

Spis treści

| | |
|---|-----------|
| WSTĘP | 5 |
| I. WPROWADZENIE | 7 |
| 1. PRZEDMIOT BADAŃ (OPRACOWANIA, MONOGRAFII) | 7 |
| 1.1. Model obiektu (układu) | 7 |
| 1.2. Własności statyczne i dynamiczne układu | 8 |
| 1.3. Wielomiany i układy równań algebraicznych | 9 |
| 1.4. Liniowe równania różniczkowe zwyczajne (LISTA01) | 12 |
| 2. PODSTAWY KONSTRUKCJI MODELI DYNAMIKI UKŁADÓW | 15 |
| 2.1. Ogólne zasady konstrukcji modeli dynamiki | 15 |
| 2.2. Zbiorniki – otwarte układy hydrauliczne | 16 |
| 2.3. Obiekty cieplne – układy termokinetyczne | 19 |
| 2.4. Obiekty mechaniczne liniowe | 21 |
| 2.5. Obwody elektryczne | 23 |
| 2.6. Zamknięte układy hydrauliczne i pneumatyczne | 25 |
| 2.7. Inne (w tym układy biologiczne) | 25 |
| 2.8. Analogie | 25 |
| II. STATYCZNY OPIS UKŁADÓW | 28 |
| 3. MODELE I CHARAKTERYSTYKI STATYCZNE (LAB02) | 28 |
| 3.1. Statyczne własności układu | 28 |
| 3.2. Zastosowanie charakterystyk do linearyzacji | 29 |
| 3.3. Zastosowanie charakterystyk do identyfikacji | 31 |
| 3.4. Zastosowanie charakterystyk do analizowania pracy układu | 33 |
| III. PODSTAWOWE BADANIA DYNAMIKI UKŁADÓW W PRAKTYCE INŻYNIERSKIEJ | 35 |
| 4. ANALITYCZNE BADANIE LINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH (1.I 2.RZĄD) (LAB03) | 35 |
| 4.1. Wprowadzenie | 35 |
| 4.2. Rozwiązania analityczne w podstawowych badaniach dynamiki (LISTA01/3) | 35 |
| 4.3. Wykresy podstawowych składników rozwiązania (LISTA01/3) | 39 |
| 4.4. Przykłady zastosowania analitycznych rozwiązań równania różniczkowego | 43 |
| 4.5. Konwersja modeli do równania n-tego rzędu | 43 |
| 5. SYMULACYJNE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH | 45 |
| 5.1. Wprowadzenie – rozwiązanie analityczne i symulacyjne | 45 |
| 5.2. Definiowanie modeli poprzez konstrukcję schematu symulacyjnego (LAB04) | 45 |
| 5.3. Przykłady zastosowanie symulacji | 49 |
| IV. ANALIZA I PROJEKTOWANIE UKŁADÓW LINIOWYCH | 50 |
| 6. WŁASNOŚCI OBIEKTÓW LINIOWYCH (LINIOWE N-TEGO RZĘDU) | 50 |
| 6.1. Podstawowe badania – charakterystyka statyczna i odpowiedzi czasowe | 50 |
| 6.2. Parametry dynamiki | 50 |
| 7. ANALIZA I PROJEKTOWANIE MODELI PIERWSZEGO I DRUGIEGO RZĘDU | 54 |
| 7.1. Wprowadzenie – znaczenie i zastosowanie modeli pierwszego i drugiego rzędu | 54 |
| 7.2. Analiza i projektowanie układu drugiego rzędu na podstawie biegunów | 54 |
| 7.3. Równania oscylacyjne i komplementarne | 57 |
| 7.4. Zastosowanie (LISTA 02, LAB05) | 63 |
| 8. PORTRETY FAZOWE | 65 |
| 8.1. Wprowadzenie - definicja i własności portretu fazowego | 65 |
| 8.2. Typy portretów fazowych (Lab...) | 65 |
| 8.3. Symulacyjne generowanie portretów fazowych | 66 |
| V. PODSTAWOWE BADANIA DYNAMIKI UKŁADÓW WIELOWYMIAROWYCH (MIMO) | 67 |
| 9. ANALITYCZNE BADANIE UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH (RÓWNIANIA STANU) | 67 |
| 9.1. Wprowadzenie - obiekty SISO i MIMO | 67 |
| 9.2. Rozwiązania analityczne równań stanu | 67 |
| 9.3. Przykłady zastosowania analitycznych rozwiązań równań stanu (LISTA03) | 69 |
| 9.4. Konwersja modeli do równań stanu (LISTA03) | 71 |
| 10. BADANIA SYMULACYJNE NA PODSTAWIE RÓWNAŃ STANU | 73 |
| 10.1. Wprowadzenie | 73 |
| 10.2. Definicja modeli w blokach, funkcjach i plikach | 73 |
| 10.3. Przykłady zastosowania badań symulacyjnych (LAB 06-07) | 75 |
| VI. MODELE OPERATOROWE | 76 |

| | | |
|--|--|------------|
| 11. | TRANSMITANCJE LAPLACE'A | 76 |
| 11.1. | Wprowadzenie - transmitancja i jej podstawowe własności | 76 |
| 11.2. | Transmitancje układów wielowymiarowych | 77 |
| 11.3. | Schematy blokowe (strukturalne)..... | 80 |
| 11.4. | Operatorowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych | 81 |
| 12. | BADANIA SYMULACYJNE NA PODSTAWIE TRANSMITANCJI (LAB 07)..... | 82 |
| 12.1. | Wprowadzenie..... | 82 |
| 12.2. | Definicja modeli w blokach, funkcjach i plikach | 82 |
| 12.3. | Przykłady | 82 |
| 13. | CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE | 83 |
| 13.1. | Wprowadzenie..... | 83 |
| 13.2. | Rodzaje charakterystyk częstotliwościowych | 85 |
| 13.3. | Symulacyjne generowanie charakterystyk częstotliwościowych | 85 |
| VII. | PODSTAWOWE OBIEKTY DYNAMIKI | 87 |
| 14. | PODSTAWOWE OBIEKTY DYNAMIKI..... | 87 |
| 14.1. | Wprowadzenie..... | 87 |
| 14.2. | Parametry i odpowiedzi podstawowych członów dynamiki | 87 |
| 14.3. | Przykłady | 89 |
| 14.4. | Przekształcenia podstawowych członów | 89 |
| 15. | PODSTAWOWE CZŁONY DYNAMIKI W DZIEDZINIE CZASU | 91 |
| 15.1. | Wprowadzenie – czony dynamiki i rzeczywiste obiekty | 91 |
| 15.2. | Przykład – definicja i badanie układów opartych na członach | 91 |
| 15.3. | Zadania – definicje i odpowiedzi czasowe modeli | 92 |
| 16. | PODSTAWOWE CZŁONY DYNAMIKI W DZIEDZINIE CZĘSTOTLIWOŚCI | 94 |
| 16.1. | Charakterystyki Bodego podstawowych członów | 94 |
| 16.2. | Własności częstotliwościowych dokładnych i asymptotycznych charakterystyk Bodego | 96 |
| 17. | PODSTAWOWE METODY IDENTYFIKACJI MODELI..... | 97 |
| 17.1. | Podstawy..... | 97 |
| 17.2. | Identyfikacja dynamiki metodą charakterystyk czasowych | 97 |
| 17.3. | Identyfikacja na podstawie charakterystyk Bodego | 98 |
| VIII. | RZECZYWISTE OBIEKTY I ICH MODELE | 100 |
| 18. | MODELE RZECZYWISTYCH OBIEKTÓW????? () | 100 |
| 18.1. | Założenia i ograniczenia..... | 100 |
| 18.2. | Badania doświadczalne | 101 |
| 19. | UKŁADY LINIOWE I ZLINEARYZOWANE | 101 |
| 19.1. | Podstawowe własności układu liniowego | 101 |
| 19.2. | Linearyzacja statyczna..... | 102 |
| 19.3. | Linearyzacja dynamiczna..... | 103 |
| 20. | UPRASZCZANIE MODELI (OBNIŻANIE RZĘDU MODELI) | 103 |
| 20.1. | Linearyzacja a uproszczenie | 103 |
| IX. | PODSUMOWANIE METOD BADANIA DYNAMIKI | 105 |
| 21. | BADANIA DOŚWIADCZALNE | 105 |
| 22. | BADANIA ANALITYCZNE I SYMULACYJNE | 105 |
| 22.1. | Podsumowanie metod badania | 105 |
| 22.2. | Wybór modelu i metody badania | 106 |
| 23. | PROGRAMY SYMULACYJNE | 106 |
| 23.1. | O funkcjach, toolbox'ach, interfejsach | 106 |
| 23.2. | Metody całkowania numerycznego (co jest „pod spodem”)..... | 106 |
| ZAŁĄCZNIKI | | |
| A: WYPROWADZENIA WZORÓW, „KORKI” Z MATEMATYKI | | |
| B: ROZWIĄZANIA (ODPOWIEDZI) RÓWNAŃ I I II RZĘDU | | |
| C: PRZYKŁADY PROJEKTOWANIA UKŁADÓW I I II RZĘDU | | |
| D: „KORKI” Z FIZYKI | | |
| E: WPROWADZENIE DO MATLABA I SIMULINKA | | |
| E.1. Podstawy symulacji (wprowadzenie do Matlab) (LAB01) | | |
| E.2. Wprowadzenie do Simulinka | | |
| E.3 Algorytmy całkowania numerycznego | | |
| F: WERYFIKACJA WIEDZY I UMIEJĘTNOŚCI | | |

Wstęp

Monografia zawiera praktyczne wprowadzenie do analizy i symulacji własności dynamicznych prostych układów fizycznych. Opisane metody są przeznaczone szczególnie do zastosowania w obszarze automatyki, gdzie konieczne jest badanie reakcji obiektów na zachodzące zmiany w celu przygotowania do projektowania odpowiednich układów sterowania. Główny nacisk położono na fizyczną interpretację i praktyczne zastosowanie opisywanych metod w odniesieniu do zjawisk, które zachodzą w typowych procesach technologicznych. Stopniowo poprzez studium prostych przypadków Czytelnik ma szansę nabyć pewnego doświadczenia, które pomoże zdefiniować napotymane problemy i wybrać najbardziej skuteczną metodę postępowania. Na bazie takiej wiedzy można przejść do rozwiązywania bardziej złożonych zadań oraz rozważań teoretycznych.

Zakłada się, że Czytelnik posiada elementarną wiedzę¹ na temat równań algebraicznych i różniczkowych, przekształcenia Laplace'a, zjawisk z fizyki klasycznej oraz pewne doświadczenie w pisaniu prostych programów (najistotniejsze informacje z tego zakresu przedstawiono w załącznikach). Na takich podstawach opiera się zasadnicza treść monografii, czyli praktyczne aspekty poszczególnych metod badawczych. W prezentacji poszczególnych tematów zwraca się szczególną uwagę na możliwości weryfikacji wyników (samokontrolę). Rozszerzenie (uogólnienie) wiedzy praktycznej (sformalizowane definicje, uogólnione opisy metod) przedstawiono w komentarzach i załącznikach.

Monografia zawiera krótkie wprowadzenia do zagadnień analitycznych zilustrowane modelami dynamiki najprostszyc obiektów z różnych dziedzin. Uzupełnieniem jest opis zastosowania modeli w badaniach symulacyjnych w środowisku Matlab, Scilab (v.6.01) i Octave ().

Oznaczenia i symbole

- oznaczenia w ogólnych wzorach:

t – czas, s

$u, u(t)$ – wejście układu / zmienna wejściowa / sygnał wejściowy / wejście / pobudzenie / wymuszenie

$x, x(t)$ – rozwiązanie r. różniczkowego / odpowiedź / reakcja układu

$x, x(t)$ – zmienna stanu (często także wyjście)

$y, y(t)$ – wyjście układu (często $y=x$)

$1(t)$ – skok jednostkowy

$\delta(t)$ – impuls Diraca

$h(t)$ – odpowiedź skokowa (reakcja na $1(t)$)

$g(t)$ – odpowiedź impulsowa (reakcja na $\delta(t)$)

$G(s)$ - transmitancja

a, a_i, b, b_i - parametry

u_0, u_k – wartość początkowa i końcowa $u(t)$

x_0, x_k – wartość początkowa i końcowa $x(t)$

$x(u)$ – charakterystyka statyczna, $x_0=x(u_0)$

- oznaczenia parametrów fizycznych:

A – powierzchnia, m^2

b – współczynnik tłumienia (tarcia), Ns/m

C – pojemność elektryczna, $F=C/V$

C_v – pojemność cieplna, W/K

c – współczynnik sztywności, N/m

c_p – ciepło właściwe materiału, $J/(kg \cdot K)$

F – siła, N

f – przepływ objętościowy, m^3/s

g – przyspieszenie ziemskie, $9,81 m/s^2$

h – wysokość, m

i – natężenie prądu, A

K_c – współczynnik przenikania ciepła całej przegrody, W/K

L – indukcyjność, $H=Vs/A$

m – masa, kg

p – ciśnienie, Pa

j – jednostka urojona

s – zmienna zespolona

K – wzmacnienie członu

k_{ukl} – wzmacnienie układu

T, T_1 – stałe czasowe, s

T_d – czas różniczkowania, s

T_i – czas całkowania, s

α – część rzeczywista pierwiastka, $\alpha=Re(\lambda)$, $\sigma=|\alpha|$

ω_r – część urojona pierwiastka, $\omega_r=Im(\lambda)$

~~β – część urojona liczby zespolonej~~

φ – przesunięcie fazowe, rad lub °

λ_i, s_i – biegun układu, pierwiastek wielomianu

ξ – tłumienie / współczynnik tłumienia

ω – pulsacja ($2\pi f$), rad lub °

Q – ciepło, $J=Ws$

q – strumień ciepła, moc, W

q – ładunek elektryczny, C

R – rezystancja, $\Omega=V/A$

T – temperatura, K lub C (°K, °C)

u – napięcie, V

V – objętość, m^3

v – prędkość, m/s

x – przesunięcie, m

Z – impedancja, $\Omega=V/A$

k – jednostkowy współczynnik przenikania ciepła (wypadkowa λ i α) – $W/(mK)$

λ – współczynnik przewodzenia ciepła / współczynnik przewodności cieplnej materiału, $W/(mK)$

α – współczynnik przejmowania ciepła, $W/(m^2K)$

ρ – gęstość materiału, kg/m^3

¹ w zakresie szkoły średniej i pierwszego roku studiów technicznych

Oznaczenia pochodnych po czasie, np.: $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$, ..., $x^{(n)}(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k}$

Oznaczenia transformacji funkcji, np.: $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$

Oznaczenia zmiennych z indeksami w programach symulacyjnych: symbol główny jest pisany dużą literą a indeks – małymi literami, np.: zmiennej T_{wew} we wzorze odpowiada zmienna T_{wew} w programie symulacyjnym.

Oznaczenia:

- Zmienne we wzorach (*italic*) – T_{wew} ,
- Zmienne, funkcje, bloki w Matlabie/Scilabie (jak na schematach) – T_{wew} Arial 10
Lepsze niż CourierNew bo węższe i takie samo jak na schematach (zmienne *italic*?)
- pliki (*skrypty, schematy*) Matlab/Scilab
- W skryptach - domyślna czcionka edytora Matlab (Courier New 9) /Scilab

Oznaczenia w roboczej wersji opracowania:

- niebieskie – pojęcia/definicje na egzamin, w szczególności te pojęcia wyróżnione **boldem**
 - małe, szare – komentarze i uzupełnienia, np. dowody, przekształcenia (może w treści tylko tytuły, a rozwinięcie w załącznikach?)
 - Do poprawienia (oznaczenie robocze)
 - Komentarze (np. listy), pomysły na uzupełnienie/rozszerzenie (oznaczenie robocze)
- Dodać: Efekty działania skryptów są przedstawione w postaci rysunków, które podkreślają (wydobywają) charakterystyczne cechy wykresów (na wykresach będą one bardziej lub mniej widoczne)
Przykłady liczbowe w załącznikach. Może przenieść tam też małe szare?

I. Wprowadzenie

1. Przedmiot badań (opracowania, monografii)

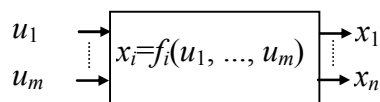
1.1. Model obiektu (układu)

Przedmiotem opisywanych badań są **matematyczne modele układów fizycznych** (np. elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych, cieplnych), które można wykorzystać do opisu, analizy i symulacji tego układu w szczególności na potrzeby badania własności dynamicznych obiektów (procesów) technologicznych i układów sterowania (automatyki) dla tych obiektów.

Model¹ układu opisuje zachowanie wybranego obiektu/procesu (fizycznego, chemicznego, biologicznego, ekonomicznego, ...) za pomocą wyrażeń matematycznych, które zawierają (Rys. 1-1):

- **zmienne wejściowe** (sygnały wejściowe, wymuszenia) u – ich wartość jest wymuszana na zewnątrz układu (nie zależy od tego się dzieje w układzie),
- **zmienne wyjściowe** (sygnały wyjściowe, rozwiązania) x – ich wartość jest reakcją (odpowiedzią) układu na określone wymuszenia (wynika z przetworzenia sygnału wejściowego przez układ),
- **parametry** (współczynniki) – stałe wartości (skalary) występujące w wyrażeniach.

Funkcje matematyczne opisujące zachowanie układu mogą występować w postaci **jawnej** $x_i=f_i(u_1, \dots, u_m)$ lub **uwikłanej** $F(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)$.

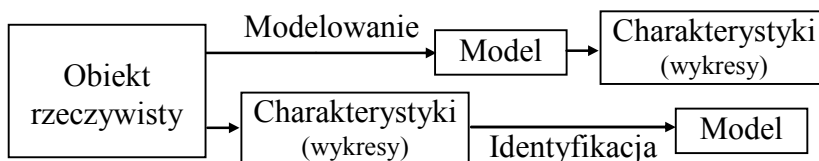


Rys. 1-1. Model układu

Jawną postać funkcji uzyskuje się przez rozwiązanie funkcji uwikłanej ze względu na zmienne wyjściowe (na drodze przekształceń analitycznych). Programy symulacyjne pozwalają obliczyć (narysować) wykresy zarówno na podstawie postaci jawnej, jak i uwikłanej.

Najprostsze modele opisują relację pomiędzy jednym wybranym wyjściem (x) i jednym wybranym wejściem układu (u). Modele wielowymiarowe mogą opisywać zależności pomiędzy wieloma zmiennymi wyjściowymi (x_1, \dots, x_n) i wieloma zmiennymi wejściowymi (u_1, \dots, u_m), czyli wektorem zmiennych wyjściowych $x=[x_1, \dots, x_n]$ i wektorem zmiennych wejściowych $u=[u_1, \dots, u_m]$.

Modele można podzielić na **modele statyczne** $x(u)$, opisujące układ w stanie równowagi przy wymuszeniach o stałej wartości oraz **modele dynamiki**, przedstawiające reakcję układu w czasie $x(t)$ na zmiany wymuszeń $u(t)$. Typ modelu wpływa w zasadniczy sposób na metody konstrukcji modelu. Konstrukcja modelu przeprowadzana na podstawie znajomości opisu procesów zachodzących na obiekcie nazywa się **modelowaniem**. Wynikiem tego działania jest wyrażenie/wyrażenia matematyczne, na podstawie których można prowadzić analizę własności i rysować różnego typu charakterystyki (wykresy²), czyli przedstawiać własności układu w formie graficznej. Wykresy mogą powstawać również na podstawie eksperymentów realizowanych na rzeczywistym obiekcie (tzw. zdejmowane charakterystyk). Na podstawie odpowiednich wykresów można odtworzyć matematyczny model układu, co nazywamy **identyfikacją** modelu (Rys. 1-2). **dość rozdział 2**



Rys. 1-2. Podstawowe metody konstrukcji modeli: modelowanie i identyfikacja

Jednym z pierwszych elementów analizy własności, jest prosta klasyfikacja typu modelu (równań i funkcji), która pozwala określić od razu niektóre cechy obiektu i wybrać odpowiednią metodę dalszych badań. Podstawowa klasyfikacja dotyczy liniowości wyrażeń, bowiem zdecydowana większość metod analitycznych dotyczy modeli liniowych. Model jest **liniowy** jeśli na zmiennych (wejściowych/wyjściowych) wykonywane są jedynie przekształcenia liniowe, czyli takie, które spełniają dwa warunki:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(ax) = af(x), \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R} \quad (1-1)$$

Analityczne badania własności modeli układów opierają się na metodach (pojęciach) z różnych działów matematyki:

- funkcje algebraiczne, np. **wielomiany, funkcje wymierne i niewymierne**,

¹ Model – w monografii zawsze w sensie modelu matematycznego

² Charakterystyka to (1) ogólnie zależność między pewnymi wielkościami, lub też (2) wykres przedstawiający taką zależność – w monografii zawsze w sensie (2): charakterystyka = wykres zależności

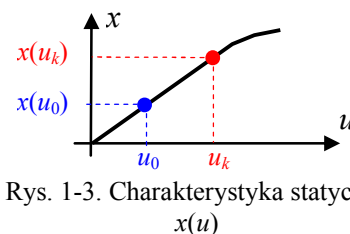
- funkcje przestępne (wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne),
- rachunek różniczkowy i całkowy (np. równania różniczkowe, ...),
- rachunek operatorowy (np. przekształcenie Laplace'a i Fouriera),
- szeregi funkcyjne (np. Fouriera, Taylora, Laurenta).

Podstawowe informacje z tego zakresu, stosowane w analizie modeli przedstawiono w zał. A. Natomiast zał. E zawiera krótkie przygotowanie do analizy za pomocą programów symulacyjnych.

1.2. Własności statyczne i dynamiczne układu

Model statyczny to najprostszy opis własności układu (obiektu, procesu). Przedstawiona on opis zależności pomiędzy zmiennymi wejściowymi i wyjściowymi układu w warunkach równowagi, gdy wartości zmiennych wejściowych i wyjściowych stałe. Modele statyczne mają postać równań algebraicznych.

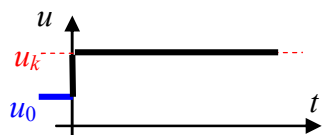
Graficzną reprezentacją własności statycznych jest **charakterystyka statyczna** (Rys. 1-3), pozwalająca odczytać wartości wyjść na podstawie wartości wejść, np. $x(u_0)$, $x(u_k)$. W najprostszych przypadkach są to funkcje liniowe (np.: $x=a \cdot u$, $x=a_1 \cdot u_1+a_2 \cdot u_2$). W rzeczywistych warunkach zależności liniowe praktycznie nie występują, jednak są stosowane często, jako przybliżenie opisu rzeczywistych obiektów (w wielu zastosowaniach wystarczające).



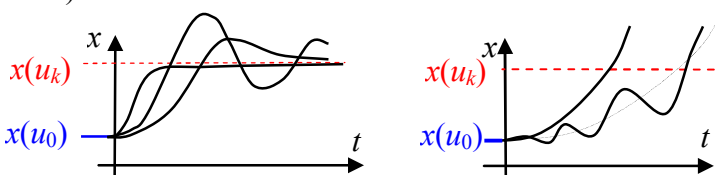
Rys. 1-3. Charakterystyka statyczna $x(u)$

Model dynamiki układu opisuje reakcję układu na zmiany sygnałów wejściowych. W badaniach stosuje się bardzo proste sygnały wejściowe, takie jak wymuszenie skokowe (Rys. 1-4). Podstawową analityczną formą modelu dynamiki są równania różniczkowe (najczęściej zwyczajne), gdzie zmienną niezależną jest czas t (r.1.4). Analityczne wyznaczenie przebiegu $x(t)$ wymaga rozwiązania równania różniczkowego dla określonego wymuszenia $u(t)$ i określonych warunków początkowych, co jest możliwe tylko w prostych przypadkach (np. liniowe równania, różniczkowalne funkcje wymuszające).

Najprostszą reprezentacją graficzną opisu dynamiki są **charakterystyki czasowe**, przedstawiające reakcje obiektu $x(t)$ na określone wymuszenie $u(t)$, na przykład odpowiedź na skokową zmianę wymuszenia na jednym z wejść (Rys. 1-5). Własności dynamiczne sprawiają, że reakcje obiektów trwają pewien czas, mogą mieć charakter oscylacyjny, a co najważniejsze nie zawsze kończą się dojsciem do stanu równowagi (nie są stabilne).

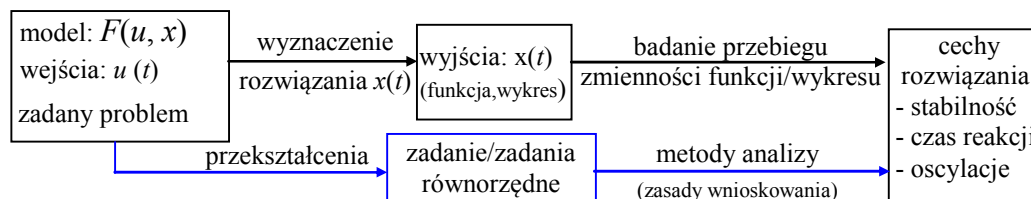


Rys. 1-4. Wymuszenie skokowe



Rys. 1-5. Reakcje układów stabilnych i niestabilnych na wymuszenie skokowe

Model statyczny opisuje układ w warunkach równowagi przy stałych wymuszeniach, natomiast model dynamiki opisuje czy i w jaki sposób układ dochodzi do stanu równowagi. W praktyce inżynierskiej często nie ma potrzeby aby wyznaczać reakcję $x(t)$ w postaci wzoru czy wykresu - wystarczy znajomość charakterystycznych cech przebiegu $x(t)$, a te można określić w prostszy sposób niż wyznaczanie rozwiązania i badanie przebiegu zmienności funkcji/wykresu (Rys. 1-6). Odpowiednie przekształcenia modelu i zastosowanie własności funkcji znanych na przykład z algebry czy trygonometrii pozwala określić między innymi stabilność, czas reakcji, wielkość oscylacji przebiegu $x(t)$.



Rys. 1-6. Analiza własności dynamicznych obiektu

W kolejnych podrozdziałach przedstawiono podstawowe elementy analizy matematycznej - równania algebraiczne i różniczkowe.

1.3. Wielomiany i układy równań algebraicznych

1.3.1. Wielomiany rzeczywiste

Szczególną rolę w analizie dynamiki obiektów pełnią wyrażenia algebraiczne w postaci wielomianów o rzeczywistych współczynnikach. Kluczowe znaczenie w tych badaniach mają **pierwiastki wielomianu** (miejsca zerowe), czyli rozwiązania równania:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1-2)$$

Pierwiastki wielomianu mogą być liczbami rzeczywistymi (λ) lub parami liczb zespolonych sprzężonych ($\alpha \pm j\omega$). Wielomian rzeczywisty n -tego stopnia ma n pierwiastków, przy czym mogą to być pierwiastki wielokrotne. Wielomian rzeczywisty (1-2) można rozłożyć na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego, np.:

$$a_n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x^2 + b_1 x + b_2) = 0 \quad (1-3)$$

gdzie dwumiany liniowe (wielomiany pierwszego stopnia) są związane z pierwiastkami rzeczywistymi λ_i , a trójmiany kwadratowe, to wielomiany o ujemnym wyróżniku Δ i zespolonych pierwiastkach. Trójmian o ujemnym wyróżniku można również rozłożyć na iloczyn wielomianów pierwszego stopnia, ale o zespolonych współczynnikach:

$$(x - (\alpha + j\omega))(x - (\alpha - j\omega)). \quad (1-4)$$

Tym samym każdy wielomian rzeczywisty można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów liniowych:

$$a_n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) = 0 \quad (1-5)$$

przy czym, w tym wypadku, pierwiastki λ_i mogą być rzeczywiste i/lub zespolone.

