
9	n, 3	$xu_1 = u_2$	-	
10	ls, 2	$a^3 x = 2u_1 + 3u_2$	$2\lambda^2 + 3\lambda + a^3 = 0$	
11	n, 2	$ax = u^2$	-	
12	n,2	$ax = u^2$	-	
	ls,2, gdy $u^2(t)$ jako $u_1(t)$	$ax = u_1$	$\lambda^2 + 3\lambda + a = 0$	
13	ls, 2	$x = \sqrt{au}$	$b^2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$	
14	ls, 3	$0 = 2u_1$	$3\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$	-
15	ls,1	$2abx = 0$	$a\lambda + 2ab = 0$	
16	ls, 1	$-2abx = 2u$	$a\lambda - 2ab = 0$	

Typ: ls – liniowe stacjopnarne, lns – liniowe niestacjonarne, n - nieliniowe

Sprawdzenie (część odpowiedzi): Zadanie 3


1
3
5
7
9
10
2
4
6
Xs
h
Xw
K