Dostępne są różne metody rozwiązywania równań wielomianowych. Pierwiastki wielomianów stopnia od 1 do 4 można wyznaczyć analitycznie – za pomocą powszechnie znanych wzorów na pierwiastki (Zał. A.1 **tu małe szare???**). Powyżej stopnia 4 wzory na pierwiastki nie istnieją – konieczne są inne metody rozwiązywania^a. Jeśli współczynniki wielomianu mają postać liczbową, to można zastosować przybliżone, numeryczne wyznaczanie pierwiastków. W programach symulacyjnych metody numeryczne są stosowane niezależnie od stopnia wielomianu (Zał. E.1).

Na podstawie równoważności **postaci ogólnej** (1-2) i **iloczynowej** (1-5):

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) \quad (1-6)$$

można sprawdzić poprawność wyznaczonych pierwiastków $\lambda_1 \dots \lambda_n$.

Równanie (1-6) pozwala też wyprowadzić ogólne wzory Viéte'a, czyli zależności pomiędzy współczynnikami wielomianu a jego pierwiastkami:

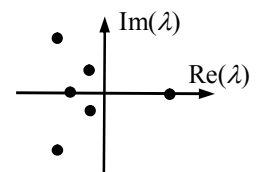
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -a_{n-1} / a_n \\ \lambda_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_1 \lambda_n + \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_2 \lambda_n + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n = a_{n-2} / a_n \\ \vdots \\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n a_0 / a_n \end{cases} \quad (1-7)$$

Pierwiastki we wzorach (1-7) mogą być zarówno rzeczywiste jak i zespolone. Konieczne jest założenie, że $a_n \neq 0$, ale wzory są prawdziwe także dla wielomianów o współczynnikach zespolonych.

Dla ułatwienia analizy wartości pierwiastków wielomianu stosuje się przedstawienie ich na płaszczyźnie zespolonej (Rys. 1-7). Szczególne znaczenie mają pierwiastki, które leżą w lewej półpłaszczyźnie, czyli mają ujemną część rzeczywistą. Czasem wystarcza stwierdzenie, czy wszystkie pierwiastki wielomianu leżą w lewej półpłaszczyźnie, a to można zbadać bez wyznaczania wartości pierwiastków, na podstawie tak zwanych **kryteriów położenia pierwiastków**.

Najbardziej znane to kryteria Hurwitza i Routha.

Kryterium Hurwitza stwierdza, że wszystkie pierwiastki równania $a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ leżą w lewej półpłaszczyźnie, jeśli wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera i mają jednaki znak, a wszystkie minory główne wielomianu są dodatnie. Minory główne to kolejne wyznaczniki $\Delta_{1..n}$, konstruowane według schematu:



Rys. 1-7. Płaszczyzna zespolona pierwiastków

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}, \quad \text{itd. aż do } \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (1-8)$$

Jeśli nie wszystkie warunki są spełnione, to kryterium nie określa ile jest pierwiastków dodatnich. Podstawową wadą kryterium jest konieczność liczenia dużych wyznaczników

Według **kryterium Routha** wszystkie pierwiastki równania $a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ leżą w lewej półpłaszczyźnie, jeśli wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera i mają jednakowy znak, a wszystkie współczynniki w pierwszej kolumnie tablicy Routha są dodatnie. Tablica (macierz) Routha jest konstruowana w następujący sposób:

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}; \quad \text{gdzie } b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \dots \quad (1-9)$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}$$

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}, \quad \dots$$

Jeśli ostatni warunek kryterium nie jest spełniony, to można wyznaczyć ilość pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie – jest ona równa liczbie zmian znaku w pierwszej kolumnie tablicy Routha.

1.3.2. Układy równań

Model obiektu może być wielowymiarowy, to znaczy zawierać kilka niezależnych zmiennych wyjściowych ($x_1 \div x_n$). Typową postacią takiego modelu jest układ kilku równań liniowych i/lub nieliniowych, który pozwala wyznaczyć rozwiązanie, czyli zestaw niezależnych zmiennych wyjściowych ($x_1 \div x_n$), który spełnia każde z równań układu. Układ równań może być **oznaczony** (skończona ilość rozwiązań) lub **nieoznaczony** (nieskończona ilość rozwiązań), ale nie powinien być **sprzeczny** (brak rozwiązań). Układy równań można rozwiązywać analitycznie (głównie układy liniowe) lub numerycznie.

Układ n równań liniowych, który zawiera n niezależnych równań jest oznaczony i ma dokładnie jedno rozwiązanie. Równania są niezależne, jeśli żadne z równań układu nie jest kombinacją liniową pozostałych¹. Jeśli układ równań liniowych ma więcej niż jedno rozwiązanie to znaczy, że zawiera równania zależne i jest układem nieoznaczonym.

Układy równań liniowych mogą być zapisywane przy pomocy wektorów i macierzy, i analizowane metodami z zakresu **algebry liniowej**. Podstawą metod są operacje algebraiczne na macierzach oraz obliczanie **wyznacznika** i **wartości własnych** macierzy. Sformułowanie problemu w postaci macierzowej jest szczególnie preferowane podczas stosowania metod symulacyjnych (**zał. E**).

Dodać wzory na wyznacznik i wartości własne???

Jeśli wyznacznik macierzy jest różny od zera, to układ równań jest niezależny (ma rozwiązanie).

Analityczne rozwiązywanie układów równań liniowych typu:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1-10)$$

można wykonać różnymi metodami. Poniżej przedstawiono trzy podstawowe metody:

- metoda macierzowa,
- wzory Cramera,
- podstawianie i eliminowanie kolejnych zmiennych.

1° Metoda macierzowa. Układ (1-10) można przedstawić w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1-11)$$

gdzie poszczególne wektory/macierze współczynników i zmiennych mają postać:

¹ kombinacja liniowa elementów (np. wektorów, równań) - operacje mnożenia przez skalary i dodawania elementów

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Układ (1-11) można rozwiązać **za pomocą operacji macierzowych**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (1-12)$$

W programach symulacyjnych wystarczy zdefiniować macierz \mathbf{A} i wektor \mathbf{b} oraz wpisać wyrażenie (1-12) aby uzyskać wektor rozwiązania \mathbf{x} . Natomiast rozwiązywanie analityczne wymaga wyznaczenia macierzy odwrotnej. Ogólny wzór na macierz odwrotną ma postać:

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^D)^T \cdot \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \quad (1-13)$$

gdzie: \mathbf{A}^D – macierz dopełnień algebraicznych, $(\mathbf{A}^D)^T$ – transponowana macierz \mathbf{A}^D (macierz dołączona), $\det(\mathbf{A})$ – wyznacznik macierzy \mathbf{A} .

Przykład (może jeszcze 3stopień. Rozpisać?)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A^D = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{1+2}a_{21} \\ (-1)^{2+1}a_{12} & (-1)^{2+2}a_{11} \end{bmatrix}, (A^D)^T = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{2+1}a_{12} \\ (-1)^{1+2}a_{21} & (-1)^{2+2}a_{11} \end{bmatrix}$$

2° Wzory Cramera. Układ równań (1-10) można też zapisać w postaci wektorowej:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b} \quad (1-15)$$

gdzie współczynniki i zmienne są reprezentowane przez wektory kolumnowe:

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{in} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$

i rozwiązać wzorami Cramera:

$$x_i = \frac{W_i}{W} = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)} \quad (1-16)$$

Przykład (może jeszcze 3stopień. Rozpisać?)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 = \mathbf{b} \quad (1-17)$$

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}$$

3° Podstawianie i eliminowanie kolejnych zmiennych. Jeśli rozwiązanie jest wyznaczone analitycznie, to czasem najprostszą metodą rozwiązania układu (1-10) jest **metoda podstawiania i eliminowania kolejnych zmiennych**, na przykład, gdy ilość równań jest niewielka ($2 \div 3$), a współczynniki równań są parametrami układu (reprezentowane przez symbole lub wyrażenia, a nie przez wartości liczbowe). Metodę można również stosować w przypadku prostych układów równań nieliniowych.

Przykład (może 3stopień. Rozpisać?) Dobra rada – podczas przekształceń unikać piętrowych ułamków

1.4. Liniowe równania różniczkowe zwyczajne (LISTA01)

1.4.1. Klasyfikacja równań różniczkowych

W badaniach dynamiki układów (obiektów, procesów) technologicznych podstawowe znaczenie mają równania różniczkowe zwyczajne, gdzie zmienną niezależną jest czas (t).

Równanie różniczkowe zwyczajne n -tego rzędu jest zależnością, w której występuje zmienna wejściowa $u=u(t)$ i wyjściowa $x=x(t)$ oraz ich pochodne względem czasu:

$$F(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, \dot{x}(t), x(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t)) = 0 \quad (1-18)$$

Jeśli wyrażenie (1-18) można przedstawić w postaci:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (1-19)$$

gdzie wszystkie współczynniki a_i i b_i są stałe, to mamy do czynienia z najprostszym przypadkiem, czyli **równaniem liniowym, stacjonarnym**. Jeśli choć jeden ze współczynników a_i i b_i zależy od czasu (tylko od czasu), to wyrażenie (1-19) jest **równaniem liniowym, niestacjonarnym**.

Rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja $x(t)$, która spełnia równanie różniczkowe przy zadanym **wymuszeniu**, czyli określonej funkcji podstawianej do $u(t)$ i zadanych **warunkach początkowych**. Analityczne rozwiązanie równań nieliniowych jest zazwyczaj nieznane, natomiast równania liniowe można zawsze rozwiązać dzięki zastosowaniu **zasady superpozycji**, która oznacza, że całkowite rozwiązanie złożonego zadania jest sumą rozwiązań prostszych zadań¹.

1.4.2. Klasyczny algorytm analitycznego rozwiązywania liniowego równania różniczkowego

Klasyczny algorytm rozwiązywania równania różniczkowego n -tego rzędu dotyczy równań postaci (1-19) ze stałymi współczynnikami a_i i b_i , i jest stosowany dla ustalonej funkcji podawanej na wejście $u(t)$ i ustalonych n warunków początkowych. Zasada superpozycji w przypadku liniowego równania różniczkowego pozwala podzielić wyznaczenie rozwiązania $x(t)$ na składową swobodną $x_s(t)$ i składową wymuszoną $x_w(t)$:

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t) \quad (1-20)$$

Algorytm wyznaczenia składowych i pełnego rozwiązania $x(t)$ składa się z czterech etapów.

I. Rozwiązanie swobodne (składowa swobodna, przejściowa) $x_s(t)$ – rozwiązanie równania różniczkowego jednorodnego (bez wymuszenia)

(1) Ustalić postać równania jednorodnego (wyzerować wymuszenie):

$$a_n x_s^{(n)}(t) + a_{n-1} x_s^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}_s(t) + a_0 x_s(t) = 0 \quad (1-21)$$

(2) Założyć, że rozwiązaniem jest funkcja eksponentialna o dwóch parametrach A i λ :

$$x_s(t) = A e^{\lambda t} \quad (1-22)$$

(3) Podstawić założone rozwiązanie (1-22) do równania jednorodnego (1-21):

$$a_n \lambda^n A e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} A e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda A e^{\lambda t} + a_0 A e^{\lambda t} = 0 \quad (1-23)$$

(4) Równanie (1-23) podzielić obustronnie przez $A e^{\lambda t}$, co prowadzi do **równania charakterystycznego** (wielomianu charakterystycznego):

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (1-24)$$

(5) Rozwiązać algebraiczne równanie charakterystyczne - wyznaczyć n pierwiastków $\lambda_1 \div \lambda_n$.

(6) Pierwiastki mogą być rzeczywiste i zespolone, jedno- i wielokrotne. Stąd wynika postać $x_s(t)$:

(1°) Jeśli wszystkie pierwiastki równania $\lambda_1 \div \lambda_n$ są rzeczywiste i różne, to

$$x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t} \quad (1-25)$$

(2°) Jeśli któryś z pierwiastków jest wielokrotny, np. k -ty pierwiastek λ_k jest p -krotny ($\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+p-1}$), to $x_s(t)$ zawiera p składników postaci:

$$(A_k + A_{k+1} t + A_{k+2} t^2 + \dots + A_{k+p-1} t^{p-1}) e^{\lambda_k t} \quad (1-26)$$

¹ Zasada superpozycji dotyczy układów liniowych w wielu dziedzinach, szczególnie w fizyce - reakcja układu na złożone wymuszenie jest sumą reakcji na pojedyncze składniki wymuszenia, np.: sygnał wyjściowy systemu jest sumą odpowiedzi systemu na pojedyncze składowe sygnały wejściowe; zaburzenie w punkcie do którego docierają dwie fale tego samego rodzaju jest sumą zaburzeń wywołanych w tym punkcie przez każdą falę z osobna; siła pochodząca z kilku źródeł jest sumą wektorową sił wytwarzanych przez poszczególne źródła.

(3°) Jeśli występują pierwiastki zespolone (para liczb sprzężonych), np. $\lambda_1 = \alpha + j\omega_r$ oraz $\lambda_2 = \alpha - j\omega_r$, to $x_s(t)$ zawiera składniki, które można zapisać na trzy równoważne sposoby (23-4), (23-5):

$$(a) \quad A_1 e^{(\alpha + j\omega_r)t} + A_2 e^{(\alpha - j\omega_r)t} = e^{\alpha t} (A_1 e^{j\omega_r t} + A_2 e^{-j\omega_r t}) \quad (1-27)$$

$$(b) \quad e^{\alpha t} (B_1 \cos \omega_r t + B_2 \sin \omega_r t) \quad (1-28)$$

gdzie: $B_1 = A_1 + A_2$, $B_2 = j(A_1 - A_2)$.

$$(c) \quad A e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1) = A e^{\alpha t} \cos(\omega_r t - \varphi_2) \quad (1-29)$$

gdzie: $A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, $\varphi_1 = \arctg(B_1 / B_2)$, $\varphi_2 = \arctg(B_2 / B_1)$

Uwaga: W rozwiązaniach równań różniczkowych współczynniki A_1 i A_2 są liczbami zespolonymi, a współczynniki B_1 i B_2 , obliczone na ich podstawie, są liczbami rzeczywistymi [Zał.B.3, Rozwiązanie 2]. W literaturze występuje dość często nieprecyzyjny (i mylący) zapis relacji $B_1 = A_1 + A_2$, $B_2 = A_1 - A_2$.

Wszystkie składniki rozwiązania swobodnego (1-25)-(1-29) zawierają funkcję eksponencjalną z wykładnikiem równym αt , gdzie α to część rzeczywista pierwiastka, t to czas ≥ 0 . Funkcja ta wpływa na podstawową własność rozwiązania – jeśli część rzeczywista pierwiastka jest ujemna, to składnik związany z tym pierwiastkiem zanika z czasem, a jeśli dodatnia, to składnik dąży do $+\infty$ lub $-\infty$. Tym samym jeśli wszystkie pierwiastki mają ujemną część rzeczywistą, to całe rozwiązanie swobodne x_s zanika z czasem (stąd określenie składowa przejściowa).

II. Rozwiązanie wymuszone (składowa wymuszona, ustalona) $x_w(t)$ – rozwiązanie równania różniczkowego dla konkretnej funkcji wymuszającej

Dla ustalonej, różniczkowalnej funkcji $f(t)$, która jest podawana jako wymuszenie na wejście $u(t)$:

(1) Wypisać funkcję wymuszającą $f(t)$ i jej kolejne pochodne:

$$f(t), \dot{f}(t), \ddot{f}(t), \dots \quad (1-30)$$

aż do czasu gdy wystąpią wyrażenia równe zero lub gdy zaczną się powtarzać funkcje w wyrażeniach (jak w przypadku funkcji \sin i \cos). Jeśli wśród tych wyrażeń są takie, które występują także w składowej swobodnej $x_s(t)$, to należy je pomnożyć przez t^k , gdzie k jest najmniejszym wykładnikiem, który zapewni, że wyrażenia będą się różnić od składników składowej swobodnej.

(2) Założyć, że rozwiązanie wymuszone $x_w(t)$ jest sumą składników, postaci :

$$x_w(t) = C_1 f(t) + C_2 \dot{f}(t) + \dots \quad (1-31)$$

Z tej konstrukcji $x_w(t)$ wynika, że jeśli funkcja wymuszająca $f(t)$ jest ograniczona, to składowa wymuszona $x_w(t)$ też jest ograniczona.

(3) Podstawić wymuszenie $f(t)$ i założone rozwiązanie $x_w(t)$ do równania różniczkowego (1-30):

$$a_n x_w^{(n)}(t) + a_{n-1} x_w^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}_w(t) + a_0 x_w(t) = b_m f^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{f}(t) + b_0 f(t) \quad (1-32)$$

(4) Porównać współczynniki przy takich samych funkcjach po obu stronach równania.

(5) Rozwiązać otrzymany układ równań względem stałych C_1, C_2, \dots

W praktyce inżynierskiej wymuszenie jest często stałe oraz sinusoidalne. Najprostsze przypadki rozwiązania wymuszonego zachodzą gdy wymuszenie jest stałe $u(t) = u_k$ dla $t > 0$ (więcej w r. 4.2.1), wówczas:

$$(1) \quad u(t) = u_k, \dot{u}(t) = 0, \ddot{u}(t) = 0, \dots$$

$$(2) \quad x_w(t) = C_1 \cdot u_k \quad \rightarrow \quad \dot{x}_w(t) = 0, \ddot{x}_w(t) = 0, \dots$$

$$(3) \quad a_n 0 + a_{n-1} 0 + \dots + a_1 0 + a_0 C_1 u_k = b_m 0 + \dots + b_0 u_k$$

$$(4) \quad a_0 C_1 u_k = b_0 u_k$$

$$(5) \quad C_1 = \frac{b_0}{a_0} \quad \rightarrow \quad x_w(t) = \frac{b_0}{a_0} u_k, \text{ gdy } a_0 \neq 0$$

Rozwiązanie to można otrzymać „na skróty”, jako rozwiązanie równania statycznego:

$$a_0 x = b_0 u \quad (1-33)$$

Przy stałym wymuszeniu na wejściu $u(t) = u_k$, rozwiązanie wymuszone $x_w(t)$ też jest stałe i równe:

$$x_w(t) = \frac{b_0}{a_0} u_k = x_k, \text{ gdy } a_0 \neq 0 \quad (1-34)$$

Rozwiązanie (1-34) jest punktem równowagi (x_k) układu przy stałym wymuszeniu (u_k), gdy $a_0 \neq 0$. Jeśli $a_0 = 0$, to równanie (1-33) nie ma rozwiązania (punktu równowagi) jeśli $u(t) = u_k \neq 0$, lub ma nieskończenie wiele rozwiązań (dowolny punkt równowagi) jeśli $u(t) = u_k = 0$.

Wyznaczając rozwiązanie wymuszone dla sygnału sinusoidalnego $u(t) = \sin(\omega t)$ (opisane dokładniej r. 13.1.1) można wykazać, że ma ono zawsze postać:

$$x_w(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-35)$$

gdzie amplituda A i przesunięcie fazowe φ zależą od pulsacji sygnału wymuszającego. Tak więc, jeśli na wejście układu liniowego podawany jest sygnał sinusoidalny, to w stanie równowagi na wyjściu też jest sygnał sinusoidalny o tej samej pulsacji ale wzmacniony i przesunięty w fazie (co jest przedmiotem analizy własności dynamicznych za pomocą charakterystyk częstotliwościowych - r. 13).

Jeśli składowa swobodna (przejściowa) zanika do zera, to w rozwiązaniu równania zostaje tylko składowa wymuszona (stąd określenie składowa ustalona).

III. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (całka ogólna), czyli suma rozwiązania swobodnego (z parametrami A_i) i rozwiązania wymuszonego:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t} + x_w(t) \quad (1-36)$$

Rozwiązanie ogólne stanowi całą klasę rozwiązań, ponieważ zawiera parametry $A_1 \div A_n$, które są wyznaczone w kolejnym etapie. Jednak najistotniejsza cecha rozwiązania $x(t)$ nie zależy od wartości A_i . Jeśli wszystkie elementy składowej swobodnej x_s zanikają z czasem to z biegiem czasu rozwiązanie $x(t)$ dąży do rozwiązania wymuszonego x_w – takie równanie różniczkowe nazywamy **stabilnym**¹. Natomiast jeśli składowa swobodna x_s rozwiązania $x(t)$ nie zanika, to równanie różniczkowe nazywamy **niestabilnym**. Stabilność liniowego równania różniczkowego nie zależy ani od wymuszenia, ani od współczynników A_i . Jeśli wymuszenie $u(t)$ jest ograniczone, to rozwiązanie $x(t)$ stabilnego równania różniczkowego też jest ograniczone. Te własności rozwiązania ogólnego są podstawą definicji stabilności układu opisanego równaniem różniczkowym (r. 6.2.2).

IV. Rozwiązanie szczególne równania różniczkowego (całka szczególna) – rozwiązanie ogólne z określonymi parametrami $A_1 \div A_n$. Parametry A_i są obliczone na podstawie n warunków początkowych, czyli zbioru wartości n zmiennych wybranych spośród $n+1$ możliwości:

$$x^{(n)}(t_0), \dots, \dot{x}(t_0), x(t_0) \quad (1-37)$$

Na podstawie n warunków początkowych oraz wartości funkcji wymuszającej $f(t_0)$ i jej pochodnych występujących w rozwiązaniu $x(t)$ powstaje układ n równań, umożliwiający wyznaczenie n parametrów $A_1 \div A_n$. W ten sposób spośród wszystkich możliwości jakie opisuje rozwiązanie ogólne $x(t)$ jest wybierane jedno, które spełnia zadane warunki początkowe - rozwiązanie w chwili t_0 osiąga zadane wartości (przechodzi przez zadany punkt).

Warunki początkowe muszą spełniać równanie różniczkowe. Więc zakładając na przykład warunki:

$$x^{(n)}(t_0) = w_n, x^{(n-1)}(t_0) = w_{n-1}, \dots, \dot{x}(t_0) = w_1 \quad (1-38)$$

można podstawić je wraz z wymuszeniem $u(t_0)$ i jego pochodnymi do równania (1-19) i wyznaczyć wartość $x(t_0)$, co pozwala wykorzystywać równoważne zbiory warunków początkowych.

W praktyce zazwyczaj warunki początkowe określa się w chwili $t_0 = 0$. Przy stałych wymuszeniach warunki początkowe często są definiowane jako stan równowagi układu w chwili $t_0 = 0$, co oznacza, że wszystkie pochodne w równaniu w chwili 0 są równe 0 (nie ma zmian w układzie):

$$x^{(n)}(0) = 0, x^{(n-1)}(0) = 0, \dots, \dot{x}(0) = 0, \quad (1-39)$$

lub po przeliczeniu na równoważny zbiór warunków początkowych:

$$x^{(n-1)}(0) = 0, \dots, \dot{x}(0) = 0, x(0) = x_0 \quad \text{gdzie } x_0 = \frac{b_0}{a_0} u_0 \quad (1-40)$$

Zastosowania klasycznego algorytmu do analitycznego rozwiązywania równań różniczkowych dla wymuszeń stałych, skokowych i impulsowych przedstawiono w r. 4, a dla wymuszeń sinusoidalnych w r. 13.1.

1.4.3. Przykład rozwiązania

Przykład dla 1 rzędu (z wykładu)

Rozwiązania i rysunki – składowe i suma, wpływ i interpretacja warunków początkowych

¹ Formalne definicje stabilności w zał. A.4.1

2. Podstawy konstrukcji modeli dynamiki układów

2.1. Ogólne zasady konstrukcji modeli dynamiki

Punktem wyjścia do opisu i analizowania dynamiki układów będą elementarne modele wybranych zjawisk fizycznych. Modelowanie prostych przypadków pomaga zrozumieć przyczyny własności dynamicznych, a uzyskane modele można poddać pełnemu zakresowi badań analitycznych. Zastosowanie prostych modeli nie ogranicza się do prostych obiektów. Sztuka modelowania to nie tylko skonstruowanie odpowiedniego wyrażenia matematycznego, ale także sformułowanie założeń upraszczających opis, tak by „tworzyć bytów ponad miarę” (zasada znana pod nazwą brzytwy Ockhama¹).

Jedną z metod konstruowania modeli dynamiki obiektów opis obiektu na podstawie równań bilansowych wielkości podlegających prawom zachowania, czyli takich jak objętość, masa, energia². Bilanse są konstruowane dla najbardziej znaczących „magazynów”, czyli makroskopowych obszarów układu, które mają zdolność magazynowania określonej wielkości. Każdy bilans opisuje chwilową zmianę zawartości magazynu w czasie, czyli pochodną:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_i (\pm f_i(t)) \pm f_g(t) \quad (2-1)$$

gdzie: $x(t)$ – wielkość podlegająca bilansowaniu, $f_i(t)$ – strumień bilansowanej wielkości dopływające/odpływające (+/-) z magazynu, $f_g(t)$ – strumień bilansowanej wielkości generowany/zużywany (+/-) wewnątrz magazynu (np. w wyniku procesów chemicznych). **rysunek?**

Z postaci bilansu (2-1) wynika, że modele opierają się równaniach różniczkowych zwyczajnych. We wzorach stosowane będą uproszczone oznaczenia pochodnych w postaci³:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad \dots, \quad x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}.$$

Wielkości $x(t)$ opisujące stan magazynów są nazywane **zmiennymi stanu** i zazwyczaj są to równocześnie **zmiennie wyjściowe** układu⁴. Po ułożeniu równań bilansowych dla wszystkich magazynów, należy sprawdzić czy poza zmiennymi stanu w układzie występują już tylko **zmiennie wejściowe**, których wartości są zadawane z zewnątrz układu (nie zależą od tego się dzieje w układzie). Jeśli zmiennych wyjściowych jest więcej niż równań różniczkowych (nie wszystkie zmienne, które nie są zmiennymi stanu można uznać za wejścia), to nadmiarowe zmienne należy wyeliminować za pomocą dodatkowych zależności (będą to równania algebraiczne, na przykład wynikające z konstrukcji układu). Model jest **jednoznacznie określony** (kompletny) jeśli zawiera tyle równań ile jest zmiennych wyjściowych, a pozostałe zmienne są zmiennymi wejściowymi.

Model dynamiki układu stanowi komplet równań różniczkowych, opisujących chwilowe (dynamiczne) bilanse magazynów tego układu. Uproszczenie modelu dynamiki, polegające na wyzerowaniu wszystkich pochodnych prowadzi do **statycznego modelu układu**. Układ równań stanowiący model statyczny może być oznaczony lub nieoznaczony (w szczególnych przypadkach) ale nie może być sprzeczny⁵.

Konstrukcja modelu obejmuje nie tylko skompletowanie równań bilansowych, ale również identyfikację (wyznaczenie) wartości wszystkich parametrów w tych równaniach. W tym celu można wykorzystywać informacje o wymiarach geometrycznych i własnościach substancji lub o dostępnych pomiarach zmiennych wejściowych i wyjściowych. Zarówno podczas konstrukcji, jak i na każdym etapie przetwarzania modelu muszą się zgadzać jednostki miary w każdym wyrażeniu. Więcej o konstrukcji [3]

¹ Brzytwa Ockhama jest ... (<https://encyklopedia.pwn.pl>)

² Dopisać o bilansie „statycznym”. Wprowadzić pojęcie „magazynu”, akumulacji wielkości i bilansu chwilowego

³ W literaturze spotyka się też oznaczenie: $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$

⁴ W dalszej części nastąpi formalne rozróżnienie zmiennych stanu i zmiennych wyjściowych modelu

⁵ Układ równań oznaczony – jedno rozwiązanie, nieoznaczony – wiele rozwiązań, sprzeczny – brak rozwiązań

2.2. Zbiorniki – otwarte układy hydrauliczne

2.2.1. Konstrukcja modeli

Najprostsze modele dynamiki konstruowane dla obiektów hydraulicznych występują w przypadku układów składających się z otwartych zbiorników, przez które przepływa ciecz o stałej gęstości, na przykład woda¹. Konstrukcja modeli opiera się wówczas na dynamicznym bilansie objętości cieczy (V) w każdym zbiorniku – zmiana objętości w czasie jest wynikiem bilansu strumieni wpływających i wypływających (f_i) do/z zbiornika:

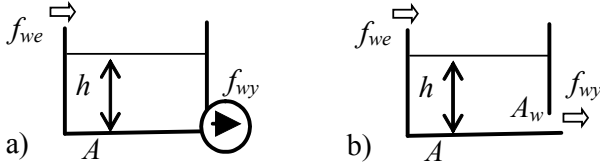
$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum \pm f_i(t), \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (2-2)$$

Opisywane modele będą dotyczyć zbiorników o płaskim dnie o powierzchni A i pionowych ścianach, to znaczy, że w bilansie (2-2) zamiast objętości V można stosować wysokość h w postaci:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = \sum \pm f_i(t) \quad (2-3)$$

Model dynamiki pojedynczego zbiornika (Rys. 2-1) opiera się na jednym równaniu różniczkowym:

$$A \dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (2-4)$$



Wypływ cieczy f_{wy} w zbiorniku (a) zależy od pompy, więc jedno równanie (2-4) stanowi kompletny model zbiornika (a) ze zmienną stanu h i zmiennymi wejściowymi f_{we} i f_{wy} .

Rys. 2-1. Zbiornik: a) z pompą, b) ze swobodnym wypływem

Natomiast w zbiorniku (b) następuje swobodny wypływ cieczy f_{wy} przez otwór w dnie (blisko dna), który zależy od powierzchni otworu A_w i wysokości cieczy w zbiorniku h :

$$f_{wy}(t) = A_w \sqrt{2gh(t)} \approx ah(t) \quad (2-5)$$

Dokładny wzór na swobodny wypływ jest nieliniowy, więc często będzie stosowane jego liniowe przybliżenie (sposób wyznaczenia współczynnika a zostanie opisany w r.19.2.1).

Jeśli w zależności (2-4) uwzględnimy dokładny wzór f_{wy} , to uzyskujemy nieliniowy model zbiornika:

$$A \dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w \sqrt{2gh(t)}, \quad (2-6)$$

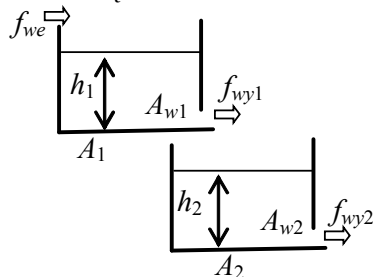
a wykorzystując wzór przybliżony – model liniowy:

$$A \dot{h}(t) = f_{we}(t) - ah(t) \quad (2-7)$$

W obu przypadkach aktualna wysokość cieczy h jest zmienną stanu (zmienną wyjściową), natomiast strumień wpływu f_{we} jest zmienną wejściową układu.

W przypadku kaskady zbiorników model dynamiki zawiera tyle równań różniczkowych ile jest zbiorników, a wysokości cieczy w poszczególnych zbiornikach są zmiennymi stanu. Kaskada na Rys. 2-2 składa się z dwóch zbiorników, są więc dwa równania bilansowe:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{wy1}(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{wy1}(t) - f_{wy2}(t) \end{cases} \quad (2-8)$$



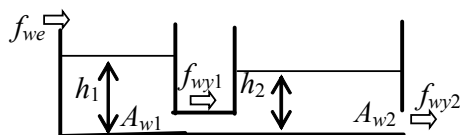
gdzie wysokości h_1 i h_2 są zmiennymi stanu, ale przepływy f_{wy1} i f_{wy2} nie są wejściami układu - konieczne jest więc wykorzystanie wyrażenia (2-5). Kompletny, dokładny model dynamiki kaskady ma postać:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - A_{w1} \sqrt{2gh_1(t)} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = A_{w1} \sqrt{2gh_1(t)} - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases} \quad (2-9)$$

gdzie f_{we} jest jedyną zmienną wejściową. Opisując swobodny wypływ ze zbiorników przybliżoną liniową zależnością (2-5) można uzyskać model liniowy. **Dodać lin? (będzie dalej)**

Jeśli swobodny wypływ cieczy ze zbiornika następuje nie na zewnątrz, ale przez połączenie rurowe do kolejnego zbiornika (Rys. 2-3), to strumień swobodnego wypływu zależy od powierzchni otworu A_w i różnicy wysokości pomiędzy połączonymi zbiornikami:

¹ woda lub inna ciecz niezbyt lepka, niezbyt gęsta pozwala m.in. pominąć wpływ tarcia i bilansować objętość a nie masę



Rys. 2-3. Zbiorniki połączone przewodem (kaskada współdziałająca)

$$f_{wy1}(t) = A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \approx a_1(h_1(t) - h_2(t)) \quad (2-10)$$

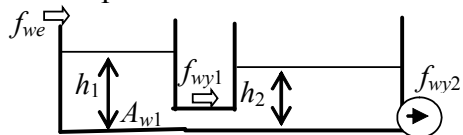
(dotyczy to tylko przepływu pomiędzy zbiornikami, bo wypływ f_{wy2} odbywa się na zewnątrz, zgodnie z (2-5)).

Model dynamiki tego układu opiera się również na dwóch równaniach bilansowych (2-8), ale z zastosowaniem wyrażenia (2-10). Kompletny, dokładny model jest ostatecznie nieliniowy i ma postać:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases} \quad (2-11)$$

Model układu będzie liniowy jeśli zostaną zastosowane przybliżone, liniowe zależności do opisu swobodnego wypływu (2-5), (2-10). **Dodać lin? (będzie dalej)**

Przepływ cieczy może być również wymuszany za pomocą pomp o sterowanej wydajności, niezależnej od poziomu cieczy w zbiornikach¹. Taki przepływ jest traktowany jako zmienna wejściowa układu, niezależnie od miejsca zastosowania pompy. Stąd kompletny model układu z Rys. 2-4 ma postać:

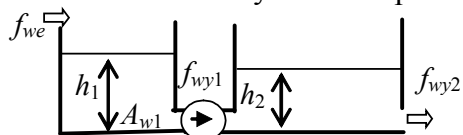


Rys. 2-4. Zbiorniki z pompą na końcu

a model układu z Rys. 2-5 ma postać:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - f_{wy2}(t) \end{cases} \quad (2-12)$$

gdzie f_{we} i f_{wy2} są zmiennymi wejściowymi.



Rys. 2-5. Zbiorniki z pompą pomiędzy

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{wy1}(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{wy1}(t) - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases} \quad (2-13)$$

gdzie f_{we} i f_{wy1} są zmiennymi wejściowymi.

Na podstawie powyższych przykładów można wnioskować, że dla typowych otwartych układów hydraulicznych należy się spodziewać układów równań pierwszego rzędu i są to zazwyczaj równania nieliniowe. Więcej o zjawiskach fizycznych w otwartych układach hydraulicznych [3].

Uwaga: W modelach nieliniowych występuje wyrażenie $A_w \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))}$, które wymaga aby $h_1(t) \geq h_2(t)$, to znaczy, że ciecz przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego. Na tym etapie rozważań przyjmujemy, że model będzie używany tylko w przypadkach, gdy ten warunek jest spełniony (szerzej w 19.2.1). W przybliżonych modelach liniowych występuje wyrażenie $a(h_1(t) - h_2(t))$, które wynika z tego samego założenia ($h_1(t) \geq h_2(t)$), ale można je wykonać również gdy $h_1(t) < h_2(t)$ i model też jest poprawny.

2.2.2. Jednostki i identyfikacja wartości parametrów

Identyfikację wartości parametrów modeli hydraulicznych łatwo jest wykonać na podstawie wymiarów geometrycznych zbiorników i otworów. Przykłady - Zał. C

Jednostką równań bilansowych jest m^3/s . Jednostki zmiennych i parametrów: h [m], f [m^3/s], V [m^3], A [m^2], A_w [m^2]. Zgodność jednostek w równaniu bilansowych można potwierdzić wykonując np. podstawienie:

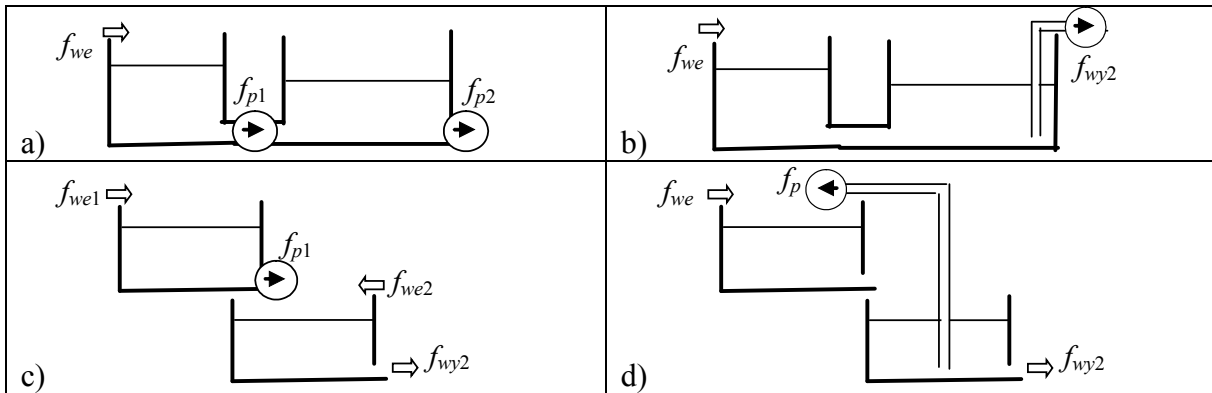
$$A \cdot \dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}$$

$$m^2 \cdot \frac{m}{s} = \frac{m^3}{s} - m^2 \cdot \sqrt{\frac{m}{s^2} \cdot m} \rightarrow \frac{m^3}{s}$$

Dysponując zbiornikami oraz pompami o sterowanej wydajności można konstruować obiekty o różnych własnościach, nawet gdy zawsze zawierają dwa zbiorniki (Tab. 2-1).

Tab. 2-1. Przykłady obiektów typu otwarte układy hydrauliczne (opis w Dodatku...)

¹ niezależność wydajności (przepływu) od różnicy poziomów (czyli różnicy ciśnień na króćcach pompy) jest założeniem upraszczającym



2.3. Obiekty cieplne – układy termokinetyczne

2.3.1. Konstrukcja modeli

Pierwszym krokiem w konstrukcji prostych modeli obiektów cieplnych jest wskazanie najbardziej znaczących magazynów ciepła (Q), czyli elementów układu, które akumulują ciepło. Opisywane modele wykorzystują założenie o doskonałym mieszaniu, to znaczy, że cała objętość magazynu będzie opisywana za pomocą jednej temperatury T , która wynika z faktycznego mieszania się substancji lub z uśrednienia wartości temperatur wewnątrz magazynu. Zawartość ciepła w magazynie wynosi:

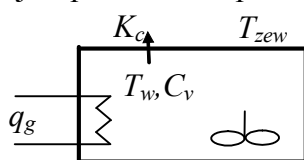
$$Q(t) = c_p \rho V T(t) = C_V T(t), \quad [\text{J}=\text{W}\cdot\text{s}] \quad (2-14)$$

gdzie C_V oznacza pojemność cieplną magazynu – stały parametr zależny od ciepła właściwego c_p , gęstości ρ i objętości V substancji wypełniającej magazyn.

Dynamiczny bilans zawartości ciepła opisuje zmianę zawartości magazynu w czasie poprzez bilans źródeł i strat ciepła (q_i) w danym magazynie:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = C_V \frac{dT(t)}{dt} = \sum \pm q_i(t), \quad [\text{W}] \quad (2-15)$$

Prostym źródłem ciepła w magazynie jest na przykład grzałka elektryczna z możliwością sterowania mocą (q_g), natomiast typową przyczyną strat ciepła jest przenikanie ciepła przez przegrody (ściany)¹. Taki prosty obiekt przedstawia Rys. 2-6. Zakładając, że dominującym magazynem ciepła w tym układzie jest powietrze w pomieszczeniu, to model dynamiki stanowi jedno równanie:



Rys. 2-6. Pomieszczenie z grzejnikiem elektrycznym

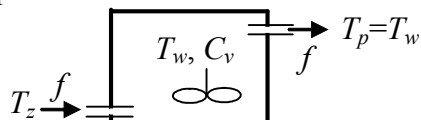
$$C_V \dot{T}_w(t) = q_g(t) - K_c (T_w(t) - T_{zew}(t)) \quad (2-16)$$

gdzie współczynnik przenikania ciepła przegrody K_c jest stały i zależy od powierzchni A , grubości a_g oraz jednostkowego współczynnika przenikalności cieplnej k :

$$K_c = kA / a_g, \quad [\text{W}/\text{deg}] \quad (2-17)$$

Zmienną wyjściową modelu jest temperatura T_w charakteryzująca aktualny stan magazynu (zmienna stanu). Pozostałe zmienne – moc q_g i temperatura na zewnątrz T_{zew} – są zmiennymi wejściowymi, ponieważ ich wartość nie zależy od procesów na obiekcie. Model jest liniowy.

Innym typowym sposobem ogrzewania jest przenoszenie ciepła przez medium (nośnik ciepła), jak na przykład nawiew ciepłego powietrza do pomieszczenia, dopływ gorącej wody do grzejnika. Rys. 2-7 przedstawia przykład izolowanego pomieszczenia z nawiewem ciepłego powietrza. Przy założeniu, że ciepło jest akumulowane tylko przez powietrze w pomieszczeniu, model obiektu ma postać:



Rys. 2-7. Pomieszczenie z nawiewem wypływające powietrze.

$$C_V \dot{T}_w(t) = c_p \rho f(t) T_z(t) - c_p \rho f(t) T_w(t), \quad (2-18)$$

gdzie $c_p \rho f(t) T_z(t)$ to strumień ciepła dostarczany przez ciepłe powietrze, $c_p \rho f(t) T_w(t)$ strumień ciepła wyprowadzany przez

Na podstawie założenia o doskonałym mieszaniu uznaje się, że temperatura nośnika wypływającego z magazynu (T_p) jest równa temperaturze nośnika w magazynie (T_w). Zmienną wyjściową modelu jest temperatura T_w , a zmiennymi wejściowymi temperatura T_z i przepływ f . Jeśli przepływ f zmienia się, to model jest nieliniowy, ale jeśli przepływ jest stały, to jest parametrem obiektu, a model jak liniowy.

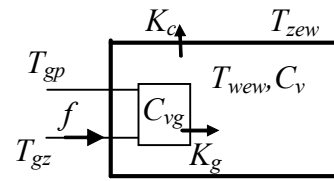
Układ cieplny zawierający kilka znaczących magazynów wymaga ułożenia kilku równań bilansowych – model zawiera tyle równań różniczkowych ile jest znaczących magazynów ciepła w układzie. Wybór znaczących magazynów następuje na podstawie ich pojemności cieplnych i jest ustalany na etapie formułowania założeń dla modelu. Zmiennymi wyjściowymi modelu są zmienne stanu, to znaczy zmienne opisujące stan (temperatury) poszczególnych magazynów. Pozostałe zmienne modelu powinny mieć charakter wejść, czyli zmiennych są wymuszane z zewnątrz².

pomieszczenie z grzejnikiem elektrycznym?

¹ przenikanie ciepła przez przegrodę obejmuje konwekcję (wnikanie/przejmowanie) ciepła z cieczy/gazu do przegrody, przewodzenie ciepła przez przegrodę i konwekcję z przegrody do cieczy/gazu.

² Zmienne, które zależą od stanu obiektu, a nie są zmiennymi stanu muszą być wyeliminowane

Przykładem takiego obiektu może być pomieszczenie z grzejnikiem centralnego ogrzewania (Rys. 2-8) - przez grzejnik przepływa gorąca woda i oddaje ciepło do pomieszczenia, a pomieszczenie traci ciepło przez zewnętrzne ściany (strzałkami oznaczono założone kierunki przepływu ciepła). Zakładamy, że ciepło jest magazynowane przez wodę w grzejniku i powietrze w pomieszczeniu.



Rys. 2-8. Pomieszczenie z grzejnikiem

Zarówno w pomieszczeniu, jak i w grzejniku zakładamy warunki doskonałego mieszania. Model pomieszczenia z grzejnikiem składa się z dwóch równań:

$$\begin{cases} C_{vg} \dot{T}_{gp}(t) = c_{pw} \rho_{pw} f(t) T_{gz}(t) - c_{pw} \rho_{pw} f(t) T_{gp}(t) - K_g (T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) \\ C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = K_g (T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) - K_c (T_{wew}(t) - T_{zew}(t)) \end{cases} \quad (2-19)$$

Z przedstawionej zasady konstrukcji układów cieplnych wynika, że modele obiektów termokinetycznych mają postać układów równań pierwszego rzędu. Modele są nieliniowe jeśli w układzie występuje przenoszenie ciepła przez medium o zmiennym natężeniu przepływu.

Uwaga: Przed układaniem równań bilansowych zakłada się kierunki przepływu ciepła przez przegrody, zwykle od najwyższej temperatury do najniższej, ale można przyjąć różne kierunki przepływu. Ważne jest tylko to, aby układać równania bilansowe konsekwentnie według założonych kierunków. To znaczy przyjmując, że np. $T_{wew} > T_{zew}$ określamy kierunek strzałki ($T_{wew} \rightarrow T_{zew}$) i wyrażenie opisujące strumień ciepła $K_c(T_{wew} - T_{zew})$, natomiast dodawanie lub odejmowanie tego składnika zależy od równania bilansowego magazynu (dodawanie jeśli strzałka pokazuje dostarczanie ciepła, odejmowanie jeśli pokazuje oddawanie ciepła). Równania ułożone w ten sposób będą poprawne również w przypadku, gdy kierunki przepływu ciepła zmieniają się w trakcie pracy.

Więcej o zjawiskach fizycznych występujących w układach termokinetycznych w [3].

2.3.2. Jednostki i identyfikacja wartości parametrów

Wartości parametrów w modelach cieplnych można wyznaczyć na podstawie wymiarów geometrycznych magazynów ciepła i własności fizycznych substancji, np. pojemności cieplne (2-14), współczynniki przenikania jednorodnych przegród (2-17). Część z nich można również wyliczyć wykorzystując równania statyczne modelu oraz informacje na temat mocy cieplnej i temperatur, na przykład dostępne w projektach budowlanych lub z pomiarów ([6]). Przykłady - Zał. C.

Jednostką równania bilansowego jest W , natomiast jednostki zmiennych i parametrów:

$$Q [J=W \cdot s], T [^{\circ}C], f [m^3/s],$$

$$c_p [J/(kg \cdot K)], \rho [kg/m^3], \lambda [W/(m \cdot K)]$$

$$C_v = c_p \rho V [J/(kg \cdot K) \cdot kg/m^3 \cdot m^3 = J/K], K_c = \lambda A / a_g, [W/(m \cdot K) \cdot m^2 / m = W/K]$$

Ponieważ w równaniach bilansowych zawsze występują różnice temperatur, to jako jednostki temperatur zastosowano praktyczniejsze stopnie Celcjusza ($^{\circ}C$), zamiast stopni Kelwina (K).

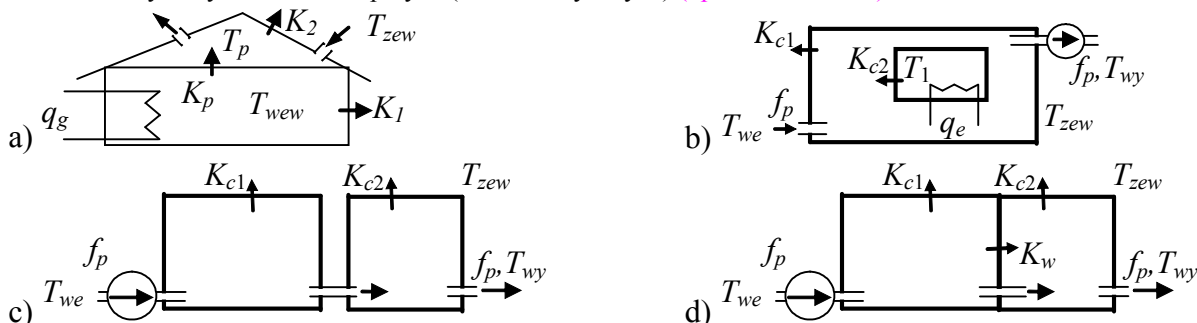
W każdym równaniu bilansowych można sprawdzić zgodność jednostek, np:

$$C_v \cdot \dot{T}_w(t) = q_g(t) - K_c \cdot (T_w(t) - T_{zew}(t))$$

$$\frac{J}{K} \cdot \frac{^{\circ}C}{s} = W - \frac{W}{^{\circ}C} \cdot (^{\circ}C - ^{\circ}C) \rightarrow W$$

Obiekty przedstawione w Tab. 2-2 mają jedną wspólną cechę – zawierają dwa magazyny ciepła. Jednak ich własności będą się różnić ze względu na relacje pomiędzy magazynami ciepła.

Tab. 2-2. Przykłady obiektów cieplnych (termokinetycznych) (opis w Dodatku..)

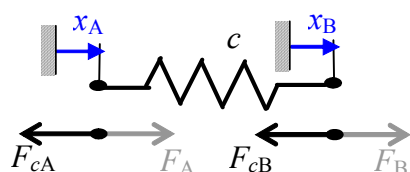


2.4. Obiekty mechaniczne liniowe

2.4.1. Konstrukcja modeli

Modele dynamiki układów mechanicznych opierają się na bilansie sił i momentów sił. Najprostsze modele występują w przypadkach, gdy ruch odbywa się wzdłuż jednego kierunku a obrót wokół jednej osi¹. Konstrukcja modelu ruchu liniowego opiera się na schemacie zastępczym układu zawierającym następujące elementy: sprężyny, tłumiki i masy oraz zewnętrzne siły.

Sprężyna reprezentuje siły sprężystości pomiędzy dwoma połączeniami (punktami) – zewnętrzna siła akcji przyłożona do danego punktu (F_A , F_B) powoduje przesunięcie tego punktu, aż do zrównoważenia przez siłę sprężystości (siłę reakcji F_{cA} , F_{cB}). Siły reakcji na końcach sprężyny są proporcjonalne do przesunięcia końców:

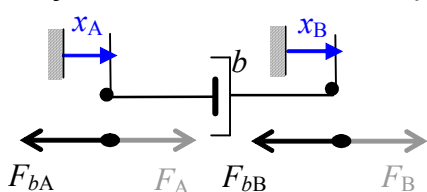


Rys. 2-9. Sprężyna

$$\begin{aligned} F_{cA}(t) &= c(x_A(t) - x_B(t)) \\ F_{cB}(t) &= c(x_B(t) - x_A(t)) \end{aligned} \quad (2-20)$$

gdzie: x_A – przesunięcie punktu A, x_B – przesunięcie punktu B, c – współczynnik sztywności (zależny od konstrukcji i materiału sprężyny).

Tłumik reprezentuje zjawisko tarcia podczas ruchu ciała w cieczy lub gazie (tarcie lepkie), które powoduje nieodwracalne przekształcanie energii mechanicznej w ciepło. Zewnętrzna siła akcji (F_A , F_B) powoduje ruch punktu z prędkością, która wynika z tłumienia/tarcia (siły reakcji F_{bA} , F_{bB}). Siły reakcji na końcach tłumika zależą do prędkości poruszających się końców:

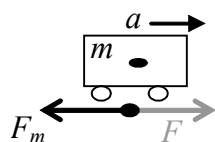


Rys. 2-10. Tłumik

$$\begin{aligned} F_{bA}(t) &= b(\dot{x}_A(t) - \dot{x}_B(t)) \\ F_{bB}(t) &= b(\dot{x}_B(t) - \dot{x}_A(t)) \end{aligned} \quad (2-21)$$

gdzie: $\dot{x}_A(t)$ – prędkość punktu A, $\dot{x}_B(t)$ – prędkość punktu B, b – współczynnik tłumienia (zależny od konstrukcji i materiału elementu w występuje tarcie).

Masa jest własnością ciała, która przeciwdziała zmianie prędkości wymuszanej przez zewnętrzną siłę (F). Opisujący element nie uwzględnia kształtu ciała i punktu przyłożenia siły – cała masa ciała jest skupiona w jednym punkcie. Siła reakcji (siła bezwładności F_m) w tym punkcie jest proporcjonalna do przyspieszenia:



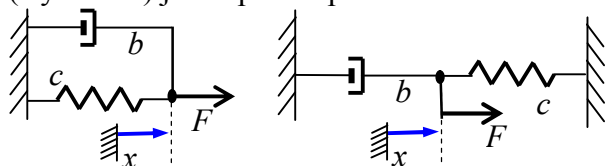
Rys. 2-11. Masa

$$F_m(t) = m\ddot{x}(t) \quad (2-22)$$

gdzie: $\ddot{x}(t)$ – przyspieszenie (a), m – masa.

Pierwszy etap modelowania obiektów mechanicznych polega na wykonaniu schematu, który opisuje działanie układu za pomocą idealnych elementów podstawowych (przykłady w załączniku?). Konstrukcja modeli układów mechanicznych poruszających się wzdłuż jednego kierunku polega na ułożeniu bilansu sił dla wszystkich punktów bilansowych, które łączą poszczególne elementy schematu i poruszają się z różnymi prędkościami. Po jednej stronie bilansu występują wszystkie zewnętrzne siły akcji, a po drugiej stronie – suma sił reakcji wszystkich elementów połączonych z danym punktem bilansowym.

Najprostsze przykłady układów mechanicznych zawierają jeden punkt bilansowy – model zawiera jedno równanie bilansowe. Na przykład połączenie sprężyny i tłumika reprezentującego opory tarcia (Rys. 2-12) jest opisane przez równanie bilansowe, w którym występuje zewnętrzna siła F i suma sił



Rys. 2-12. Sprężyna z tłumikiem

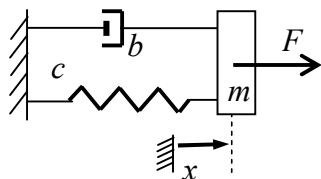
reakcji sprężyny i tłumika z jednym usztywnionym końcem:

$$b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t) \quad (2-23)$$

Przesunięcie x jest zmienną wyjściową modelu, a siła zewnętrzna F – zmienną wejściową.

Natomiast dla podobnego układu sprężyny i tłumika, w którym występuje dodatkowo masa m (Rys. 2-13) równanie bilansowe sił ma postać:

¹ Przy różnych kierunkach lub osiach należy wektorowy charakter sił i momentów.

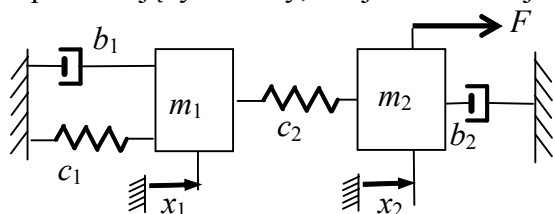


$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t) \quad (2-24)$$

Kompletny model obejmuje nadal jedno równanie, ale tym razem drugiego rzędu.

Rys. 2-13. Masa ze sprężyną i tłumikiem

Punkty bilansowe, dla których należy ułożyć równania różniczkowe często znajdują się w punktach reprezentujących masy, tak jak to ilustruje przykład na Rys. 2-14, opisany przez układ równań:

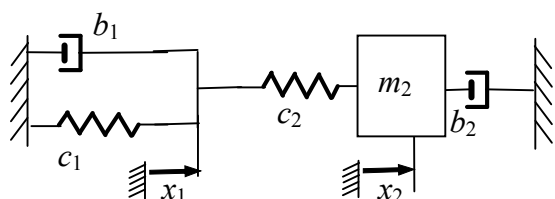


$$\begin{cases} 0 = m_1\ddot{x}_1(t) + b_1\dot{x}_1(t) + c_1x_1(t) + c_2(x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = m_2\ddot{x}_2(t) + b_2\dot{x}_2(t) + c_2(x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \quad (2-25)$$

Układ ma jedną zmienną wejściową (F) dwie zmienne wyjściowe (x_1, x_2).

Rys. 2-14. Układ z dwoma punktami i masami

Występowanie mas w punktach bilansowych nie jest konieczne. Bardziej ogólnie można powiedzieć, że istotne są punkty łączące końce sprężyn i tłumików, jak na Rys. 2-15.



$$\begin{cases} 0 = b_1\dot{x}_1(t) + c_1x_1(t) + c_2(x_1(t) - x_2(t)) \\ 0 = m_2\ddot{x}_2(t) + b_2\dot{x}_2(t) + c_2(x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \quad (2-26)$$

W modelu nie występuje zewnętrzne wymuszenie (nie ma zmiennej wejściowej), ale można badać zachowanie układu od zadanych warunków początkowych, wynikających na przykład z naciągnięcia/ściśnięcia sprężyn.

Rys. 2-15. Układ z dwoma punktami

Na podstawie powyższych przykładów można wnioskować, że modele układów mechanicznych zawierają liniowe równania różniczkowe maksymalnie drugiego rzędu.

Zjawiska fizyczne i konstrukcję bardziej złożonych modeli mechanicznych opisano na przykład w [3].

Dodać uwagi: Zakładany kierunek przesunięcia i siły reakcji

Może wahadło (dokładne i uproszczone)?

2.4.2. Jednostki i identyfikacja wartości parametrów

Wyznaczenie wartości parametrów modeli mechanicznych na podstawie wymiarów i materiału może stanowić pewien problem. [cdn.... Przykłady - Zał. C.](#)

Jednostki zmiennych i parametrów: F [N=kg·m/s²], c [N/m], b [Ns/m], m [kg]

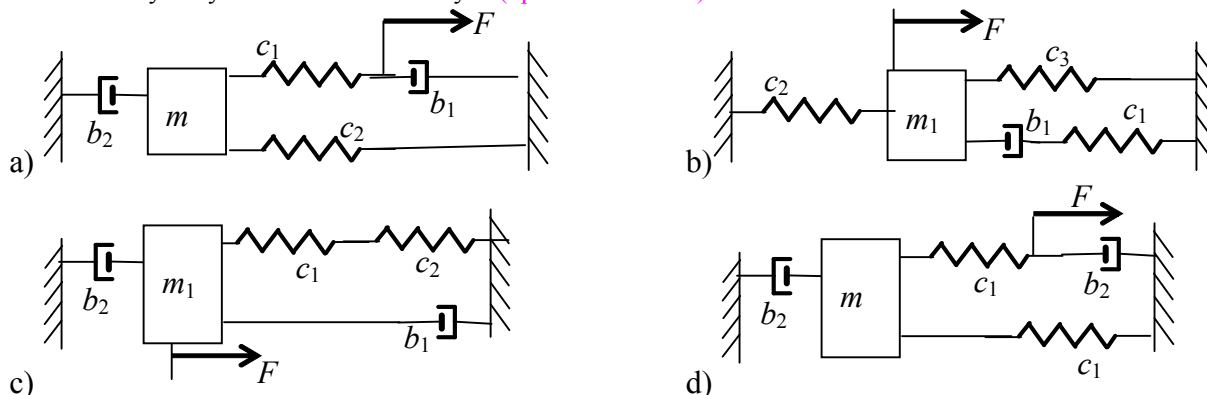
Jednostką równań bilansowych jest N, co znajduje potwierdzenie np. w modelu:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F(t)$$

$$\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \text{m} = \text{N} \quad \rightarrow \text{N}$$

Wspólną cechą przykładów z Tab. 2-3 jest to, że zawierają dwa punkty o różnych przesunięciach (x_1, x_2), czyli wymagają ułożenia dwóch równań bilansowych.

Tab. 2-3. Przykłady układów mechanicznych (opis w Dodatku...)



2.5. Obwody elektryczne

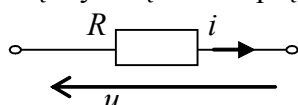
2.5.1. Konstrukcja modeli

Modele dynamiki obwodów elektrycznych opierają się na bilansie napięć w oczkach obwodu i prądów lub ładunków w węzach¹. W praktyce używa się do opisu obwodów spadków napięć (u) i natężeń prądów (i), ponieważ są to wielkości, które łatwo jest zmierzyć. Jednak z definicji natężenia prądu:

$$i(t) = \dot{q}(t) \quad (2-27)$$

wynika, że można wykorzystywać również opis układów za pomocą napięć (u) i ładunków (q).

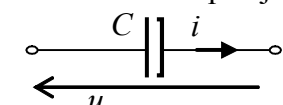
Zakłada się, że wszystkie istotne zjawiska danym obwodzie elektrycznym są reprezentowane przez następujące idealne elementy podstawowe: rezystor, kondensator i cewka oraz idealne źródła napięciowe lub prądowe. **Rezystor** reprezentuje straty energii elektrycznej na ciepło. Relacja pomiędzy natężeniem prądu i oraz spadkiem napięcia na rezystorze jest proporcjonalna (prawo Ohma):



Rys. 2-16. Rezystor

$$u(t) = Ri(t) \leftrightarrow u(t) = R\dot{q}(t) \quad (2-28)$$

gdzie R – rezystancja (zależna od wymiarów geometrycznych elementu i materiału), $\dot{q}(t)$ – zmiana ładunku w czasie $=i(t)$.

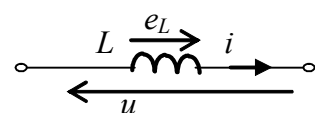


Rys. 2-17. Kondensator

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \leftrightarrow q(t) = Cu(t) \quad (2-29)$$

gdzie C – pojemność elektryczna (zależna od budowy i materiału kondensatora), $q(t)$ – ładunek.

Cewka jest elementem bezwładnościowym, który przeciwdziała zmianie natężenia prądu przez samoindukcję siły elektromotorycznej e , która jest proporcjonalna do zmiany prądu:



Rys. 2-18. Cewka

$$e_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow e_L(t) = -L\dot{q}(t) \quad (2-30)$$

gdzie L – indukcyjność własna (zależna od kształtu i materiału cewki).

W praktyce często stosuje się opis wszystkich podstawowych elementów za pomocą impedancji i uogólnionego prawa Ohma:

$$u(s) = Z(s)i(s) \text{ lub } u(j\omega) = Z(j\omega)i(j\omega) \quad (2-31)$$

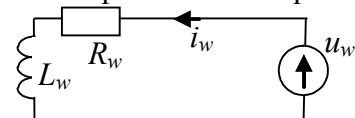
gdzie: $Z(s)$ - impedancja operatorowa (r. A.3.1), $Z(j\omega)$ - impedancja symboliczna (r. A.3.2).

Tab. 2-4 zawiera zależności (2-28)-(2-30) oraz przekształcenia tych zależności używane przy układaniu równań innymi metodami, w tym impedancje.

Tab. 2-4. Stosowane opisy podstawowych elementów elektrycznych

| | Opis napięciowo-prądowy $u(i)$ | | O.prąd.-napięciowy $i(u)$ | $u(q)$ | Impedancje | |
|-----------------|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|---------------------------|----------------|-----------------------|
| | | | | | $Z(s)$ | $Z(j\omega)$ |
| rezystor (R) | $u(t) = Ri(t)$ | $u(s) = Ri(s)$ | $i(t) = Gu(t)$ | $u(t) = R\dot{q}(t)$ | R | R |
| kondensator (C) | $u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ | $u(s) = \frac{1}{sC} i(s)$ | $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ | $u(t) = \frac{1}{C} q(t)$ | $\frac{1}{sC}$ | $\frac{1}{j\omega C}$ |
| cewka (L) | $e_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$ | $u(s) = sLi(s)$ | $i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$ | $u(t) = L\dot{q}(t)$ | sL | $j\omega L$ |

Rozważmy prosty obwód złożony ze źródła napięcia, cewki i rezystora (Rys. 2-19). Bilans napięć w oczku można przedstawić w postaci następującego równania różniczkowego:



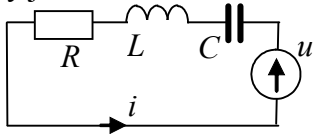
Rys. 2-19. Obwód wzbudzenia silnika

$$L_w \frac{di_w(t)}{dt} + R_w i_w(t) = u_w(t) \quad (2-32)$$

¹ z definicji natężenie prądu jest pochodną ładunku w czasie: $i(t) = dq(t) / dt$

Zmienną wejściową modelu jest napięcie zasilające u_w , a zmienną wyjściową natężenie prądu w obwodzie i_w . Praktycznym przykładem rozważanego obiektu być może być obwód wzbudzenia silnika, w którym uwzględniono indukcyjność zwojów i ich rezystancję.

Kolejny prosty obwód elektryczny zawiera elementy RLC (Rys. 2-20). Do opisu również wystarczy jedno równanie bilansowe:



Rys. 2-20. Układ oscylacyjny RLC

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t) \quad (2-33)$$

Opisując układ za pomocą napięć i prądów uzyskuje się równanie całkowo-różniczkowe. Uzyskanie modelu w postaci równania różniczkowego wymaga opisu za pomocą napięć i ładunków:

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \quad (2-34)$$

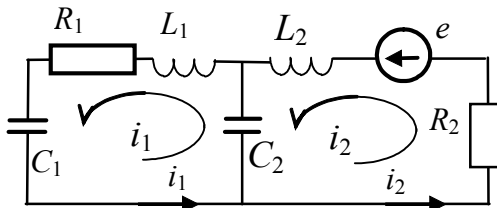
W praktyce inżynierskiej najczęściej stosuje się równanie (2-33) skonstruowane (lub przekształcone) w postaci operatorowej:

$$sLi(s) + Ri(s) + \frac{1}{sC}i(s) = u(s) \quad (2-35)$$

lub symbolicznej:

$$j\omega Li(j\omega) + Ri(j\omega) + \frac{1}{j\omega C}i(j\omega) = u(j\omega) \quad (2-36)$$

Jedną z metod układania równań dla złożonych obwodów elektrycznych jest metoda oczkowa. Pierwszy etap metody polega na wyznaczeniu odpowiedniej liczby niezależnych oczek. W układzie przedstawionym na Rys. 2-21 można wyróżnić dwa niezależne oczka¹. Równania bilansowe dla wyznaczonych oczek najwygodniej jest zapisać w postaci operatorowej:



Rys. 2-21. Układ dwuobwodowy 1

$$\begin{cases} e = sL_2 i_2 + R_2 i_2(s) + \frac{i_2 - i_1}{sC_2} \\ 0 = sL_1 i_1 + R_1 i_1 + \frac{i_1}{sC_1} + \frac{i_1 - i_2}{sC_2} \end{cases} \quad (2-37)$$

Równaniom operatorowym (2-37) odpowiadają równania różniczkowo-całkowe:

$$\begin{cases} e(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + \int \frac{i_2(t) - i_1(t)}{C_2} dt \\ 0 = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + \int \frac{i_1(t)}{C_1} dt + \int \frac{i_1(t) - i_2(t)}{C_2} dt \end{cases} \quad (2-38)$$

i równania różniczkowe:

$$\begin{cases} e = L_2 \ddot{q}_2(t) + R_2 \dot{q}_2(t) + \frac{q_2(t) - q_1(t)}{C_2} \\ 0 = L_1 \ddot{q}_1(t) + R_1 \dot{q}_1(t) + \frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_1(t) - q_2(t)}{C_2} \end{cases} \quad (2-39)$$

Przedstawiona metoda konstrukcji prowadzi do modeli, które zawierają układy równań liniowych w postaci równań operatorowych lub różniczkowo-całkowych lub różniczkowych maksymalnie drugiego rzędu. Wybór formy modelu zależy od jego dalszego wykorzystania. Rozwinięcie przedstawionych zasad zawiera na przykład podręcznik [3].

Dodać uwagi: Zakładany kierunek prądu i spadku napięcia. Przypadek gdy są same rezystancje

¹ Sposób wyznaczenia niezależnych oczek może być różny – na przykład można po wyznaczeniu każdego oczka wyłączać z dalszego wyboru jedną z gałęzi tego oczka

2.5.2. Jednostki i identyfikacja wartości parametrów

Parametry modeli elektrycznych wynikają głównie z elementów RLC o znanych wartościach.

Przykłady - Zał. C

Jednostki zmiennych i parametrów: u [V], i [A=C/s], R [Ω =V/A], C [F=C/V], L [H=Wb/A=Vs/A];

Jednostką równania bilansowego w metodzie oczkowej jest V , co można sprawdzić, np. dla:

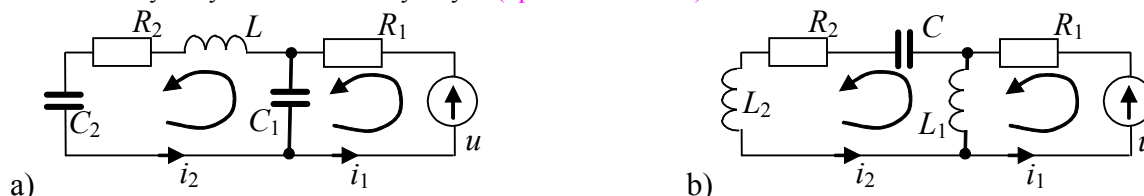
$$L \cdot \ddot{q}(t) + R \cdot \dot{q}(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) = u(t)$$

$$H \cdot \frac{C}{s^2} + \Omega \cdot \frac{C}{s} + F \cdot C = V \quad \rightarrow \quad \frac{V}{A/s} \cdot \frac{A}{s} + \frac{V}{A} \cdot A + F \cdot C = V \quad \text{pochyłe}$$

Energia (praca) [J=VAs]

W przykładowych obwodach w Tab. 2-5 zdefiniować dwa niezależne oczka. Modele będą zawierać dwa równania, a więc dwie zmienne wyjściowe oraz jedną zmienną wejściową (źródło napięciowe).

Tab. 2-5. Przykłady obwodów elektrycznych (opis w Dodatku...)



Dodać przykład gdy zmienną wyjściową jest nie prąd, tylko napięcie na elemencie

2.6. Zamknięte układy hydrauliczne i pneumatyczne

2.7. Inne (w tym układy biologiczne)

Model logistyczny

Model van der Pola?

Lotki-Volterra

2.8. Analogie

Porównanie opisu obiektów różnego typu pozwala sformułować kilka analogii (Tab.I.-7).

Tab. I-7. Przykłady analogii

| | obiekty cieplne | | obwody elektryczne | | układy mechaniczne | | układy hydrauliczne | |
|------------------------|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|--|
| | zamknięte | otwarte | zamknięte | otwarte | zamknięte | otwarte | zamknięte | otwarte |
| magazyn | $Q = C_V T$ | $q = Cu$ | $u = \frac{1}{C} q$ | $F = cx$ | $V = Ah$ | $\frac{dQ}{dt} = C_V \frac{dT}{dt}$ | $\frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$ | $\frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt}$ |
| przewodność (lub opór) | $q = C_V \frac{dT}{dt}$ | $i = C \frac{du}{dt}$ | $u = \frac{1}{C} \int i dt$ | $F = c \int v dt$ | $\Delta p = \frac{K}{V} \int f dt$ | $q = K_o T$ | $i = R i$ | $f = \frac{V}{K} \frac{d\Delta p}{dt}$ |
| bezwładność | | $i = \frac{1}{L} \int u dt$ | $u = R i$ | $F = bv$ | $\Delta p \approx Rf^{(*)1}$ | | $u = L \frac{di}{dt}$ | $f = \frac{1}{R} \Delta p$ |
| źródła | | i | u | $F = m \frac{dv}{dt}$ | $\Delta p = m \frac{df}{dt}$ | | $f \approx dh^{(*)2}$ | |
| funkcje czasu | $Q(t), q(t), T(t)$ | $q(t), i(t), u(t)$ | | F | Δp | | f | f |
| bilans | $\sum q$ | $\sum i, \sum u$ | | $\sum F$ | $\sum \Delta p$ | | $\sum f$ | $\sum f$ |

Uwaga: W tabeli pominięto oznaczenie funkcji czasu, na przykład jest T zamiast $T(t)$

Analogie dotyczą opisu liniowego, natomiast zależności dokładne to: $(*)1 \Delta p = Rf^2, (*)2 f = k\sqrt{h}$

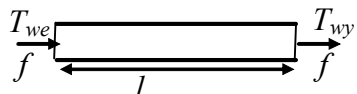
Zmienne i jednostki:

- obiekty cieplne: $Q(t)$ – ciepło [J], $q(t)$ – moc, strumień ciepła [W], $T(t)$ – temperatura [K], [°C];
- obwody elektryczne: $q(t)$ – ładunek elektryczny [C], $i(t)$ – natężenie prądu [A], $u(t)$ – napięcie, różnica potencjałów [V];
- układy mechaniczne: $x(t)$ – przemieszczenie [m], $v(t)$ – prędkość [m/s], $F(t)$ – siła [N];
- układy hydrauliczne: $V(t)$ – objętość [m³], $\mathcal{A}(t)$ – przepływ, strumień [m³/s], $\Delta p(t)$ – ciśnienie [Pa=N/m²].

Analogie opierają się na podobieństwie opisu zjawisk. Jak można zauważyć na podstawie tabeli najbardziej podobne są do siebie opisy układów elektrycznych i mechanicznych – spadki napięć

odpowiadają siłom a ładunki – przesunięciom ¹. Poza tym w obu układach występują elementy gromadzące energię (kondensator, sprężyna) i rozpraszające energię (rezystor, tłumik) oraz elementy bezwładnościowe przeciwdziałające zmianom (cewka, masa)². Analogie tę można rozszerzyć o układy hydrauliczne zamknięte, czyli układy w których rozpatruje się przepływ medium wymuszony przez różnicę ciśnień, przy czym to medium wykazuje pewną masę i jest ściśliwe³ – zakłada się, że można pominąć termodynamiczne przemiany gazu ⁴.

Drugą parę bardzo podobnych opisów stanowią modele obiektów cieplnych i układów hydraulicznych otwartych (zbiorniki) – ciepłu odpowiadają objętości a strumieniom ciepła (mocy) – przepływy medium. W obu przypadkach bilansuje się zawartość pewnego rodzaju magazynów (ciepła, objętości), a ich stan charakteryzują zmienne stanu (temperatura, wysokość). W porównaniu do układów mechanicznych i elektrycznych – nie występuje tu odpowiednik zjawiska bezwładności⁵. W obiektach cieplnych można za to wskazać charakterystyczne przykłady elementów opóźniających (\Rightarrow), które występują przy wykorzystaniu przepływającego medium jako nośnika – na przykład ciepła (Rys. 2-22). Jeśli ściany przewodu są dobrze izolowane (przenikanie ciepła przez ściany jest pomijalne) to ma miejsce jedynie opóźnienie transportowe opisane równaniem:



$$T_{wy}(t) = T_{we}(t - T_o) \quad (2-40)$$

gdzie T_o – czas opóźnienia zależny od odległości i prędkości przepływu.

Rys. 2-22. Opóźnienie transportowe

Każda analogia ma swoje ograniczenia – zakres zastosowania, na przykład założenie o liniowości zastosowanego opisu. Analogie ułatwiają nam przenoszenie wiedzy pomiędzy dziedzinami i pokazują znaczenie rozwijania i zastosowania uniwersalnych metod analizy, opartych na równaniach różniczkowych i transmitancjach.

¹ Patrz: analogie elektromechaniczne, np. [14]

² elementy mechaniczne mają mniejszy zakres liniowości opisu niż elementy elektryczne

³ Przy przepływie cieczy uwzględnia się masę a zwykle pomija ściśliwość. Natomiast przy przepływie gazu należy uwzględnić ściśliwość a masę można pominąć.

⁴ Patrz: mechanika gazów, przemiany gazowe, np. [3 (r.11)]

⁵ Bezwładność przepływającej cieczy rozpatruje się w układach hydraulicznych zamkniętych

II. Statyczny opis układów

3. Modele i charakterystyki statyczne (LAB02)

3.1. Statyczne własności układu

Model statyczny to równanie (układ równań), który opisuje obiekt (układ) w stanie równowagi, gdy wartości zmiennych wejściowych i wyjściowych są stałe. Model statyczny jest znacznie prostszym opisem układu niż model dynamiki. Można go otrzymać:

- przez uproszczenie równań dynamiki polegające na wyzerowaniu wszystkich funkcji pochodnych zmiennych wejściowych i wyjściowych - pochodna (dx/dt) to z definicji zmiana wartości (dx) w krótkim czasie (dt), a w stanie równowagi nie ma zmiany wartości ($dx=0$);
- od razu na etapie konstrukcji modelu przez tworzenie statycznych równań bilansowych opisujących układ w stanie równowagi - pomijanie akumulacji wielkości w magazynach (r. 2.2, 2.3) i elementów o własnościach dynamicznych, np. tłumiki i masy (r. 2.4), cewki, (r.2.5).

Modele statyczne są powszechnie stosowane podczas projektowania obiektów, na przykład projektowanie konstrukcji (budynki, mosty, ...), instalacji (ogrzewanie, klimatyzacja, sieć wodociągowa, ...), itp. Na tym etapie własności dynamiczne obiektu nie są rozpatrywane, na przykład budynek czy most ma mieć odpowiednią wytrzymałość, sieć grzewcza czy wodociągowa ma przetransportować odpowiednią ilość medium, a projektant ma to zapewnić opracowując konstrukcję mechaniczną, dobierając materiały i urządzenia, obliczając parametry. Każda dziedzina ma swoje metody i zasady projektowania oparte na modelach statycznych, a stosowane w postaci wzorów, tabel i charakterystyk. Tylko w szczególnych przypadkach potrzebna analiza własności dynamicznych, na przykład wpływ wiatru na zachowanie wieżowca czy mostu, wpływ gwałtownego zatrzymania pompy na sieć hydrauliczną, ... **cdn**

Pełny model statyczny danego obiektu zakłada znajomość wszystkich parametrów (stałych współczynników) występujących w równaniach. To, że są to wartości stałe, jest zawsze wynikiem przyjętych założeń (np. własności materiałów nie zależą od temperatury, ciśnienia, itp.). **Identyfikacja wartości parametrów** (wyznaczenie wartości parametrów) zależy od złożoności modelu i dostępnych informacji. Można je próbować wyznaczyć:

- bezpośrednio na podstawie wymiarów geometrycznych obiektu i własności fizycznych materiałów w określonych warunkach,
- pośrednio na podstawie wartości obliczeniowych (projektowych) **dopisać**

Dysponując pełnym modelem statycznym można wyznaczyć **wzór/wzory** na zmienne wyjściowe, czyli rozwiązać równanie (układ równań) ze względu na zmienne wyjściowe (r. 1.3.2).

Liniowe równania statyczne, takie jak na przykład:

$$a_0x = b_0u, \quad a_0x = b_{10}u_1 + b_{20}u_2, \quad 0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (3-1)$$

mają zawsze jedno rozwiązanie dla stałych wymuszeń¹:

$$x = \frac{b_0}{a_0}u, \quad x = \frac{b_{10}}{a_0}u_1 + \frac{b_{20}}{a_0}u_2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

Obliczając rozwiązanie dla konkretnych wartości wejściowych (u_0, u_{10}, u_{20}) wyznaczamy wartości wyjściowe (x_0, x_{10}, x_{20}), czyli **punkt równowagi**. W układach wielowymiarowych wartości x_{10} i x_{20} stanowią współrzędne jednego punktu równowagi. Punkt równowagi w modelach wielowymiarowych to wektor wartości zmiennych wyjściowych $[x_{10}, \dots, x_{n0}]$ wyznaczony dla danego wektora wartości wejściowych $[u_{10}, \dots, u_{m0}]$.

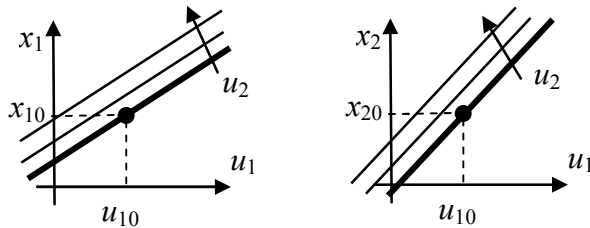
Nieliniowe równania statyczne (układy równań) mogą mieć więcej niż jedno rozwiązanie i tym samym więcej niż jeden punkt równowagi, na przykład:

$$a_{02}x^2 + a_{01}x = b_0u, \quad a_{03}x^3 + a_{01}x = b_0u \quad (3-3)$$

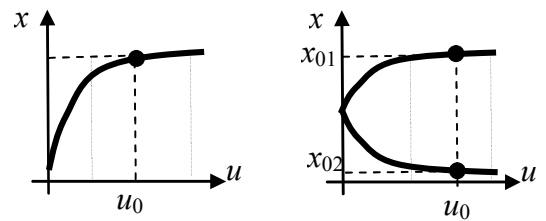
Charakterystyka statyczna obiektu jest graficzną prezentacją zależności $x(u)$ - pomiędzy zmienną wyjściową (x) i wejściową (u) w pewnym przedziale wartości u . Punkt równowagi jest punktem wykresu $x(u)$ wyznaczonym dla konkretnej wartości u_0 (wartość $x_0 = x(u_0)$). Jeśli model jest wielowymiarowy (obejmuje wiele niezależnych zmiennych wyjściowych i wejściowych), to można

¹ poza szczególnym przypadkiem braku rozwiązania lub nieskończonej liczby rozwiązań, omówionym w r. ????

narysować charakterystykę statyczną dla każdego z wyjść: $x_i(u_1 \div u_m)$. W praktyce ma ona postać rodziny charakterystyk statycznych, gdzie jedna ze zmiennych wejściowych jest reprezentowana na osi, a pozostałe są parametrami wykresu (Rys. 3-1). W modelach liniowych wszystkie charakterystyki statyczne są liniowe, natomiast w modelach nieliniowych nie wszystkie charakterystyki statyczne muszą być nieliniowe lub posiadać wiele punktów równowagi (Rys. 3-2).



Rys. 3-1. Rodzina charakterystyk statycznych, zakres pracy i współrzędne punktu równowagi



Rys. 3-2. Wykłady nieliniowych charakterystyk statycznych z jednym i dwoma punktami równowagi

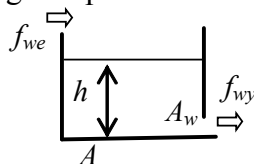
W zastosowaniach inżynierskich stosuje się ograniczenie prezentacji wykresów do **zakresu pracy**, czyli przedziału wartości zmiennych wejściowych i wyjściowych, które są osiągalne lub stosowane w rzeczywistym układzie. Poza tym badania wykonuje się często w pewnym obszarze wokół wybranego punktu równowagi, który nazywany jest wówczas **punktem pracy** (patrz też r.). Takie ograniczenie zakresu pracy w układach nieliniowych jest wykorzystywane do uproszczenia badań układów nieliniowych (r.X)

Kolejne przykłady przedstawiają zastosowanie modeli statycznych do identyfikacji wartości parametrów, wyznaczania charakterystyki statycznej i punktu równowagi. Natomiast przedstawione fragmenty skryptów zilustrują przykładową realizację tych zadań w badaniach symulacyjnych z uwzględnieniem własności Matlaba.

3.2. Zastosowanie charakterystyk do linearyzacji

3.2.1. Kaskada zbiorników

Podstawą otwartych układów hydraulicznych jest pojedynczy zbiornik ze swobodnym wypływem (Rys. 3-3, opisany w r.2.2). Model takiego elementu to jedno równanie (2-6), które w stanie równowagi ma postać:



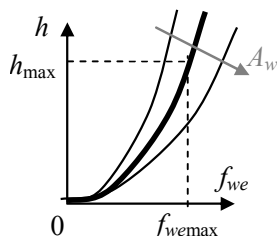
Rys. 3-3. Zbiornik ze swobodnym wypływem

$$0 = f_{we} - A_w \sqrt{2gh} \quad (3-4)$$

i pozwala wyznaczyć zmienną wyjściową h :

$$h = \frac{f_{we}^2}{2gA_w^2} \quad (3-5)$$

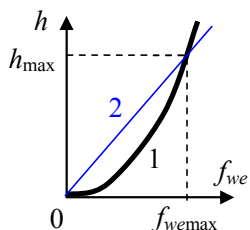
Jedynym parametrem modelu jest powierzchnia otworu (A_w), którą łatwo jest zmierzyć czy oszacować na podstawie wymiarów. Na podstawie (3-5) można narysować charakterystykę statyczną danego zbiornika w zakresie $0 \div f_{wemax}$. Można też zbadać wpływ powierzchni A_w na poziom cieczy (porównać różne zbiorniki) - Rys. 3-4. Przykładowy skrypt poniżej realizuje to zadanie wykorzystując m.in. różne sposoby generowania wektorów oraz operacje na elementach wektora (operatory z kropką zamiast pętli):



Rys. 3-4. Charakterystyka statyczna (3-5) dla różnych zbiorników (powierzchni A_w)

```
g=9.81;
tabAw=[.1, .2, .3]; %wektor parametrów, m2
kolor='grb'; %wektor kolorow
Fwemax=2; %max przepływ wejściowy, m2/s
Fwe=[0:Fwemax/10:Fwemax]; %wektor wartości wejściowych
figure; hold on; grid on;
for i=1:3 %pętla dla wartości z tabAw
    h=Fwe.^2/(2*g*tabAw(i)); %wektor wartości wyjściowych
    plot(Fwe, h, kolor(i));
end
```

Jeśli zamiast nieliniowego równania (3-4) stosowane jest jego liniowe przybliżenie:



Rys. 3-5. Charakterystyka statyczna:
(1) dokładna (3-5), (2) uproszczona (3-7)

$$0 = f_{we} - ah, \quad (3-6)$$

to charakterystyka statyczna jest oparta na zależności:

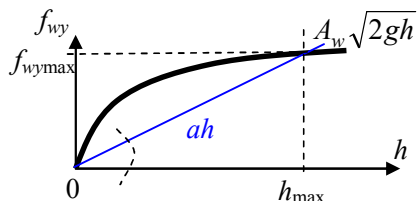
$$h = \frac{f_{we}}{a} \quad (3-7)$$

Powstaje pytanie o sposób wyznaczenia wartości a , tak aby dokładna i uproszczona charakterystyka statyczna zbiornika były zbliżone do siebie (Rys. 3-5).

Ponieważ przyczyną nieliniowości jest swobodny wypływ ($f_{wy} = A_w \sqrt{2gh}$) to zastosujemy przybliżenie tej zależności za pomocą stycznej (Rys. 3-6). Porównując

dokładne i uproszczone wyrażenie f_{wy} dla $h=0$ ($f_{wy}(0)=0$) i dla $h=h_{max}$ ($f_{wy}(h_{max})=f_{wymax}$, przy czym h_{max} występuje dla maksymalnego f_{we}), otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} A_w \sqrt{2gh_{max}} &= ah_{max} \\ \text{gdzie } h_{max} &= \frac{f_{we\ max}^2}{2gA_w^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow a(f_{we\ max}) \quad (3-8)$$

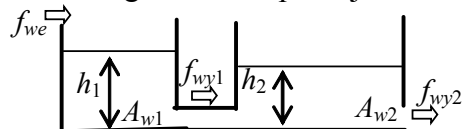


Rys. 3-6. Linearyzacja swobodnego wypływu $f_{wy}(h)$

Współczynnik a wyznaczony z tej zależności zapewnia dwa wspólne punkty charakterystyki uproszczonej i dokładnej (Rys. 3-5), a dokładność uproszczenia pomiędzy nimi zależy od punktu pracy wyznaczonego przez aktualny przepływ na wejściu i poziom cieczy w zbiorniku.

3.2.2. Kaskada zbiorników

Nieliniowe modele kaskad zbiorników można upraszczać na tej samej zasadzie, czyli przez linearyzację wzoru opisującego swobodny wypływ. Jako przykład posłuży kaskada zbiorników połączonych przewodem (Rys. 3-7, opisana w r.2.2). Jej model to układ równań (2-11), który w stanie równowagi można zapisać jako:



Rys. 3-7. Zbiorniki połączone przewodem

$$f_{we} = A_{w1} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = A_{w2} \sqrt{2gh_2} \quad (3-9)$$

Stąd dokładne wzory na zmienne wyjściowe h_1 i h_2 :

$$h_2 = \frac{f_{we}^2}{2gA_{w2}^2}, \quad h_1 = \left(\frac{1}{A_{w1}^2} + \frac{1}{A_{w2}^2} \right) \frac{f_{we}^2}{2g} \quad (3-10)$$

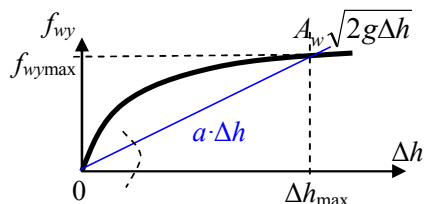
Uproszczona wersja modelu statycznego to układ równań:

$$f_{we} = a_1(h_1 - h_2) = a_2 h_2 \quad (3-11)$$

i jego rozwiązanie:

$$h_2 = \frac{f_{we}}{a_2}, \quad h_1 = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) f_{we} \quad (3-12)$$

Parametry modelu dokładnego (powierzchnie A_{w1} i A_{w2}) można łatwo zmierzyć lub oszacować. Wyznaczenie współczynnika a_2 można wykonać identycznie jak dla wypływu pojedynczego zbiornika (3-8). Natomiast przy uproszczaniu przepływu pomiędzy zbiornikami (f_{wy1}) we wzorze występuje różnica wysokości ($f_{wy1} = A_w \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$), wobec tego punkty stycznej (Rys. 3-8), to:

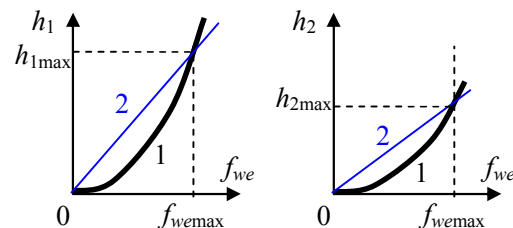


Rys. 3-8. Linearyzacja swobodnego wypływu $f_{wy}(\Delta h)$

$\Delta h=0$ ($f_{wy}(0)$) oraz $\Delta h=\Delta h_{max}$ ($f_{wy}(\Delta h_{max})=f_{wymax}$, przy czym Δh_{max} występuje dla maksymalnego f_{we}). Stąd, porównując opis dokładny i przybliżony otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} A_{w1} \sqrt{2g\Delta h_{max}} &= a_1 \Delta h_{max} \\ \text{gdzie } \Delta h_{max} &= \left(\frac{1}{A_{w1}^2} + \frac{1}{A_{w2}^2} \right) \frac{f_{we\ max}^2}{2g} - \frac{f_{we\ max}^2}{2gA_{w2}^2} = \frac{f_{we\ max}^2}{2gA_{w1}^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow a_1(f_{we\ max}) \quad (3-13)$$

Dokładne i uproszczone charakterystyki statyczne kaskady przedstawiono na Rys. 3-9.



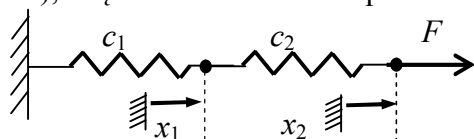
Rys. 3-9. Charakterystyki statyczne:
(1) dokładne (3-10), (2) uproszczone (3-12)

Przedstawiono przykłady zastosowania modeli statycznych do rysowania wykresów i linearyzacji. Wzory, które posłużyły do rysowania charakterystyk statycznych posłużą w dalszych badaniach do wyznaczania punktu pracy, czyli do obliczenia wartości zmiennych wyjściowych dla zadanych wartości zmiennych wejściowych.

3.3. Zastosowanie charakterystyk do identyfikacji

3.3.1. Przykład układu mechanicznego

Układ na Rys. 3-10 przedstawia proste połączenie dwóch sprężyn o różnych współczynnikach sztywności c_1 i c_2 , na które działa siła F . W układzie tym nie ma lub pominięto wpływ masy i sił tarcia (r. 2.4), więc model układu ma postać układu równań algebraicznych:



$$\begin{cases} 0 = c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) \\ F = c_2 (x_2 - x_1) \end{cases} \quad (3-14)$$

Rys. 3-10. Połączenie dwóch sprężyn

Siła F jest zmienną wejściową układu, natomiast położenia końców sprężyn x_1 i x_2 są zmiennymi wyjściowymi.

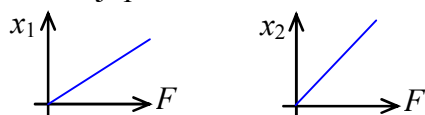
Do prowadzenia badań symulacyjnych konieczna jest znajomość wartości współczynników c_1 i c_2 . Można je obliczyć na podstawie znajomości kształtu i materiału sprężyny [odnośnik]. Można je również wyznaczyć na podstawie pomiaru wartości zmiennych w wybranym punkcie pracy (F_0, x_{10}, x_{20}) , które należy podstawić do układu (3-14) i rozwiązać względem c_1 i c_2 :

$$c_1 = \frac{F_0}{x_{10}} \quad \text{oraz} \quad c_2 = \frac{F_0}{x_{20} - x_{10}} \quad (3-15)$$

Wyznaczenie charakterystyk statycznych wymaga rozwiązania układu (3-14) ze względu na zmienne wyjściowe:

$$x_1 = \frac{F}{c_1} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} F \quad (3-16)$$

W prostym skrypcie, który rysuje charakterystyki (Rys. 3-11) wykorzystano operacje generowania wektora oraz obliczania elementów wektora, przy czym to obliczanie występuje bezpośrednio jako parametr funkcji plot:



```
c1=...; c2=...; %wartości podstawione/obliczone
F=[0:1:100]; %wektor wartości wejściowych
figure; plot(F, F/c1);
figure; plot(F, (c1+c2)./(c1*c2)./F);
```

Rys. 3-11. Charakterystyki statyczne układu

Powyższe zadania można zrealizować w alternatywny sposób - ponieważ model (3-14) jest liniowy, więc wszystkie powyższe działania można również zapisać i wykonać macierzowo. Jeśli siła i przesunięcia są zmiennymi układu, to macierzowy zapis modelu ma postać:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{lub symbolicznie} \quad \mathbf{F} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (3-17)$$

gdzie \mathbf{F} i \mathbf{x} to wektory zmiennych¹, \mathbf{C} - macierz współczynników. Stąd wektor zmiennych wyjściowych \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F} \quad (3-18)$$

¹ Należy rozróżniać wektor wartości zmiennej (np. F, x_1, x_2) i wektor zmiennych wejściowych \mathbf{F} (składający się z wartości 0 i zmiennej F) czy wyjściowych \mathbf{x} (zawierający zmienne x_1 i x_2).

Można też przy użyciu macierzy wyznaczyć wartości współczynników na podstawie pomiarów siły i przesunięć (F_0, x_{10}, x_{20}). W tym celu model (3-14) należy zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{10} - x_{20} \\ 0 & x_{20} - x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ lub symbolicznie } \mathbf{F} = \mathbf{Xc} \quad (3-19)$$

gdzie tym razem \mathbf{F} i \mathbf{c} występują w roli wektorów zmiennych, a \mathbf{X} w roli macierzy współczynników (wyznaczonych na podstawie wartości x_{10}, x_{20}), co pozwala wyznaczyć wartości wektora \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{F} \quad (3-20)$$

Ręczne wykonywanie operacji na macierzach może być kłopotliwe (np. przy odwracaniu dużych macierzy), ale programy symulacyjne są wyspecjalizowane w tego typu działaniach. Są jednak operacje na wartościach, więc nie będzie możliwości analizy wzorów funkcji, co jest pożyteczne, choć nie zawsze konieczne. W tym przypadku zarówno wzory na współczynniki (3-15), jak i zmienne (3-16) są bardzo proste. Dla bardziej złożonych modeli zastosowanie macierzy do obliczania zmiennych wyjściowych (3-18) powoduje pewną trudność. Jeśli zdefiniujemy wartości siły F w postaci wektora (np. $F=[0:1:100]$) to realizacja wyrażenia (3-18) oznacza, że zmienne \mathbf{F} i \mathbf{x} są macierzami:

$$\begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_1(n) \\ x_2(1) & \dots & x_2(n) \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ F(1) & \dots & F(n) \end{bmatrix}, \quad (3-21)$$

Aby narysować charakterystyki statyczne należy odpowiednio wybrać elementy do punkcji plot:

plot(F(2,:), x(1,:)), plot(F(2,:), x(2,:), ...) skrypt

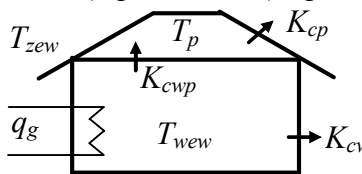
Nie ma tego problemu jeśli wzór (3-18) jest stosowany do obliczania punktu pracy, a więc dla pojedynczej wartości zmiennej F .

Natomiast warto rozważyć zastosowanie macierzy do obliczania współczynników (3-20), ponieważ wynikiem jest prosty wektor wartości współczynników.

Przedstawiono różne metody wyznaczania parametrów i rysowania charakterystyk dla modelu z jednym wejściem i dwoma wyjściami. Te same metody będą używane do wyznaczania punktu pracy.

3.3.2. Charakterystyki statyczne pomieszczenia z grzejnikiem

Dla pomieszczenia z grzejnikiem elektrycznym (Rys. 3-12) można skonstruować bilans ciepła dostarczanego przez grzejnik o mocy q_g i ciepła traconego: przez zewnętrzne ściany (współczynnik strat K_{cw}), przez sufit (współczynnik strat K_{cwp}) i przez dach (o współczynniku strat K_{cp}).



$$\begin{cases} 0 = q_g - K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) - K_{cwp}(T_{wew} - T_p) \\ 0 = K_{cwp}(T_{wew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew}) \end{cases} \quad (3-22)$$

Model ma dwie zmienne wejściowe: moc grzejnika elektrycznego (q_g) i temperaturę na zewnątrz (T_{zew}). Zmiennymi wyjściowymi są temperatury w pomieszczeniu (T_{wew}) i na poddaszu (T_p).

Rys. 3-12. Pomieszczenie z grzejnikiem

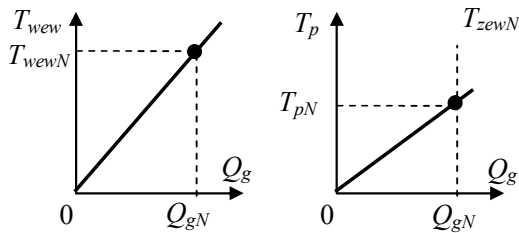
Współczynniki strat rzeczywistych budynków są określane przez projektanta, który oblicza je na podstawie powierzchni, konstrukcji i materiału ścian, okien, dachu. A następnie wyznacza zapotrzebowanie budynku na ciepło w warunkach obliczeniowych – w Polsce dla temperatury zewnętrznej -20°C .

Współczynniki występujące w modelu (3-22) reprezentują poszczególne przegrody jako parametry zastępcze (uśrednione). Dla zapewnienia zgodności z własnościami rzeczywistego obiektu, parametry modelu zostaną wyznaczone na podstawie typowych danych, które można znaleźć w projektach budowlanych, na przykład w warunkach obliczeniowych (nominalnych) dla $q_{gN}=1000\text{ W}$ i $T_{zewN}=-20^\circ\text{C}$, temperatura wewnątrz pomieszczenia T_{wewN} wynosi 20°C a na poddaszu T_{pN} wynosi 10°C . Tak więc w pewnym punkcie równowagi znane są wartości wszystkich zmiennych w układzie równań (3-22). Do wyznaczenia są wartości trzech współczynników (K_{cw} , K_{cwp} , K_{cp}), więc konieczne jest jeszcze jedno równanie, które można napisać jedynie na podstawie dodatkowych założeń, na przykład takich jak jedno z poniższych:

- między współczynnikami strat zachodzi następujący związek $K_{cwp}=0,25K_{cw}$,
- straty przez ściany to 30% zapotrzebowania w warunkach nominalnych, czyli $K_{cw}(T_{wewN} - T_{zewN}) = 0,3q_{gN}$.

Na takiej podstawie można wyprowadzić wzory na poszczególne współczynniki, które będą używane do obliczania ich wartości w skryptach.

Charakterystyki statyczne obiektu powstają na podstawie rozwiązania układu równań (3-22) ze względu zmienne wyjściowe T_{zew} i T_p . Rozwiązania są funkcjami dwóch zmiennych wejściowych g_g i T_{zew} , więc przy tworzeniu wykresów zawsze jedna z tych zmiennych będzie parametrem wykresu – na Rys. 3-13 jest to temperatura T_{zew} o wartości odpowiadającej warunkom obliczeniowym (T_{zewN}).



Rys. 3-13. Wybrane charakterystyki statyczne układu Rys. 3-12

```
QgN=1000;TzewN=-20;TzewN=20;TpN=10;
Kcw=...;Kcwp=...;Kcp=...;           %oblicz współczynniki
Qg=[0 : 0.1*QgN : QgN];             %wektor wartości wej.
Tzew=TzewN;                          %parametr wykresu
Tzew=...;                             %oblicz wektor Tzew
Tp=...;                               %oblicz wektor Tp
figure, plot(Qg, Tzew, 'r', QgN, TzewN, 'o');
figure, plot(Qg, Tp, 'r', QgN, TpN, 'o');
```

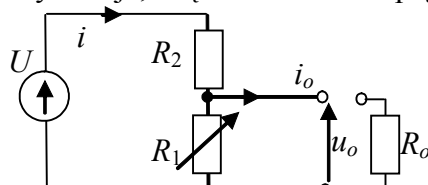
Na wykresach narysowano dodatkowo punkt odpowiadający wartościom obliczeniowym (punkt nominalny). Jeśli wyprowadzenie wzorów i zapis w skrypcie są wykonane poprawnie, to punkt ten trafi na linię wykresu.

Przedstawiono przykłady wyznaczania parametrów na podstawie modelu statycznego i dodatkowych założeń, oraz rysowanie i testowanie charakterystyk dla modelu wielowymiarowego.

3.4. Zastosowanie charakterystyk do analizowania pracy układu

3.4.1. Obwód elektryczny

Przedmiotem analizy jest dzielnik napięcia (Rys. 3-14), w którym za pomocą potencjometru R_1 można ustawiać wartość napięcia na zaciskach wyjściowych u_o (rozważmy przypadek bez obciążenia i po włączeniu obciążenia R_o). Zmienną wyjściową jest więc napięcie u_o . Obwód zawiera tylko rezystancje, więc zależności napięć i prądów są opisem statycznym:



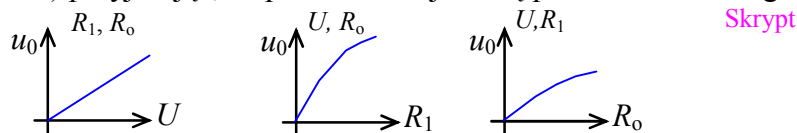
Rys. 3-14. Dzielnik napięcia

| bez obciążenia | z obciążeniem R_o |
|---|--|
| $\begin{cases} U = (R_1 + R_2)i \\ u_o = R_1 i \end{cases}$ | $\begin{cases} U = (R_1 + R_2)i \\ u_o = R_1(i - i_o) \\ u_o = R_o i_o \end{cases} \quad (3-23)$ |

Po wyznaczeniu zmiennych wyjściowych:

| | |
|---------------------------------|--|
| $u_o = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$ | $u_o = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_o}{R_1 + R_o} U \quad (3-24)$ |
|---------------------------------|--|

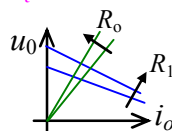
W obwodach elektrycznych stałe parametry, takie jak rezystancja R_2 są zazwyczaj znane (podane). Natomiast rezystancje R_1 i R_o oraz napięcie U potraktujemy w tym przypadku jako zmienne wejściowe. Można narysować charakterystyki statyczne tego obwodu w funkcji każdego z wejść (Rys. 3-14) przyjmując, że pozostałe wejścia są parametrami danego wykresu.



Rys. 3-15. Charakterystyki obwodu z Rys. 3-14

Charakterystyki statyczne można wykorzystać do badania wpływu poszczególnych zmiennych na napięcie u_o , ale też do wyznaczenia wartości wejściowej (np. R_1) tak aby uzyskać określoną wartość wyjściową (u_o) przy ustalonych pozostałych wejściach (R_o i U). **narysować**

Dopisać o charakterystykach obciążenia dzielnika (dopasować R_1 do zmian obciążenia R_o , tak aby utrzymać u_o)



$$\begin{cases} u_o = \frac{R_1 U}{R_1 + R_2} - R_1 i_o \\ u_o = R_o i_o \end{cases} \quad (3-25)$$

Przedstawiono przykład zastosowania modelu statycznego do wyznaczania charakterystyk statycznych oraz graficznego rozwiązywania układu równań.

3.4.2. Obwód hydrauliczny

Przykład hydrauliczny – pompa z obciążeniem?

III. Podstawowe badania dynamiki układów w praktyce inżynierskiej

4. Analityczne badanie liniowych równań różniczkowych (1.i 2.rząd) (LAB03)

4.1. Wprowadzenie

Własności dynamiczne powodują, że reakcje obiektu na zmiany nie ustalają się natychmiast, co można zilustrować na wykresach czasowych (r. 1.2). Podstawą modeli, które opisują te własności są równania różniczkowe. W przypadku prostych, liniowych modeli można rozwiązać równania różniczkowe (r. 1.4.2), czyli wyznaczyć wzór funkcji opisujący reakcje obiektu w czasie. Szczególnie znaczenie praktyczne ma rozwiązanie układów 1. i 2. rzędu (r. 4.2). Ze względu na własności dynamiki najbardziej interesująca jest część swobodna tych rozwiązań (r. 4.3), decydująca o stabilności rozwiązania, a złożona zazwyczaj ze składników postaci: Ae^{at} , $Ae^{at}\sin(\omega t + \varphi)$.

Rozwiązania występujące w układach 1. i 2. rzędu są również składnikami rozwiązań bardziej złożonych układów wyższego rzędu (r. 4.4) [Więcej? Odsyłacz do pogłębionej analizy \(wpływ zer i krotności biegunów\)?](#)

4.2. Rozwiązania analityczne w podstawowych badaniach dynamiki (LISTA01/3)

4.2.1. Rozwiązywanie liniowych równań różniczkowych w badaniach dynamiki

W praktyce inżynierskiej ogólny algorytm rozwiązywania równań różniczkowych (r. 1.4.2), można znacznie uprościć podczas realizacji podstawowych badań dynamiki dla określonych wymuszeń i warunków początkowych. Ogólne zasady postępowania zostaną omówione na przykładzie równania drugiego rzędu ($a_2 \neq 0$):

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t), \quad (4-1)$$

dla którego przekształcenia są na tyle proste, że można je wykonać na symbolach (przykłady liczbowe przedstawiono w Zał.B).

I. Rozwiązanie swobodne (składowa swobodna, przejściowa)

Równanie charakterystyczne modelu liniowego można zawsze napisać wprost na podstawie równania różniczkowego (4-1) - w analizowanym przypadku ma ono następującą postać:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (4-2)$$

Stąd wyznaczamy pierwiastki (λ_1, λ_2) równania charakterystycznego, nazywane **biegunami układu**:

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}, \quad \text{gdzie } \Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0 \quad (4-3)$$

Obliczone pierwiastki (niezależnie od tego czy są rzeczywiste, czy zespolone) można sprawdzić przez podstawienie ich do równania charakterystycznego w postaci iloczynowej:

$$a_2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \rightarrow a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad (4-4)$$

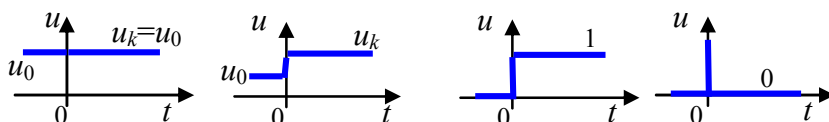
Założmy na tym etapie, że są to dwa różne pierwiastki rzeczywiste, więc rozwiązanie swobodne będzie miało następującą postać:

$$x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4-5)$$

gdzie A_1 i A_2 są nieznanymi jeszcze parametrami. Niezależnie od wartości A_1 i A_2 , jeśli oba pierwiastki są ujemne, to rozwiązanie swobodne będzie zanikać z czasem.

II. Rozwiązanie wymuszone (składowa wymuszona, ustalona)

W przypadku równań różniczkowych opisujących obiekty i układy automatyki powszechnie są stosowane rozwiązania przy wymuszeniu $u(t)$, które jest stałe dla $t > 0$. Warunek ten spełniają funkcje o stałej wartości oraz wymuszenia skokowe i impulsowe (Rys. 4-1).



Rys. 4-1. Wymuszenie stałe dla $t > 0$

We wszystkich tych przypadkach rozwiązanie wymuszone może być wyznaczone na podstawie równania statycznego:

$$a_0 x = b_0 u \quad (4-6)$$

Gdy wymuszenie od chwili $t > 0$ ma stałą wartość u_k , to rozwiązanie wymuszone $x_w(t)$ ma postać:

$$x_w(t) = x_k = \frac{b_0}{a_0} u_k = k_{uH} u_k, \text{ jeśli } a_0 \neq 0. \quad (4-7)$$

W szczególnych przypadkach, dla wymuszenia skokowego $1(t)$ i impulsowego $\delta(t)$, otrzymujemy:

- dla $u(t)=1(t)$ jest $u_k=1$, stąd $x_w(t)=x_k=b_0/a_0=k_{uH}$
- dla $u(t)=\delta(t)$ jest $u_k=0$, stąd $x_w(t)=x_k=0$

We wszystkich tych przypadkach rozwiązanie wymuszone $x_w(t)$ jest wartością stałą, o ile tylko $a_0 \neq 0$. Współrzędne (u_k, x_k) , które opisują układ w stanie równowagi, nazywamy **końcowym punktem równowagi**. Równanie liniowe ma tylko jeden punkt równowagi dla danego wymuszenia u_k (poza szczególnym przypadkiem, gdy $a_0=0$). Wartość b_0/a_0 nazywamy **wzmocnieniem układu** k_{ukl} przy stałym wymuszeniu. (tu???)

III. Rozwiązanie ogólne

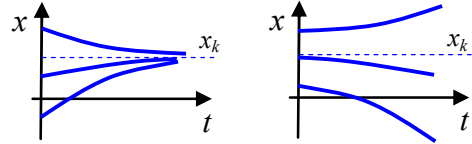
Rozwiązanie ogólne równania drugiego rzędu (4-1) z wymuszeniem stałym, skokowym lub impulsowym, to klasa rozwiązań o postaci:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + x_k, \text{ gdzie } x_k = k_{uH} u_k \quad (4-9)$$

IV. Rozwiązanie szczególne

Dwa parametry A_1 i A_2 , występujące w rozwiązaniu ogólnym, są wyznaczane dla konkretnych warunków początkowych. Warunki początkowe są niejako podsumowaniem całej przeszłości układu do chwili $t=0$ – nie ma znaczenia jak układ do tego stanu doszedł¹. W praktyce inżynierskiej wybór warunków początkowych zależy od celu badania.

Badania z wymuszeniem o stałej wartości ($u_0=u_k$) zazwyczaj służą do pokazania ewolucji stanu układu od warunków początkowych różnych od punktu równowagi (Rys. 4-2). Szczególnym przypadkiem tego badania jest brak wymuszenia ($u_0=u_k=0$).



Rys. 4-2. Przykłady ewolucji stanu układu

Rozważmy dwa warianty określenia warunków początkowych: 1) $x(0), \dot{x}(0)$; 2) $\dot{x}(0), \ddot{x}(0)$.

1) Załóżmy, że szukamy rozwiązania dla warunków początkowych: $x(0)=w_0, \dot{x}(0)=w_1$. Po podstawieniu tych warunków do (4-9) uzyskujemy układ równań:

$$\begin{cases} w_0 = A_1 e^{\lambda_1 0} + A_2 e^{\lambda_2 0} + x_k \\ w_1 = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_0 = A_1 + A_2 + x_k \\ w_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \end{cases} \quad (4-10)$$

który umożliwia obliczenie wartości A_1 i A_2 . Wyznaczone w ten sposób rozwiązanie szczególne równania (4-1) przy stałym wymuszeniu x_k i dla zadanych warunków początkowych $x(0)=w_0, \dot{x}(0)=w_1$ ma postać:

$$x(t) = \frac{\lambda_2(x_k - w_0) + w_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1(x_k - w_0) + w_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + x_k, \text{ gdzie } x_k = k_{uH} u_k \quad (4-11)$$

Szczególnym przypadkiem warunków początkowych jest $w_0=x_k$ i $w_1=0$, gdy rozwiązaniem szczególnym jest $x(t)=x_k$, czyli końcowy stan równowagi.

2) Warunki początkowe są zadawane także często w postaci $\dot{x}(0)=w_1, \ddot{x}(0)=w_2$. Można je wykorzystać wprost do ułożenia układu równań:

$$\begin{cases} w_1 = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 0} \\ w_2 = \lambda_1^2 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2^2 A_2 e^{\lambda_2 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \\ w_2 = \lambda_1^2 A_1 + \lambda_2^2 A_2 \end{cases} \rightarrow A_1, A_2 \quad (4-12)$$

albo przeliczyć na warunki $x(0)=w_0, \dot{x}(0)=w_1$, podstawiając $w_1, w_2, u(0)=u_k$ do równania (4-1):

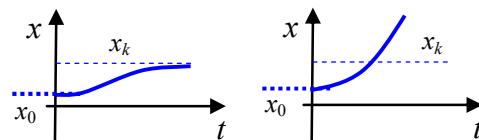
$$a_2 w_2 + a_1 w_1 + a_0 x(0) = b_0 u_k \rightarrow x(0), \quad (4-13)$$

a następnie zastosować układ (4-12).

Badania z wymuszeniem o stałej wartości są wykonywane na przykład podczas rysowania portretów fazowych (r. 8), jednak stosowane są takie metody rysowania portretów, które nie wymagają rozwiązań analitycznych.

¹ w ogólności warunki początkowe mogą być określone w innej chwili czasu

Badania z wymuszeniem skokowym w typowych zastosowaniach mają na celu wyznaczenie **odpowiedzi na wymuszenie skokowe**, czyli reakcji układu na skokową zmianę wartości wejściowej ($u_0 \rightarrow u_k$), zadawaną w czasie gdy układ jest w stanie równowagi.



Rys. 4-3. Przykłady reakcji na wymuszenie skokowe

Ponieważ zazwyczaj analiza zachowania układów dotyczy reakcji na niewielkie zakłócenia wokół **początkowego punktu równowagi**, to punkt ten nazywa się również **punktem pracy**. Warunek przeprowadzenia badania (stan równowagi przed wystąpieniem skokowej zmiany) oznacza, że w warunkach początkowych wszystkie pochodne są równe zero:

$$\ddot{x}(0)=0, \dot{x}(0)=0. \quad (4-14)$$

Po podstawieniu tych warunków do równania (4-1) można wyznaczyć wartość początkową $x(0)$:

$$a_2 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_0 x(0) = b_0 u_0 \rightarrow x(0) \quad (4-15)$$

i określić warunki początkowe wymagane przy badaniu reakcji na wymuszenia skokowe jako:

$$\dot{x}(0)=0, x(0)=x_0, \text{ gdzie } x_0 = \frac{b_0}{a_0} u_0 = k_{ukl} u_0. \quad (4-16)$$

Wartości parametrów A_1 i A_2 w rozwiązaniu (4-9) będą wyznaczone z następującego układu równań:

$$\begin{cases} x_p = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + x_k \\ 0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = A_1 + A_2 + x_k \\ 0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \end{cases} \quad (4-17)$$

Stąd odpowiedź na wymuszenie skokowe ($u_p \rightarrow u_k$) równania (4-1), czyli rozwiązanie szczególne to:

$$x(t) = \frac{\lambda_2(x_k - x_0)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1(x_k - x_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + x_k, \text{ gdzie } x_k = k_{ukl} u_k, x_0 = k_{ukl} u_0 \quad (4-18)$$

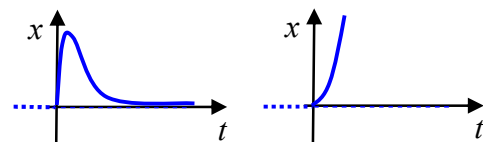
Szczególnym przypadkiem odpowiedzi na wymuszenie skokowe jest **odpowiedź skokowa** $h(t)$, czyli odpowiedź na wymuszenie skokowe, które jest skokiem jednostkowym $1(t)$, a wówczas:

- początkowa wartość wymuszenia $u_0=0$, więc początkowy stan równowagi wynosi $x_0=0$,
- końcowa wartość wymuszenia $u_k=1$, więc wartość końcowa $x_k=b_0/a_0=k_{ukl}$.

Odpowiedź skokowa $h(t)$ równania (4-1) ma więc postać:

$$h(t) = \frac{\lambda_2 x_k}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 x_k}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + x_k = k_{ukl} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \right). \quad (4-19)$$

Badania z wymuszeniem impulsowym polegają na wyznaczeniu reakcji na impulsowe zakłócenie pojawiające się w stanie równowagi układu. W badaniach analitycznych wykorzystuje się **odpowiedź impulsową**, czyli odpowiedź na teoretyczny impuls $\delta(t)$.



Rys. 4-4. Przykłady odpowiedzi impulsowych

Podczas obliczeń pojawia się jednak problem, który wynika ze szczególnych własności funkcji impulsowej w chwili 0 (z definicji: $\delta(t)=0$ dla $t \neq 0$ i $\delta(t)=\infty$ dla $t=0$ i pole pod funkcją =1). W praktyce można uniknąć tego problemu, wykorzystując własność układów liniowych, z której wynika, że **odpowiedź impulsowa $k(t)$ jest pochodną odpowiedzi skokowej $h(t)$** . Stąd odpowiedź impulsowa $k(t)$ równania (4-1) ma postać:

$$k(t) = k_{ukl} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \right) = k_{ukl} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \quad (4-20)$$

Odpowiedź impulsowa jest szczególną reakcją układu, ponieważ zawiera tylko składową swobodną.

Zasady postępowania przedstawione powyżej można zastosować również do równań, w których występuje wiele zmiennych wejściowych, jak na przykład w przypadku równania drugiego rzędu ($a_2 \neq 0$):

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_{10} u_1(t) + b_{20} u_2(t). \quad (4-21)$$

Składowa swobodna $x_s(t)$ nie zależy od wymuszeń, więc jest równa (4-5). Natomiast składowa wymuszona $x_w(t)$ dla stałych wymuszeń u_1 i u_2 (dla $t > 0$) jest wyznaczana z równania statycznego:

$$a_0 x = b_{10} u_1 + b_{20} u_2 \quad (4-22)$$

i ma stałą wartość x_w :

$$x_w(t) = x_k = \frac{b_{10}u_{1k} + b_{20}u_{2k}}{a_0} = k_{u#1}u_{1k} + k_{u#2}u_{2k}, \text{ jeśli } a_0 \neq 0. \quad (4-23)$$

Tak więc rozwiązanie ogólne także ma postać (4-9) z dwoma parametrami A_1 i A_2 , które trzeba wyznaczyć na podstawie warunków początkowych odpowiednich do badania ewolucji stanów czy reakcji na wymuszenia skokowe lub impulsowe.

Omówione zasady obliczania reakcji nie obejmują przypadków, gdy w równaniu różniczkowym występują pochodne zmiennej wejściowej, na przykład:

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t). \quad (4-24)$$

Problemem jest obliczanie pochodnych wymuszenia skokowego i impulsowego. Te szczególne przypadki zostaną omówione w ...

4.2.2. Podsumowanie - odpowiedzi skokowe i impulsowe układów 1. i 2. rzędu

Zebrać wszystkie odpowiedzi: 2.rząd i bieguny rzeczywiste, podwójne, zespolone; oraz 1.rząd?

Odpowiedzi skokowe i impulsowe równania (4-1) w przypadku podwójnego pierwiastka – dodać?

Odpowiedzi skokowe i impulsowe równania (4-1) w przypadku gdy pierwiastki (λ_1, λ_2) równania charakterystycznego są zespolone mają następującą postać (Zał.B.3.1.1):

$$h(t) = \quad (4-25)$$

$$k(t) = \quad (4-26)$$

Odpowiedzi skokowe i impulsowe dla równania pierwszego rzędu (Zał.B.1)

$$h(t) = \quad (4-27)$$

$$k(t) = \quad (4-28)$$

Zastosowanie ogólnych wzorów do analizy teoretycznej, konstrukcji dowodów. W praktyce inżynierskiej przykłady liczbowe - patrz zał.B. Dysponując wzorem można narysować wykres całego rozwiązania, a także jedno składowych

Przykład skryptu do rysowania rozwiązań: składniki i całość, dla różnych warunków początkowych

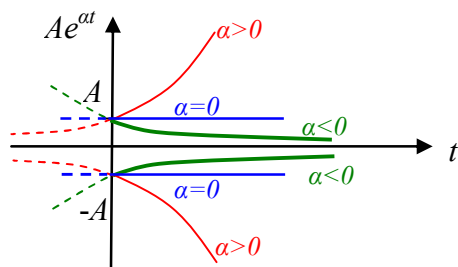
Na podstawie rozwiązań analitycznych można narysować nie tylko pełne rozwiązanie, ale także składowe rozwiązania (r. 4.3.4 ?)

6.2.3 Rozwiązywanie równań różniczkowych z pochodnymi wymuszenia – tu ????. Chyba dalej (jako wpływ zer układu)

4.3. Wykresy podstawowych składników rozwiązania (LISTA01/3)

4.3.1. Podstawowe składniki rozwiązania swobodnego – parametry i własności funkcji

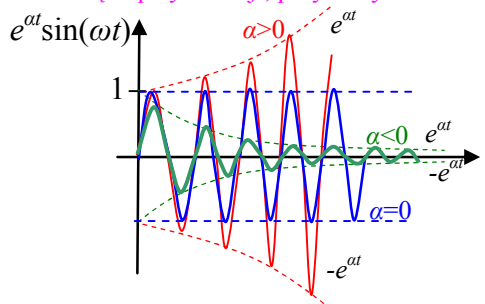
Własności dynamiki układu liniowego (stabilność, czas są zdeterminowane przez rozwiązanie swobodne (x_s). Składnikami rozwiązania swobodnego są funkcje typu eksponencjalnego Ae^{at} (Rys. 4-5) i iloczyny takich funkcji z funkcją sinusoidalną $Ae^{at}\sin(\omega t+\varphi)$ (Rys. 4-6). Z punktu widzenia zastosowania w automatyce interesujące są przebiegi tych funkcji tylko dla $t>0$, czyli od momentu rozpoczęcia obserwacji. Wartość funkcji w chwili $t=0$ zależy od współczynnika A , który wynika z założonych warunków początkowych.



Rys. 4-5. Wykresy $\pm Ae^{at}$ – wpływ znaku α

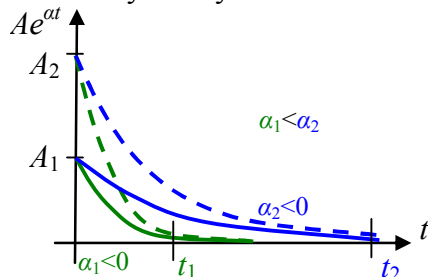
Najistotniejsza cecha funkcji Ae^{at} i $Ae^{at}\sin(\omega t+\varphi)$ wiąże się ze znakiem współczynnika α w wykładniku funkcji eksponencjalnej. Jeśli współczynnik α jest ujemny, to funkcje te z biegiem czasu praktycznie zanikają do zera, a jeśli dodatni, to funkcje zmierzają do $+\infty$ lub $-\infty$. W przypadku gdy $\alpha=0$, to funkcja Ae^{at} ma wartość stałą, a funkcja $Ae^{at}\sin(\omega t+\varphi)$ to niegasnące drgania.

rozwinąć opisy funkcji, przykłady w zał???

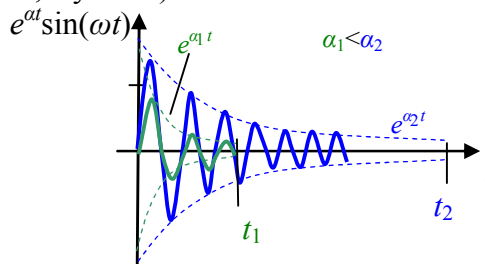


Rys. 4-6. Wykresy $Ae^{at}\sin(\omega t)$ – wpływ znaku α

Im większa wartość bezwzględna α , tym te zmiany następują szybciej (w krótszym czasie). W przypadku $\alpha>0$ funkcja e^{at} bardzo szybko ucieka do $+\infty$ lub $-\infty$ nawet dla niewielkich wartości α , więc praktycznie po stwierdzeniu, że $\alpha>0$ nie wykonuje się dalszych badań funkcji. Natomiast w przypadku gdy $\alpha<0$ można wyznaczyć czas zanikania funkcji (Rys. 4-7, Rys. 4-8).



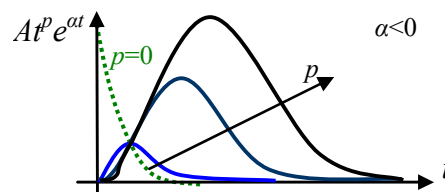
Rys. 4-7. Wykresy Ae^{at} – wpływ wartości α



Rys. 4-8. Wykresy $Ae^{at}\sin(\omega t)$ – wpływ wartości α

Teoretycznie funkcja e^{at} zanika do zera dla $t \rightarrow \infty$, ale w praktyce przyjmuje się, że poniżej pewnej wartości funkcja e^{at} praktycznie nie ma znaczenia. Czas zanikania zależy przede wszystkim od wartości α , natomiast wartość A (warunki początkowe) ma drugorzędne znaczenie.

W szczególnych przypadkach w rozwiązaniu swobodnym mogą pojawić się funkcje $At^p e^{at}$, gdzie $p \geq 1$. Także w tych wypadkach ujemna wartość α gwarantuje zanikanie funkcji do zera, choć większa wartość p wydłuża czas zanikania (Rys. 4-9).



Rys. 4-9. Wykresy $At^p e^{at}$ dla $\alpha<0$ – wpływ wartości p

Dlatego też w dalszych rozważaniach ten przypadek nie będzie specjalnie wyróżniany. Pozostałe przypadki szczególnych składników rozwiązania przedstawiono w Zał. B.1.

Do rysowania wykresów funkcji na podstawie wzorów najlepiej zastosować definicje wektorów i operacje na elementach wektora (Tab. 4-1).

Tab. 4-1. Funkcje rysowania wykresów czasowych (w tym operatory z kropką)

| | Matlab | Scilab |
|-------------------------|---|--------|
| definicja wektora czasu | <code>T=[0:0.1:10];</code> | |
| Rysowanie wykresu | <code>plot(t, A*exp(alfa*t)) plot(t, A*exp(alfa*t).*sin(w*t+fi)) plot(t, A*t.*exp(alfa*t))</code> | |

4.3.2. Rozwiązanie swobodne a położenie biegunów na płaszczyźnie zespolonej

Poszczególne składniki w rozwiązaniu swobodnym wiążą się biegunami układów (pierwiastkami równania charakterystycznego). Każdy biegun rzeczywisty ($\lambda = \alpha + j0$) „wprowadza” do rozwiązania funkcję typu $Ae^{\alpha t}$, a każda zespolona para biegunów ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega_r$) funkcję typu $Ae^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi)$. Własności tych funkcji zależą od wartości biegunów - część rzeczywista (α) odpowiada za stabilność i czas zanikania, a część urojona (ω_r) za występowanie oscylacji i ich częstotliwość. Stąd wynika graficzny sposób przedstawiania własności dynamiki układu poprzez **położenie biegunów na płaszczyźnie zespolonej** (Rys. 4-10).

Bieguny po prawej stronie płaszczyzny zespolonej ($\alpha > 0$) wprowadzają do rozwiązania składniki zmierzające do $\pm\infty$. Bieguny w lewej części płaszczyzny zespolonej ($\alpha < 0$) wprowadzają do rozwiązania składniki zanikające z czasem, a im bardziej na lewo leży biegun, tym składnik zanika szybciej.

W przypadkach granicznych, gdy bieguny leżą na osi Im ($\alpha = 0$), w rozwiązaniu pojawiają się stałe składniki ($A, A \sin(\omega_r t + \varphi)$).

Znając wszystkie bieguny układu można przewidzieć charakterystyczne cechy jego rozwiązania swobodnego x_s , które jest sumą funkcji związanych z poszczególnymi biegunami. Wystarczy nawet orientacyjna informacja o położeniu biegunów na płaszczyźnie zespolonej, aby scharakteryzować własności dynamiczne obiektu dowolnego rzędu:

- wszystkie bieguny leżą po lewej stronie - x_s zanika do zera dla $t \rightarrow \infty$ (układ jest stabilny),
- wszystkie bieguny leżą na osi rzeczywistej - x_s nie zawiera oscylacji.

W badaniach dynamiki układu stosuje się **ograniczenie analizy** do najbardziej znaczących biegunów:

- najistotniejsze są bieguny po prawej stronie - jeśli są, to decydują o niestabilności układu (nawet pojedynczy biegun o minimalnej dodatniej wartości układu determinuje niestabilność),
- jeśli nie ma biegunów w prawej półpłaszczyźnie, to najistotniejsze są bieguny leżące na osi urojonej - jeśli są to wprowadzają do rozwiązania składniki, które nie rosną, ale też nie zanikają (układ na granicy stabilności),
- jeśli wszystkie bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie (układ stabilny), to najistotniejsze są bieguny leżące najbliżej osi - decydują o czasie zanikania najwolniejszego składnika rozwiązania swobodnego, a tym samym o czasie ustalania¹ się odpowiedzi układu.

Najmniej znaczącymi biegunami są te leżące najbardziej na lewo (o najmniejszej części rzeczywistej), ponieważ wprowadzają do rozwiązania swobodnego składniki, które zanikają najszybciej. Stąd wynika możliwość **upraszczania modeli** poprzez pominięcie najmniej znaczących biegunów (p. ???).

Elementarny sposób rysowania biegunów na płaszczyźnie zespolonej, to zastosowanie funkcji plot dla każdego biegunu układu (Tab. 4-2).

Tab. 4-2. Funkcje rysowania położenia biegunów (**pzmap później**)

| | Matlab | Scilab |
|-------------------|--|--------|
| rysowanie wykresu | <code>plot(real(lambda1), imag(lambda1), 'go');</code> | |

4.3.3. Analiza jakościowa - położenie biegunów a przebiegi czasowe

Wyznaczanie biegunów ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$) równania n -tego rzędu:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \quad (4-29)$$

odbywa się na podstawie wielomianu charakterystycznego postaci:

$$a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \text{lub} \quad \lambda^n + \dots + a_2' \lambda^2 + a_1' \lambda + a_0' = 0 \quad (4-30)$$

gdzie $a_2' = a_2 / a_n$, $a_1' = a_1 / a_n$, $a_0' = a_0 / a_n$.

Równoważność wielomianów w postaci ogólnej i iloczynowej (1-6) pozwala sprawdzić poprawność wyznaczonych biegunów (rzeczywistych i/lub zespolonych):

¹ potocznie czas ustalania jest nazywany też czasem stabilizacji

$$a_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \rightarrow a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad (4-31)$$

lub: $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \rightarrow \lambda^n + \dots + a'_2 \lambda^2 + a'_1 \lambda + a'_0$

Na tej samej zasadzie znajomość wszystkich biegunów układu $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pozwala odtworzyć równanie różniczkowe jednorodne (bez wymuszenia):

$$(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0 \rightarrow \lambda^n + \dots + a'_1 \lambda + a'_0 = 0 \rightarrow x^{(n)}(t) + \dots + a'_1 \dot{x}(t) + a'_0 x(t) = 0 \quad (4-32)$$

a także odtworzyć rozwiązanie swobodne z dokładnością do warunków początkowych (wartości parametrów A), na przykład w przypadku gdy wszystkie bieguny są jednokrotne:

$$x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t} \quad (4-33)$$

Odtworzenie opisu tylko na podstawie biegunów nie jest pełnym modelem obiektu¹, ale wystarcza aby określić kluczowe cechy modelu: stabilność i występowanie oscylacji.

Nawet tak ogólna informacja jak położenie biegunów przedstawione w Tab. 4-3, pozwala przewidzieć charakter rozwiązania swobodnego x_s . Taką analizę jakościową (z dokładnością do warunków początkowych) można wykonać bez potrzeby odtwarzania wzorów i rysowania dokładnych wykresów.

Tab. 4-3. Położenie biegunów a charakter odpowiedzi (przykłady) - tu?

| Położenie biegunów | | Położenie biegunów | |
|--------------------|--|--------------------|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Położenie biegunów a odpowiedź skokową, odwołując się do rozwiązania r.r.) – napisać pełne rozwiązanie i wyplotować

Przedstawienie biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej pomaga zauważyć relacje jakościowe pomiędzy biegunami (blisko/daleko od osi/od siebie) oraz wskazać najbardziej i najmniej znaczące bieguny. Na podstawie położenia biegunów może też porównać własności różnych układów, albo określić zmianę reakcji (własności) obiektu po przesunięciu biegunów (za pomocą zmiany parametrów) lub po uproszczeniu (pominięciu biegunów), na przykład Tab. 4-4.

Tab. 4-4. Porównanie dwóch układów na podstawie położenia biegunów - zmienić przykłady (tu?)

| Zmiana położenia biegunów | | Uproszczenie biegunów | |
|---------------------------|--|-----------------------|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

¹ więcej w (Jak odtworzyć całe rozwiązanie na podstawie)

Analiza jakościowa pozwala przewidywać charakterystyczne cechy reakcji układu, co można wykorzystać do weryfikacji poprawności wykresów (odpowiedzi) uzyskanych innymi metodami, np. na podstawie wzoru rozwiązania lub symulacyjnie. Można też wyznaczyć ścisły związek między rozwiązaniem swobodnym a biegunami układu i wykorzystywać do projektowania własności dynamicznych na podstawie położenia biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej, co będzie przedmiotem dalszych rozważań (r. 7.2).

4.3.4. Numeryczne wspomaganie badań analitycznych

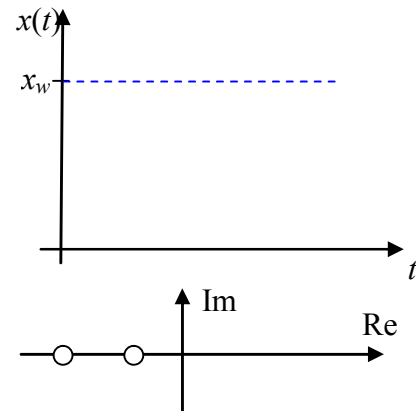
Analityczne badanie liniowych równań różniczkowych pierwszego i drugiego rzędu sprowadza się do rozwiązywania równania wielomianowego co najwyżej drugiego stopnia lub układu równań pierwszego stopnia, tak jak to opisano w r. 4.2:

- obliczanie biegunów układu na podstawie algebraicznego równania charakterystycznego,
- wyznaczanie współczynników A przez rozwiązanie jednego lub układu dwóch równań.

Na podstawie tych wzorów można przygotować uniwersalny skrypt do obliczania rozwiązań dowolnego równania 1 i 2 rzędu, i rysowania wykresów (pełne rozwiązanie i jego składniki), na przykład Tab. 4-5.

Tab. 4-5. Przykład skryptu generującego odpowiedź na wymuszenie skokowe i jej składowe oraz położenie biegunów

| Matlab / Octave / Scilab sprawdz | |
|--|--|
| <code>t=[0:1:10];</code> | <code>%wektor czasu</code> |
| <code>a2=...; a1=...; a0=...; b0=...;</code> | <code>%współczynniki równania</code> |
| <code>u0=...; uk=...;</code> | <code>%wymuszenie</code> |
| <code>w0=u0 * b0/a0; w1=0;</code> | <code>%warunki początkowe</code> |
| <code>xw= uk * b0/a0;</code> | <code>%rozwiązanie wymuszone</code> |
| <code>for i=1:size(t,2), xwt(i)=xw; end;</code> | <code>%tylko do rysowania</code> |
| <code>plot(t, xwt, 'm--'); hold on;</code> | <code>%wykres składowej xw</code> |
| <code>if a2=0</code> | <code>%równanie 1.rzędu</code> |
| <code>else</code> | <code>%równanie 2.rzędu</code> |
| <code>lambda1=...; lambda2=...;</code> | <code>%bieguny układu obliczone ze wzorów</code> |
| <code>...</code> | <code>%czy bieguny jednokrotne, rzeczywiste</code> |
| <code>A1=...; A2=...;</code> | <code>%współczynniki A</code> |
| <code>xs1 = A1*exp(lambda1.*t), xs2 = A2*exp(lambda2.*t);</code> | |
| <code>x = xw + xs1 + xs2;</code> | |
| <code>plot(t, x, 'm', t,xs1, 'g--', t,xs2, 'b--');</code> | <code>%wykres rozwiązania i składowych</code> |
| <code>figure, hold on;</code> | <code>%wykres biegunów</code> |
| <code>plot(real(lambda1), imag(lambda1), 'go');</code> | |
| <code>plot(real(lambda2), imag(lambda2), 'bo');</code> | |
| <code>end</code> | |



Rys. 4-11. Odpowiedź na wymuszenie skokowe i jej składowe, oraz położenie biegunów ($a_2=..$)

Rysunek (pełne +składniki???)

W podobny sposób można zrealizować rozwiązywanie i rysowanie wykresów dla równań rzędu 3 i 4, ponieważ istnieją analityczne wzory do wyznaczania pierwiastków (p.....). Natomiast w ogólnym przypadku równania różniczkowego n -tego rzędu postaci: **tu czy gdzieś uogólnienie?**

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \quad (4-34)$$

dla którego znane są wartości współczynników można zastosować różne narzędzia (programy) oferujące numeryczne metody rozwiązywania wielomianów i układów równań. Algorytm jest prosty, gdy równanie ma tylko jednokrotne bieguny rzeczywiste:

1° Wyznaczenie biegunów układu na podstawie równania: $a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$:

- wektor biegunów: $\lambda = \text{roots}([a_n, \dots, a_1, a_0])$
- należy zbadać czy wszystkie pierwiastki są jednokrotne i rzeczywiste (ułatwieniem jest uporządkowanie wektora λ od najmniejszej do największej wartości rzeczywistej)
- wszystkie składniki rozwiązania są postaci: $A(i) \cdot \exp(\lambda(i) \cdot t)$, gdzie t – wektor czasu

2° Wyznaczenie rozwiązania wymuszonego: $x_w = u_k \cdot b_0/a_0$

3° Wyznaczenie wartości współczynników A na podstawie warunków początkowych w_0, w_1, \dots, w_{n-1}

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{u0} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u_k \rightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_0 - k_{u0} u_k \\ w_1 \\ \dots \\ w_{n-1} \end{bmatrix}$$

4° Obliczenie sumy składników rozwiązania i rysowanie wykresu:

$$x = u_k \cdot b_0/a_0; \text{ for } i=1:n, x = x + A(i) \cdot \exp(\lambda(i) \cdot t), \text{ end; plot}(t, x)$$

Algorytm komplikuje się gdy występują bieguny wielokrotne i zespolone, ponieważ trzeba zastosować odpowiednie wzory do składników rozwiązania swobodnego¹.

Na podstawie biegunów układu $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ można odtworzyć równanie charakterystyczne:

- analitycznie: $(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0$,
- lub przy pomocy funkcji $\text{poly}([\lambda_1, \dots, \lambda_n])$.

W każdym przypadku mogą wystąpić zarówno bieguny rzeczywiste, jak i zespolone.

4.4. Przykłady zastosowania analitycznych rozwiązań równania różniczkowego

Zastosowanie na przykładach - opisana teoria a modele obiektów (koniecznie bo II "w praktyce inżynierskiej"):

4.4.1. Analiza typowych przykładów z fizyki

Opis fizyczny a ogólne równanie różniczkowe

Typowe przykłady z fizyki, np. ładowanie/rozładowanie kondensatora, nagrzewanie zbiornika:

- przekształcić do postaci ogólnej i zastosować rozwiązania

Obwód oscylacyjny

4.4.2. Fizyczna interpretacja rozwiązania

- stan równowagi, bieguny, rozwiązania dla przykładowych obiektów
- bieguny a parametry fizyczne
- przebiegi eksponencjalne jako typowe wzory w fizyce

4.5. Konwersja modeli do równania n-tego rzędu

4.5.1. Przekształcenie modeli dynamiki do jednego równania

Jeśli model dynamiki układu stanowi jedno równanie różniczkowe n-tego rzędu, to na tej podstawie można w prosty sposób określić:

- rząd modelu, który odpowiada rzędowi równania różniczkowego,
- równanie statyczne, które powstaje po wyzerowaniu pochodnych i pozwala wyznaczyć charakterystykę statyczną i punkt równowagi (stan ustalony przy stałym wymuszeniu),
- a dla układów liniowych – równanie charakterystyczne i jego pierwiastki (bieguny układu), które decydują o podstawowych własnościach dynamiki (stabilności)

Jeśli model dynamiki układu ma postać układu równań różniczkowych, to często w prosty sposób można go przekształcić do jednego równania n-tego rzędu. Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) & (1) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + bu(t) & (2) \end{cases} \quad (4-35)$$

Z równania (1) można wyznaczyć zmienną x_2 i obliczyć jej pochodną:

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}}\dot{x}_1(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1(t) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = \frac{1}{a_{12}}\ddot{x}_1(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}\dot{x}_1(t), \quad (4-36)$$

po czym obie zależności podstawić do równania (2):

$$\frac{1}{a_{12}}\ddot{x}_1(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}\dot{x}_1(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}\dot{x}_1(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1(t)\right) + bu(t) \quad (4-37)$$

i uporządkować:

$$\ddot{x}_1(t) - (a_{11} + a_{22})\dot{x}_1(t) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1(t) = a_{12}bu(t) \quad (4-38)$$

Ta sama metoda zastosowana w odniesieniu do drugiej zmiennej, czyli zmienna x_1 wyznaczona z równania (2) i jej pochodna:

$$x_1(t) = \frac{1}{a_{21}}\dot{x}_2(t) - \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2(t) - \frac{b}{a_{21}}u(t) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = \frac{1}{a_{21}}\ddot{x}_2(t) - \frac{a_{22}}{a_{21}}\dot{x}_2(t) - \frac{b}{a_{21}}\dot{u}(t), \quad (4-39)$$

podstawione do równania (1):

$$\frac{1}{a_{21}}\ddot{x}_2(t) - \frac{a_{22}}{a_{21}}\dot{x}_2(t) - \frac{b}{a_{21}}\dot{u}(t) = a_{11}\left(\frac{1}{a_{21}}\dot{x}_2(t) - \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2(t) - \frac{b}{a_{21}}u(t)\right) + a_{12}x_2(t) \quad (4-40)$$

po uporządkowaniu prowadzi do równania:

$$\ddot{x}_2(t) - (a_{11} + a_{22})\dot{x}_2(t) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2(t) = a_{21}b\dot{u}(t) - a_{12}bu(t) \quad (4-41)$$

Modele (4-38) i (4-41) mają takie samo równanie charakterystyczne, a więc te same bieguny i te same składniki rozwiązania swobodnego (różne będą współczynniki A_i). Badania dotyczące stabilności układu, czasu ustalania odpowiedzi i oscylacji można przeprowadzić na obu równaniach. Problemem

¹ funkcja plot nie przyjmuje (nie uwzględnia) zmiennych zespolonych

jest obliczenie składowej wymuszonej dla zmiennej $x_2(t)$ w badaniach z wymuszeniem skokowym i impulsowym ze względu na występowanie pochodnej wymuszenia - patrz komentarz do równania (4-24). Łatwiej jest najpierw wyznaczyć rozwiązanie $x_1(t)$, a następnie wyznaczyć $x_2(t)$ na podstawie równości (4-36). Jednak najprostszym rozwiązaniem problemu jest analizowanie pierwotnego układu równań różniczkowych, w którym nie występują pochodne wymuszeń, co zostanie omówione w r.9.

Ograniczenia tej metody przekształcenia....
(rozwiązanie za pomocą Laplace'a)

5. Symulacyjne rozwiązywanie równań różniczkowych

5.1. Wprowadzenie – rozwiązanie analityczne i symulacyjne

Badanie dynamiki obiektów opisanych prostymi, liniowymi równaniami różniczkowymi można przeprowadzić rozwiązując analitycznie równanie różniczkowe, na przykład metodą klasyczną (r. 1.4.2). Jednak nie zawsze potrzebny jest dokładny wzór rozwiązania, a przede wszystkim nie zawsze jest możliwe uzyskanie tego wzoru, czyli analityczne rozwiązanie równania różniczkowego, zwłaszcza gdy jest ono nieliniowe. Równania różniczkowe liniowe/nieliniowe można rozwiązywać również symulacyjnie za pomocą algorytmów całkowania numerycznego¹, które pozwalają wyznaczyć reakcję obiektu na zadane wymuszenie w wybranych warunkach początkowych.

Zdefiniowanie równania różniczkowego w programach symulacyjnych i wykonanie badań może być realizowane na różne sposoby. Jedną z prostszych i uniwersalnych metod jest konstrukcja schematu symulacyjnego równania różniczkowego, opartego na blokach całkujących². Metoda jest dostępna w programach, które zawierają edytor graficzny - Matlab (Simulink) i Scilab (Xcos) [5]. Zasady konstrukcji schematów symulacyjnych są takie same dla równań liniowych i nieliniowych (r. 5.2.1). Dla układów liniowych istnieją alternatywne sposoby symulacji (r. ...).

Metodę symulacyjnego badania modeli układów wybiera się wówczas, gdy badania analityczne są zbyt złożone, a to oznacza, że trudno potwierdzić wiarygodność (poprawność) uzyskanych wyników (trudno je przewidzieć). Stąd bardzo ważnym etapem badań symulacyjnych jest weryfikacja poprawności przygotowanego schematu przed rozpoczęciem badań (r. 5.2.2).

Zakładamy, że przygotowany schemat jest sparametryzowany, a program badań jest realizowany za pomocą skryptów, tak aby podczas badań nie było potrzeby edytowania schematu, co pozwoli uniknąć przypadkowych błędów.

5.2. Definiowanie modeli poprzez konstrukcję schematu symulacyjnego (LAB04)

5.2.1. Zasady konstrukcji

Graficzny sposób definiowania badanych modeli dostępny w programie Matlab+Simulink i Scilab+Xcos, opiera się na kilku podstawowych blokach (Tab. 5-1).

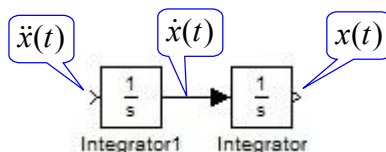
Tab. 5-1. Podstawowe bloki do definiowania schematów modeli liniowych - porównanie bloków w załączniku???

| Operacja | Matlab/Simulink | Scilab/Xcos | Octave |
|------------------|-----------------|---------------|--------|
| Całkowanie | Integrator | INTEGRAL_f | --- |
| Wzmocnienie | Gain | GAINBLK_f | |
| Sumator | Sum | BIGSOM_f | |
| sygnał wejściowy | Step | STEP_FUNCTION | |
| sygnał czasu | Clock | CLOCK_c | |

Równanie (układ równań) należy przekształcić w ten sposób, aby po lewej stronie została najwyższa pochodna zmiennej wyjściowej, np.:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t) \rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{1}{a_2} (-a_1 \dot{x}(t) - a_0 x(t) + bu(t)) \quad (5-1)$$

Rysowanie schematu powyższego równania rozpoczyna się od łańcucha bloków całkujących (Integrator) – na wyjściu ostatniego bloku będzie dostępne x , czyli szukane rozwiązanie, a na wejściu pierwszego będzie podany sygnał najwyższej pochodnej badanego równania (\ddot{x}):

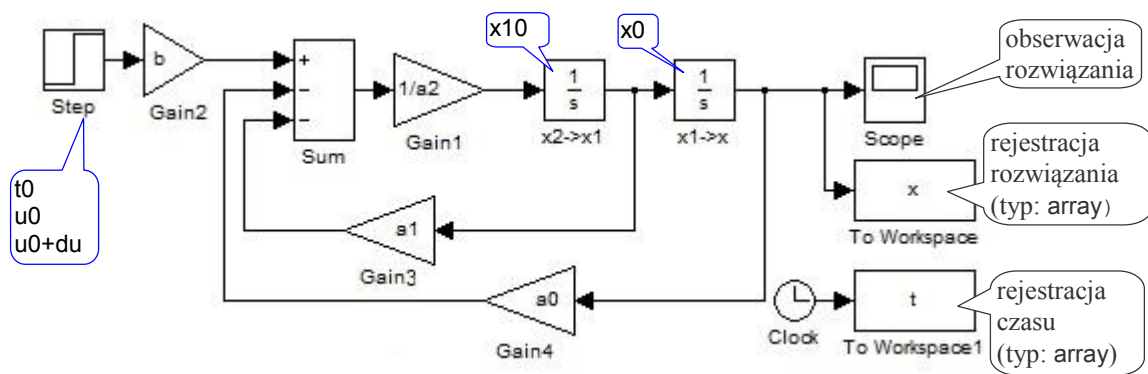


Rys. 5-1. Pierwszy etap konstrukcji schematu równania 2.rzędu – łańcuch bloków całkujących

Na wejście łańcucha należy skierować sygnał najwyższej pochodnej, skonstruowany za pomocą bloków, na podstawie równania (5-1). Charakterystyczne pętle powstające pomiędzy wejściami i wyjściami nie stanowią problemu dla iteracyjnych algorytmów całkowania numerycznego, ponieważ pętle te zawierają bloki całkujące z warunkami początkowymi (Rys. 5-2).

¹ metody całkowania numerycznego, np. w [12/r.3], [9/r.17.1]

² historia schematów sięga rozwiązywania równań różniczkowych na maszynach analogowych.



Rys. 5-2. Schemat równania 2.rzędu i skrypt (m-plik)

Skrypt:

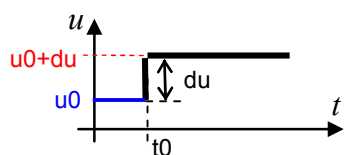
a0=2;
a1=1;
a2=5;
a3=2;
b=2;

u0=2;
x0=b*u0/a0;
x10=0;

du=1;
t0=1;

Na schemacie można wpisywać bezpośrednio wartości wszystkich potrzebnych parametrów lub używać zmiennych Matlaba (Scilaba), które zostaną zainicjowane przed uruchomieniem symulacji – najlepiej w skrypcie¹. Dzięki zastosowaniu zmiennych uzyskuje się uniwersalny schemat, który można uruchamiać dla różnych zestawów parametrów.

Na schemacie Rys. 5-2 użyto zmiennych a0, a1, a2, b, które pełnią rolę parametrów równania (a0, a1, a2, b), a także zmiennych x0 i x10 zawierających warunki początkowe (x(0), ẋ(0)), oraz u0 i du – do sparametryzowania funkcji wejściowej (Rys. 5-3).



Rys. 5-3. Parametry wymuszenia skokowego (bloku Step)

Każdy sygnał wejściowy u(t) będzie definiowany jako wymuszenie skokowe sparametryzowane za pomocą zmiennych typu stan początkowy u0 i zmiana wartości du. Jeśli du=0, to na wyjściu bloku Step będzie stała wartość.

Warunki początkowe dla równania różniczkowego można ustalić za pomocą parametrów „Initial condition” w blokach całkujących (domyślnie parametry te mają wartość zero). Na schemacie (Rys. 5-2) warunki początkowe są przekazywane za pośrednictwem zmiennych x10 i x0, odpowiadających wartościom ẋ(0) i x(0). Jeśli warunki początkowe są określone w inny sposób, na przykład przez wartości ẋ(0) i x(0), to należy je przeliczyć (r. 1.4.2), czyli podstawić je oraz u(0) do równania (5-1), obliczyć x(0) i wpisać do bloków całkujących wartości x10=0 i x0=u0/c (obliczone w skrypcie).

Przeprowadzenie symulacji następuje poprzez wykonanie skryptu (za pomocą komendy Run w menu edytora tekstowego lub przez wywołanie nazwy skryptu w oknie komend Matlaba/Scilaba) oraz uruchomienie właściwej symulacji za pomocą komend w menu w oknie edytora graficznego - określenie parametrów algorytmu obliczeniowego (np. czas symulacji) i uruchomienie symulacji. ???

Najprostszy sposób prezentacji wyników symulacji to zastosowanie na schemacie bloku typu oscyloskop (Scope), przeznaczonego przede wszystkim do obserwowania wykresów na bieżąco podczas symulacji. Wykresy można również narysować po zakończeniu symulacji za pomocą funkcji plot, na podstawie wartości zarejestrowanych za pomocą bloku To workspace (lub Scope) - Tab. 5-2.

Tab. 5-2. Podstawowe bloki do rejestracji wyników symulacji

| Operacja | Matlab/Simulink | Scilab/Xcos | Octave |
|-----------------------|-----------------|-------------|--------|
| Blok typu oscyloskop | Scope | Cscope | --- |
| Blok zbierania danych | To workspace | TOWS_c | --- |

Aby wykonać wykres za pomocą funkcji plot, konieczny jest wektor wartości zmiennej oraz wektor czasu, zawierający momenty czasu (wartości zmiennej t), w których zostały wyznaczone wartości rozwiązania. Wartości wektora czasu zmieniają się nierównomiernie, jeśli stosowane są zmiennokrokowe algorytmy całkowania² (stosowane są domyślnie w celu optymalizacji obliczeń). Wartości zmiennych i czasu mogą być rejestrowane w postaci oddzielnych wektorów lub w postaci struktury zawierającej wektor wartości i wektor czasu (w Matlabie typ zmiennej określa się w bloku rejestrującym To workspace, w Scilabie zawsze jest struktura time+values).

¹ Zaleca się żeby nazwy skryptów i schematów były różne (niezależnie od różnicy rozszerzeń w nazwach plików), ponieważ programy symulacyjne interpretują napotkane nazwy w określonej kolejności (komenda/funkcja, zmienna, schemat, skrypt) i realizują pierwszą wyszukaną możliwość

² Patrz: stało- i zmiennokrokowe algorytmy całkowania numerycznego (lit???)

5.2.2. Weryfikacja poprawności schematu

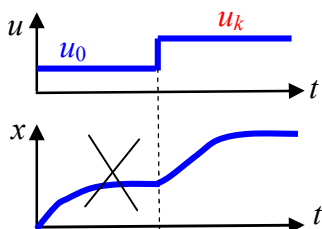
Doświadczenie pokazuje, że nawet podczas rysowania prostych schematów zdarzają błędy – pomyłka w połączeniu, zły znak funkcji, parametr, itp. Stąd konieczność weryfikacji poprawności przygotowanego schematu. Podstawą proponowanej metody weryfikacji jest sprawdzanie zachowania modelu w stanie równowagi - jeśli symulacja zostanie uruchomiona dokładnie w punkcie równowagi, to niezależnie od stabilności modelu, stan równowagi będzie zachowany dopóki wartości wejściowe nie zmienią się. **Dopisać?**

Metoda ta nie zapewnia ujawnienia wszystkich możliwych błędów, ale sprawdza się w większości przypadków.

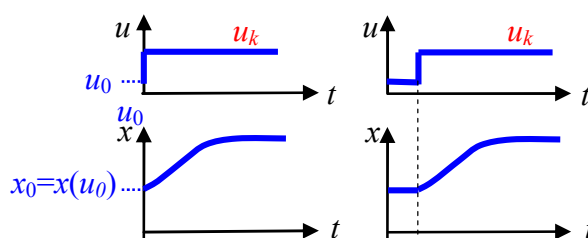
5.2.3. Punkt pracy i podstawowe charakterystyki czasowe

Poprawne wykonanie podstawowego badania dynamiki, czyli **badania reakcji na skokową zmianę** sygnału wejściowego wymaga, aby ten skok był jedyną przyczyną zmian obserwowanych w układzie, to znaczy, że **skok musi być podany na układ w czasie, gdy znajduje się on w stanie równowagi**. W badaniach symulacyjnych można to zrealizować na dwa sposoby:

- uruchomić symulację od dowolnych warunków początkowych, poczekać aż układ dojdzie do stanu równowagi i wówczas podać skok (Rys. 5-4) - wykres do momentu podania skoku nie liczy się,
- z równania statycznego wyznaczyć stan równowagi x_0 dla początkowej wartości sygnału wejściowego u_0 i uruchomić symulację przyjmując jako warunki początkowe punkt równowagi – skok można podać od razu na początku symulacji lub przesunąć w czasie (Rys. 5-5).



Rys. 5-4. Symulacja od stanu domyślnego (przypadkowego)

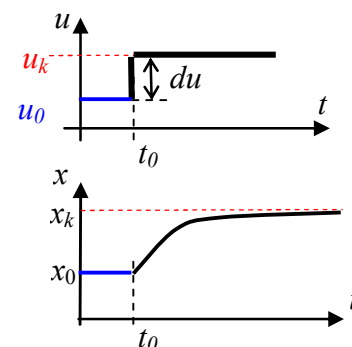


Rys. 5-5. Symulacja od stanu ustalonego

Pierwszy sposób wymaga dłuższego czasu symulacji i można go realizować tylko w przypadku układów stabilnych. Drugi sposób wymaga przeprowadzenia dodatkowych obliczeń (wyznaczenia stanu równowagi), ale jest bardziej ogólny (układy stabilne/niestabilne). Warto więc przygotować schemat i skrypt badanego układu w ten sposób, aby uruchamiać symulację od dowolnego stanu równowagi:

- w skrypcie zainicjować wartość u_0 i wyliczyć wartość x_0 dla danego u_0 na podstawie równania statycznego,
- użyć na schemacie zmiennych u_0 (wartość początkowa w bloku skoku) i x_0 (warunek początkowy w końcowym bloku całkującym).

Podczas właściwych badań można zmieniać punkt pracy (zależny od u_0) i zakłócenie (du) ograniczając się jedynie do zmian w skrypcie¹. Jeśli dodatkowo skok wartości wejściowej będzie przesunięty w czasie (skok w chwili $t_0 > 0$), to można zapewnić ciągłą kontrolę poprawności badania reakcji na wymuszenie skokowe – na odcinku $0 \div t_0$ wykres powinien przedstawiać zawsze stan równowagi (Rys. 5-6), co potwierdza, że jedyną przyczyną reakcji układu jest zmiana sygnału wejściowego.



Rys. 5-6. Symulacyjne badanie reakcji układu na skokową zmianę wymuszenia

W badaniach dynamiki układów wyznacza się również odpowiedź na zakłócenie impulsowe i jeśli jest to impuls Diraca $\delta(t)$, to mówimy o odpowiedzi impulsowej układu. Funkcja $\delta(t)$ to impuls o jednostkowej powierzchni, ale nieskończenie krótki i nieskończenie wysoki, więc praktycznie niewykonalny (i fizycznie, i symulacyjnie). Wobec tego stosuje się przybliżenia, na przykład impuls prostokątny o powierzchni równej 1, zrealizowany za pomocą dwóch sygnałów skokowych przesuniętych w czasie.

¹ Uporządkowany skrypt pomaga kontrolować poprawność wartości parametrów w kolejnych symulacjach, np. łatwiej zauważyć błąd w krótkim skrypcie niż przez przeglądanie parametrów w blokach na schemacie.

Dodac rysunek (suma skoków), Nie za długi, bo odpowiedzi jak reakcje na podwójny skok, Nie za krótki bo problemy obliczeniowe.

Poprawnie wykonane symulacje generują identyczne wykresy jak te narysowane na podstawie rozwiązań analitycznych (na przykład dla układów 1. i 2. rzędu - r. 4.2.2), z tym, że na podstawie symulacji można narysować jedynie pełne rozwiązanie (nie można wyodrębnić poszczególnych składników rozwiązania).

5.2.4. Automatyizacja badań – uruchamianie symulacji w trybie wsadowym

Realizacja programu badań za pomocą skryptów zapewnia dokumentację badań (przyjętych założeń, wartości parametrów). W połączeniu z elementami programowania (pętle, instrukcje warunkowe) pozwala zautomatyzować powtarzające się operacje, na przykład uruchamianie symulacji dla różnych zestawów parametrów i zbiorczą prezentację wyników. Dotyczy to również modeli zapisanych na schematach, ponieważ zarówno Matlab jak i Scilab oferują możliwość uruchamiania symulacji w trybie wsadowym (Tab. 5-3).

Tab. 5-3. Funkcje do uruchamiania symulacji w trybie wsadowym

| | Matlab/Simulink | Scilab/Xcos |
|------------------------|------------------|-----------------------------------|
| Uruchomienie symulacji | Sim | xcos_simulate |
| Funkcje skojarzone | simget simset | loadXcosLibs importXcosDiagram |

Programy symulacyjne wykazują duże różnice w sposobie realizacji tego zadania ze względu na zestaw funkcji i ich działanie. Fragmenty skryptów w Tab. 5-4 zawierają przykład pętli, która uruchamia symulacje dla schematu równania różniczkowego zapisanego w pliku „model”. Zakłada się, że zmienna a jest parametrem modelu, natomiast x_1 i x_2 są zmiennymi w blokach zbierania danych umieszczonych na schemacie. Efektem działania są wykresy przebiegów czasowych zmiennej x_1 i x_2 na oddzielnych rysunkach i w różnych kolorach. Dodac rysunek?

Tab. 5-4. Przykład skryptu z uruchamianiem symulacji

| Matlab | Scilab |
|--|--|
| <pre>f1=figure; hold on; grid on; f2=figure; hold on; grid on; kolor='rgb'; tab_a=[0, 1, 5]; for i=1:3 a=tab_a(i); [t]=sim('model'); figure(f1); plot(t, x1,kolor(i)); figure(f2); plot(t, x2,kolor(i)); end</pre> | <pre>loadXcosLibs(); importXcosDiagram('model.xcos'); //tworzy scs_m n1=figure(); set(gca(), 'auto_clear', 'off'); set(gca(), 'grid', [1,1]); n2=figure(); set(gca(), 'auto_clear', 'off'); set(gca(), 'grid', [1,1]); kolor=['r', 'g', 'b']; tab_a=[0, 1, 5]; for i=1:3 a=tab_a(i); scicos_simulate(scs_m); figure(n1); plot(x1.time, x1.values, kolor(i)); figure(n2); plot(x2.time, x2.values, kolor(i)); end</pre> |

W skrypcie Matlabu wykorzystano fakt, że funkcja uruchamiająca symulację (`sim`) ma możliwość zwracania wartości, między innymi wektora czasu, który został podstawiony pod zmienną t i wykorzystany w funkcji `plot`. W tej sytuacji zmienne x_1 i x_2 rejestrowane przez bloki zbierania danych (To workspace) mogą zamiast struktury mieć postać prostego wektora (opcja Matrix). Scilab nie udostępnia takich opcji – dane w bloku zbierania danych (`TOWS_c`) zawsze mają postać struktury.

Matlab i Scilab różnią się dość znacznie w sposobie zmiany parametrów obliczeniowych, takich jak czas symulacji, wybór i parametry algorytmu całkowania. Są one przechowywane w pliku ze schematem i mogą być zadawane podczas edycji schematu. W trybie wsadowym można jednak uruchomić symulację z innymi parametrami niż te zapamiętane ze schematem. Często dotyczy to czasu symulacji – w Matlabie podaje się go jako parametr funkcji `sim`, a w Scilabie zmienia się element w strukturze `scs_m`, tworzącej się automatycznie po wczytaniu schematu za pomocą funkcji `importXcosDiagram`.

5.2.5. Całkowanie i różniczkowanie

Podstawowe informacje o całkowaniu numerycznym. Błędy całkowania i różniczkowania

O unikaniu różniczkowania (do zrobienia impulsu, gdy występuje pochodna wymuszenia, do różniczkowania odpowiedzi skokowej).

5.3. Przykłady zastosowanie symulacji

Te same przykłady, które rozwiązano analitycznie - rysowanie bez stosowania sprowadzania do ogólnych postaci (możliwość popełnienia błędu)

Przykłady badań:

- porównanie reakcji obiektu na takie samo zakłócenie w różnych punktach pracy

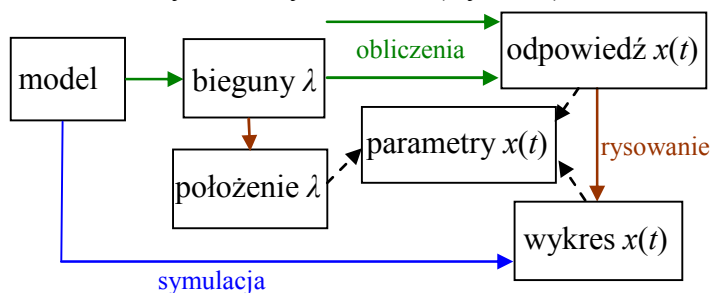
IV. Analiza i projektowanie układów liniowych

6. Własności obiektów liniowych (liniowe n-tego rzędu)

Podsumowanie pojęć, Uogólnienie 6 i 7 dla rzędu > 2. Zastosowanie do fizycznych obiektów

6.1. Podstawowe badania – charakterystyka statyczna i odpowiedzi czasowe

Równania różniczkowe stosowane do opisu dynamiki układów fizycznych (obiektów/procesów technologicznych) wynikają z podstawowych praw fizyki (r. 1.3). Jest to ogólna forma modelu obiektu (układu), która zawiera pełny opis własności statycznych i dynamicznych. Mogą to być równania zarówno liniowe, jak i nieliniowe, przy czym zazwyczaj nieliniowość dotyczy części statycznej. Badania własności (charakterystyk) statycznych są wykonywane dla modeli liniowych i nieliniowych (r. 3), podobnie jak symulacyjnie badania dynamiki (r. 5, 10). Natomiast możliwość zastosowania analitycznych badań dynamiki jest ograniczona praktycznie do wyniku równań liniowych (r. 1.4). W przypadku równań nieliniowych stosuje się różne metody upraszczania opisu (np. dodatkowe założenia, linearyzacja), tak aby otrzymać uproszczone (zlinearyzowane) równania liniowe, co pozwala wykorzystywać różne metody analityczne, takie jak położenie biegunów i odpowiedzi czasowe na wybrane wymuszenia (Rys. 6-1).



Rys. 6-1. Podstawowa analiza dynamiki układów liniowych

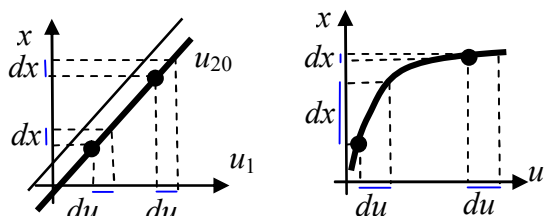
Jeśli równanie różniczkowe jest liniowe (lub zlinearyzowane), to można obliczyć rozwiązanie analityczne, czyli funkcję $x(t)$, choć zazwyczaj nie jest to konieczne, a poza tym funkcja $x(t)$ nawet dla układów liniowych jest dość złożona, zwłaszcza gdy układ ten jest wyższego rzędu i ma zespolone lub wielokrotne bieguny (zał?). Zazwyczaj celem badań realizowanych na potrzeby automatyki nie jest wyprowadzenie wzoru na odpowiedź układu, tylko wyznaczenie parametrów tej odpowiedzi, które pozwalają porównywać własności różnych układów lub projektować układy o zadanych parametrach. Parametry te można wyznaczyć z wykresów $x(t)$, ale można też obliczyć na podstawie położenia biegunów.

6.2. Parametry dynamiki

6.2.1. Stan i punkt równowagi oraz wzmocnienie układu

Stan równowagi w przypadku układu liniowego oznacza stan po zaniku składowej swobodnej (przejściowej), gdy w rozwiązaniu zostaje tylko składowa wymuszona (ustalona). Na podstawie rozwiązań równań różniczkowych można stwierdzić, że jeśli na wejście układu liniowego podawane jest stałe wymuszenie, to w stanie równowagi na wyjściu też jest stała wartość - **punkt równowagi** (r. 4.2, 9.2), a jeśli na wejście układu liniowego podawany jest sygnał sinusoidalny, to w stanie równowagi na wyjściu też jest sygnał sinusoidalny (r. 13). Zastosowanie punktu równowagi w badaniach dynamiki występuje podczas wyznaczenia i analizy charakterystyk statycznych (r. 3.1) oraz podczas wyznaczenia i analizy reakcji obiektu na wymuszenia skokowe i impulsowe (r. 4.2, 5.2).

Charakterystyki statyczne pozwalają często stwierdzić liniowość lub nieliniowość modelu, ponieważ nieliniowość w modelach procesów technologicznych dotyczy zazwyczaj części statycznej. Na podstawie tych charakterystyk wyznacza się **wzmocnienia układu** (k_{ukl}) pomiędzy poszczególnymi wyjściami i wejściami. Wzmocnienie układu odpowiada nachyleniu danej charakterystyki statycznej (Rys. 6-2) i jest wyznaczone na podstawie przyrostów:



Rys. 6-2. Wzmocnienie układu liniowego i nieliniowego

$$k_{ukl} = dx/du \quad (6-1)$$

W układach liniowych wzmocnienie jest stałe w całym zakresie pracy. W układach nieliniowych wzmocnienie układu zależy od punktu pracy (punktu równowagi)¹.

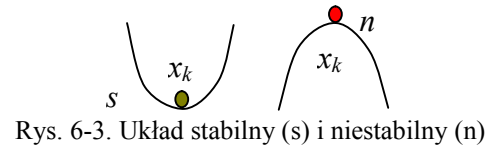
¹ dotyczy to punktów pracy ustalonych przez zmianę wartości zmiennych wejściowych występujących w nieliniowych funkcjach, np. w równaniu $x = au_1 + b(u_2)^2$ zmienna u_1 wpływa na punkt pracy liniowo, a zmienna u_2 - nieliniowo

Ustalenie punktu równowagi jest konieczne podczas wyznaczania reakcji układu na wymuszenia skokowe i impulsowe - badania te wymagają aby zmianą układ znajdował się w stanie równowagi przed skokową/impulsową. Nieliniowość modelu, w tym nieliniowość charakterystyk statycznych, powoduje, że reakcja układu na taką samą zmianę du zależy od punktu pracy.

6.2.2. Stabilność

Podstawą własnością dynamiki jest stabilność układów (obiektów). Praktyczne znaczenie tej własności powoduje, że formułowane są różne definicje stabilności. Jedną z podstawowych definicji (r. 1.2) opiera się na zachowaniu układu przy stałym wymuszeniu (Rys. 6-3):

- **układ stabilny** przy stałym wymuszeniu (u_k) dąży do punktu równowagi (x_k),
- **układ niestabilny** trwa w punkcie równowagi tylko wówczas, gdy jest to jego stan początkowy – najmniejsze zakłócenie powoduje trwałe oddalenie od tego punktu.



Jeśli stabilność/niestabilność nie zależy od warunków początkowych, to mówimy o **stabilności/niestabilności globalnej**, a jeśli występuje tylko dla warunków początkowych z pewnego obszaru wokół punktu równowagi to jest to **stabilność/niestabilność lokalna**.

Stabilności nie można stwierdzić na podstawie modelu statycznego - konieczny jest model dynamiki (równanie różniczkowe). To, że układ ma punkt równowagi, nie oznacza, że będzie do niego dążył. Badanie dynamiki układów liniowych i nieliniowych przeprowadza się na podstawie:

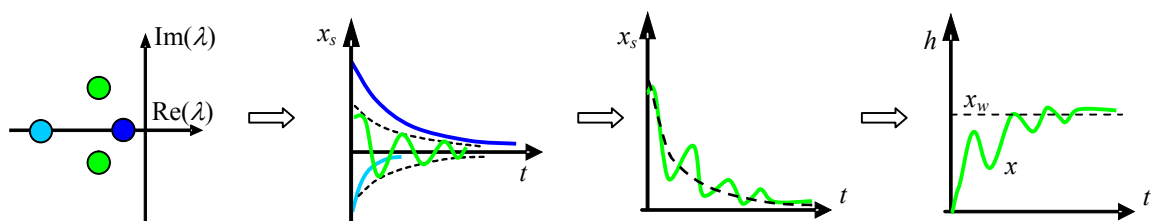
- ewolucji stanu układu od różnych warunków początkowych przy stałym wymuszeniu (w tym też przy braku wymuszenia),
- reakcji na wymuszenia skokowe i impulsowe podawane w stanie w stanie równowagi.

Stabilność układu oznacza, że końcowym stanem w tych badaniach jest stan równowagi.

Stabilność układów liniowych jest prosta do zbadania, ponieważ nie zależy ani od warunków początkowych, ani od wymuszenia (a więc także od punktu pracy i wielkości skoku). Jeśli układ liniowy jest stabilny, to jest stabilny globalnie, a jeśli jest niestabilny, to jest niestabilny globalnie. W badaniu stabilności układów liniowych wykorzystuje się charakterystyczne cechy rozwiązania $x(t)$ równania różniczkowego (r. 1.4.2, 4.2.1, 9.2.2), które zawiera zawsze dwie składowe:

- składową swobodną $x_s(t)$, która nie zależy od wymuszenia (sygnału wejściowego) a jedynie od własności (parametrów) samego układu – **składowa $x_s(t)$ decyduje o stabilności układu**,
- składową wymuszoną $x_w(t)$, która zależy zarówno od wymuszenia, jak i od własności układu – **składowa $x_w(t)$ opisuje zachowanie układu w stanie równowagi**.

Z własności rozwiązania wynikają różne **kryteria (warunki) stabilności** układu liniowego (Rys. 6-4).



Rys. 6-4. Przykładowe wykresy układu stabilnego

Układ liniowy jest stabilny (osiąga stan równowagi), jeśli:

- 1° wszystkie bieguny układu (pierwiastki równania charakterystycznego) leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej (mają ujemną część rzeczywistą),
- 2° każdy ze składników rozwiązania swobodnego $x_s(t)$ zanika z czasem,
- 3° rozwiązanie swobodne $x_s(t)$ zanika z czasem do zera - zostaje tylko rozwiązanie wymuszone
- 4° przy braku wymuszenia samoistnie wraca do stanu równowagi,
- 5° odpowiedź impulsowa zanika z czasem do zera.

Są to **kryteria** określające klasyczną **stabilność w sensie Lapunowa**¹. Kryteriów tych nie spełniają bieguny, które leżą na osi Im , ponieważ powodują, że składowa swobodna nie zanika do zera (choć też nie ucieka nie $\pm\infty$). W monografii pojęcie stabilność oznacza domyślnie stabilność w sensie Lapunowa, natomiast układ, który posiada bieguny lewej półpłaszczyźnie ($Re(\lambda) < 0$) oraz biegun/bieguny na osi Im ($Re(\lambda) = 0$) jest nazywany układem **na granicy stabilności**. W praktyce

¹ Formalne definicje w zał.A.4.1

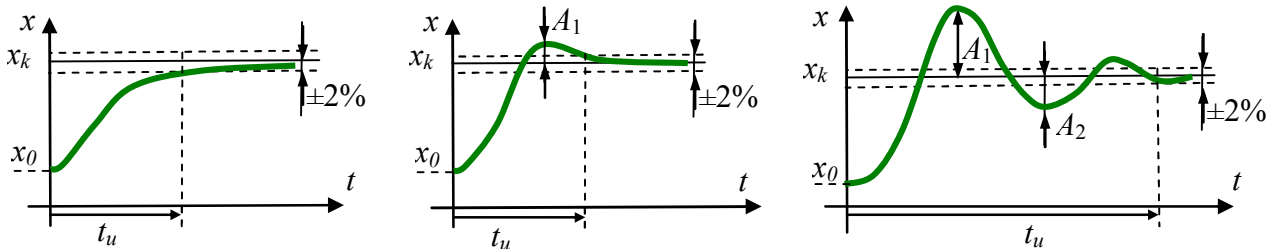
inżynierskiej stosowane jest także pojęcie **stabilności w sensie BIBO¹** - układ jest stabilny, jeśli na ograniczone wymuszenie $u(t)$ (np. stałe, skokowe, impulsowe, sinusoidalne) reaguje ograniczonym sygnałem wyjściowym $x(t)$. Jest to „słabsza” wersja stabilności, ponieważ obejmuje także przypadki graniczne (bieguny na osi Im). **Rysunek?**

Z własności układu liniowego wynika, że symulacyjne badanie stabilności takiego układu można ograniczyć do zbadania reakcji na wymuszenie skokowe (impulsowe) w dowolnym punkcie pracy.

Stabilność układów nieliniowych jest trudna do badania i analitycznie, i symulacyjnie, ponieważ może zależeć zarówno od warunków początkowych, jak i od wymuszenia - układy nieliniowe mogą być stabilne (niestabilne) globalnie lub lokalnie. Analityczne badanie stabilności układów nieliniowych można sprowadzić do badania stabilności układów zlinearyzowanych (r. ...).

6.2.3. Czas ustalania (stabilizacji) i oscylacyjność

Jeśli układ jest stabilny (osiąga stan równowagi), to kolejnymi parametrami opisującymi dynamikę układu jest czas ustalania odpowiedzi oraz wielkość oscylacji. Parametry te są często stosowane w automatyce i pełnią rolę wskaźników jakości. Są one definiowane na podstawie przebiegów przejściowych, na przykład odpowiedzi układu na skokową zmianę wymuszenia (Rys. 6-5).



Rys. 6-5. Parametry przebiegów aperiodycznych i oscylacyjnych

Odpowiedź stabilnego układu ustala się, gdy składowa swobodna x_s zanika do zera, a więc dla $t \rightarrow \infty$. W praktyce przyjmuje się pewną granicę wartości poniżej której x_s nie ma właściwie znaczenia. Na wykresie odpowiedzi skokowej odpowiada to założeniu pewnego przedziału wartości wokół stanu ustalonego x_w , na przykład $\pm 2\%$ zmiany wartości wyjściowej ($x_k - x_0$). **Czas ustalania odpowiedzi** (t_u) wyznaczany na podstawie odpowiedzi na wymuszenie skokowe, to czas od momentu podania wymuszenia skokowego do czasu, gdy odpowiedź pierwszy raz wejdzie w założony obszar wokół wartości x_k i już go nie przekroczy.

Jeśli w odpowiedzi stabilnego układu nie występują oscylacje (przeregulowania, drgania), to mówimy o przebiegu **aperiodycznym** (stabilności asymptotycznej). Wielkość oscylacji (przeregulowania) w reakcjach układu mierzona jako bezwzględna **wielkość amplitudy** (A_1, A_2) jest zazwyczaj przeliczana na wartości względne:

$$A_{\%} = \frac{A_1 \cdot 100\%}{x_k - x_0} \text{ lub } A_{\%} = \frac{A_1 \cdot 100\%}{x_k} \quad (6-2)$$

W badaniach dynamiki zalecane jest odniesienie amplitudy do zmiany wartości wyjściowej ($x_k - x_0$), co pozwala porównywać układy o różnych zakresach pracy². Poza wielkością oscylacji określa się też **szybkość tłumienia oscylacji**, obliczany jako stosunek kolejnych amplitud (oscylacyjność) $\mu = A_{i+1} / A_i$.

Czas ustalania i wielkość oscylacji są definiowane na podstawie odpowiedzi $x(t)$ układu, ale można je też wyznaczyć bez wykresu czy wzoru funkcji $x(t)$ - jedynie na podstawie biegunów układu, które decydują o składnikach rozwiązania swobodnego (r.4.3). Każdy z ujemnych biegunów λ_i wprowadza do rozwiązania x_s funkcję x_{si} typu $Ae^{\alpha t}$, gdzie $\alpha = \text{Re}(\lambda_i)$. Załóżmy, że wartość tej funkcji w chwili $t = t_u$ zmniejszyła się do poziomu p wartości początkowej:

$$x_{si}(t_u) = p \cdot x_{si}(0) \rightarrow Ae^{\alpha t_u} = pA \rightarrow t_u = \frac{\ln p}{\alpha} \quad (6-3)$$

W praktyce stosuje się przybliżone wartości $\ln p$, na przykład:

- dla $p=2\% \rightarrow \ln p = -3.912 \dots \approx -4$,
- dla $p=1\% \rightarrow \ln p = -4.6052 \dots \approx -4.6$.

¹ ang. Bounded Input Bounded Output

² np. amplituda $A_1 = 0.1^\circ\text{C}$ przy zmianie o $dx = 1^\circ$ jest taką samą wielkością przy zakresie pracy $0 \div 40^\circ\text{C}$ i $-20 \div 20^\circ\text{C}$

Dla każdego bieguna λ_i układu można oszacować:

- odległość bieguna od osi urojonej, czyli $|\operatorname{Re}(\lambda_i)|$ decyduje o czasie zaniku składowej swobodnej t_u :

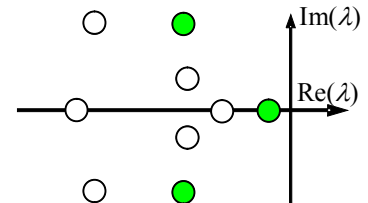
$$|\operatorname{Re}(\lambda_i)| = 4/t_u \quad (6-4)$$

- oscylacyjność μ wyznacza szybkość tłumienia kolejnych oscylacji (zanikania drgań):

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = e^{-2\pi/\mu}, \text{ gdzie } \mu = \left| \frac{\operatorname{Im}(\lambda_i)}{\operatorname{Re}(\lambda_i)} \right| \quad \text{rysunek?} \quad (6-5)$$

Własności całego stabilnego układu (wszystkie bieguny w lewej półpłaszczyźnie) określa się na podstawie najbardziej istotnych biegunów (Rys. 6-6) w następujący sposób:

- **stopień stabilności układu** = $\min|\operatorname{Re}(\lambda_k)|$ - ujemny biegun najbliższy osi Im decyduje o stabilności i o czasie ustalania odpowiedzi t_u ,
- **stopień oscylacyjności układu** = $\max|\operatorname{Im}(\lambda_k) / \operatorname{Re}(\lambda_k)|$ - o wielkości i szybkości oscylacji nie decyduje największa bezwzględna wartość części urojonej, ale biegun, który ma największy stosunek części urojonej do rzeczywistej.



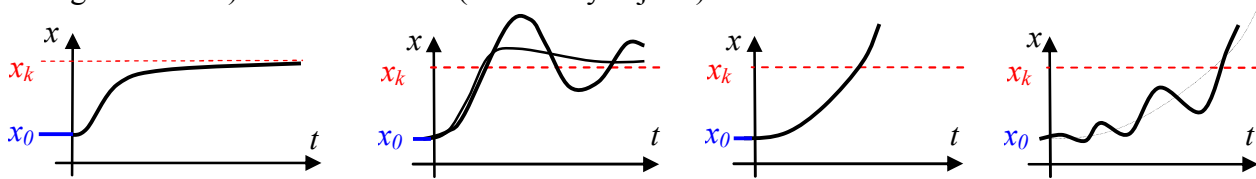
Rys. 6-6. Najbardziej istotne bieguny układu

Układ jest stabilny asymptotycznie, jeśli wszystkie jego bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie i nie ma wśród nich biegunów zespolonych ~~oraz wielokrotnych~~. Patrz Rosołowki - wyjaśnić? (dla $\Delta=0$ nie ma oscylacji)
 Przykład: Pokazać, że czas T_u i oscylacyjność nie zależą od wielkości skoku

7. Analiza i projektowanie modeli pierwszego i drugiego rzędu

7.1. Wprowadzenie – znaczenie i zastosowanie modeli pierwszego i drugiego rzędu

Na podstawie rozwiązania liniowych równań różniczkowych (r. 1.4) można wnioskować, że własności dynamiki układów wyższego rzędu wynikają z własności układów pierwszego i drugiego rzędu¹. Szczególną rolę w badaniach dynamiki odgrywają liniowe modele dynamiki drugiego rzędu, ponieważ układ drugiego rzędu jest to **najprostszy model, który może reprezentować prawie wszystkie przypadki reakcji układu**. Na wykresach poniżej (Rys. 7-1) przedstawiono możliwe typy odpowiedzi na wymuszenie skokowe w zadanym punkcie pracy: stabilna aperiodyczna i oscylacyjna (z przeregulowaniem) oraz niestabilne (bez/z oscylacjami).



Rys. 7-1. Typy odpowiedzi skokowych układu drugiego rzędu

Modele drugiego rzędu stosuje się powszechnie do opracowywania różnych metod badania i projektowania obiektów czy układów automatyki, ponieważ:

- ich własności dynamiczne nie zależą od punktu pracy i wymuszenia,
- są na tyle proste by wykonać badania analityczne, które łatwiej jest uogólnić niż badania doświadczalne (symulacyjne),
- mogą opisać każdy typ reakcji - stabilny i niestabilny, z oscylacjami lub bez nich.

Jeśli więc dysponujemy liniowym modelem układu drugiego rzędu, to dostępnych jest wiele metod przeznaczonych do stosowania w praktyce inżynierskiej. Tak prosty opis można uzyskać poprzez:

- odpowiedni zestaw założeń upraszczających model na etapie konstrukcji (r. 1.3),
- ograniczenie analizy do najbardziej istotnych biegunów (Rys. 6-6),
- zastosowanie metod upraszczania modeli przez obniżanie rzędu modelu (r. 20).

Zastosowanie prostego modelu pozwala z jednej strony analizować własności obiektu o określonych wartościach parametrów, a z drugiej pomaga dobierać wartości parametrów tak, aby uzyskać określone własności obiektu, czyli zaprojektować obiekt lub poprawić jego własności.

7.2. Analiza i projektowanie układu drugiego rzędu na podstawie biegunów

7.2.1. Własności równań drugiego rzędu

Podstawowy sposób analizowania i projektowania własności dynamicznych równania drugiego rzędu typu:

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u(t) \quad (7-1)$$

polega na analizie równania charakterystycznego:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (7-2)$$

za pomocą klasycznej metody wyznaczenia wyróżnika Δ i pierwiastków $\lambda_{1,2}$ (przy założeniu, że $a_2 \neq 0$):

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2} \quad (7-3)$$

Na tej podstawie można określić wszystkie możliwe przypadki rozwiązania swobodnego równania drugiego rzędu (Tab. 7-1).

Tab. 7-1. Rozwiązania liniowego równania drugiego rzędu (7-1, $a_2 \neq 0$)

| Przypadek | Biegunki: $\lambda_1 = \alpha + j\omega_r, \lambda_2 = \alpha - j\omega_r$ | Rozwiązanie swobodne |
|--------------|---|--|
| $\Delta > 0$ | $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = (-a_1 \pm \sqrt{\Delta}) / (2a_2), \text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$ | $A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$ |
| $\Delta = 0$ | $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -a_1 / (2a_2), \text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$ | $A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 t e^{\lambda_1 t}$ |
| $\Delta < 0$ | $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -a_1 / (2a_2), \text{Im}(\lambda_{1,2}) = \sqrt{-\Delta} / (2a_2) \neq 0$ | $A e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi)$, gdzie |

Powyższa tabela może być podstawą do sformułowania warunków projektowych, jakie powinny spełniać współczynniki równania (7-1), aby zapewnić stabilność układu:

¹ Pewien wpływ ma krotność biegunów (czy tu?)

1° Jeśli $\Delta > 0$, to bieguny układu są rzeczywiste (reakcja bez oscylacji) i warunkiem stabilności jest spełnienie obu nierówności:

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \wedge \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \quad (7-4)$$

2° Jeśli $\Delta = 0$, to układ ma podwójny biegun rzeczywisty (reakcja bez oscylacji), a stabilność wynika ze spełnienia warunku:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_2} < 0 \quad (7-5)$$

3° Jeśli $\Delta < 0$, to układ ma parę biegunów zespolonych (reakcja z oscylacjami), więc warunkiem stabilności jest:

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} < 0 \quad (7-6)$$

Warunek $a_2 \neq 0$ zapewnia, że równanie (7-1) jest drugiego rzędu i można zastosować wzory (7-3). Wśród różnych wariantów tego równania można wyróżnić szczególne przypadki dla zerowych parametrów a_0 i a_1 .

- Dla $a_0 = 0$ - równanie jest rzędu drugiego $a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) = u_1(t)$, z dodatnim wyróżnikiem ($\Delta = a_1^2 > 0$) i można obliczyć bieguny na podstawie (7-3) lub zastosować proste przekształcenie:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda = \lambda(a_2 \lambda + a_1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = \frac{-a_1}{a_2}, \quad (7-7)$$

Charakterystyczną cechą tego przypadku jest biegun zerowy (λ_1), co oznacza że w odpowiedzi układu zawsze występuje składnik o stałej wartości (Ae^{0t}). Tym samym, w najlepszym przypadku, układ znajduje się na granicy stabilności, o ile drugi biegun $\lambda_2 < 0$ (a_1 i a_2 są tego samego znaku).

- Dla $a_1 = 0$ - równanie jest rzędu drugiego $a_2 \ddot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t)$, a na podstawie (7-3) otrzymujemy:

$$a_2 \lambda^2 + a_0 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-a_0}{a_2}}, \quad (7-8)$$

Jeśli parametry a_0 i a_1 są tego samego znaku, to układ zawsze ma parę biegunów urojonych ($\Delta < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = 0$) i w odpowiedzi pojawią się niegasnące oscylacje (układ na granicy stabilności). Natomiast gdy znaki a_0 i a_1 są przeciwne, to układ zawsze ma dwa bieguny rzeczywiste ($\Delta > 0$) – jeden dodatni i jeden ujemny (układ niestabilny).

Podsumowanie wszystkich przypadków (7-4)÷(7-8) przedstawiono w tabeli Tab. 7-2.

Tab. 7-2. Przypadki liniowego równania drugiego rzędu (7-1) dla różnych wartości parametrów (a_0 , a_1 i a_2). Spr

| Oscylacje | bez oscylacji | | | z oscylacjami | | |
|--|--------------------------------|--|--|--------------------------------|--------------------------------|--|
| | $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ | | | $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ | $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ | |
| $a_2 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_0 \neq 0$ | | | | | | |
| $a_2 \neq 0$, $a_1 = 0$, | | | | | | |
| $a_2 \neq 0$, $a_0 = 0$ | | | | | | |

Tabela pokazuje, że nawet proste stwierdzenie wyzerowania określonych parametrów (a_0 , a_1 i a_2) pozwala wnioskować o możliwych własnościach układu. W przypadku gdy wszystkie parametry a_2 , a_1 i a_0 są różne od zera i są tego samego znaku, do badania stabilności równania można wykorzystać także kryterium Hurwitza lub Routha (r. 1.3.1). Dokładniejszy wpływ poszczególnych parametrów równania na położenie biegunów (charakter rozwiązania) można przedstawić za pomocą tak zwanych linii pierwiastkowych, które ilustrują zmianę położenia biegunów w zależności od wybranego

parametru układu¹. Dodać linie pierwiastkowe dla poszczególnych parametrów. Na tej podstawie można stwierdzić czy zmiana parametru spowodować utratę stabilności lub pojawienie się oscylacji.

7.2.2. Projektowanie własności dynamicznych za pomocą analizy biegunów

Analizując wyrażenia (7-3) można nie tylko badać (lub przewidywać) własności istniejących obiektów, ale także projektować własności nowych układów – dobierać parametry (wymiary, materiały, ...) elementów, tak aby układ wykazywał określone własności (stabilność, oscylacyjność). Na przykład zakładając (znając) dwa z trzech parametrów (a_0 , a_1 i a_2) równania (7-1) można wyznaczyć przedział wartości nieznanego parametru tak, aby układ był stabilny/niestabilny i/lub żeby w reakcji układu występowały lub nie oscylacje (Tab. 7-3).

Tab. 7-3. Projektowanie własności liniowego równania drugiego rzędu ($a_2 \neq 0$)

| Stabilność | Oscylacje | bez oscylacji | z oscylacjami |
|------------------------|---|--|---|
| | Warunki | $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0 \rightarrow \text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$ | |
| Stabilny | $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ \wedge $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ | $\text{Re}(\rho_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \wedge \text{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0$ | $\text{Re}(\rho_1) = \text{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1}{2a_2} < 0$ |
| na granicy stabilności | $\text{Re}(\lambda_1) = 0$ \wedge $\text{Re}(\lambda_2) \leq 0$ | $\text{Re}(\lambda_1) = 0 \wedge \text{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1}{a_2} \leq 0$ | $\text{Re}(\rho_1) = \text{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1}{2a_2} = 0$ |
| Niestabilny | $\text{Re}(\lambda_1) = 0$ \wedge $\text{Re}(\lambda_2) > 0$ | $\text{Re}(\lambda_1) = 0 \wedge \text{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1}{a_2} > 0$ | |
| | $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ \vee $\text{Re}(\lambda_2) > 0$ | $\text{Re}(\rho_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} > 0 \vee \text{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} > 0$ | $\text{Re}(\rho_1) = \text{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1}{2a_2} > 0$ |

Tabela opisuje wszystkie przypadki, gdy $a_2 \neq 0$ (równanie jest drugiego rzędu). Uzupełnieniem możliwości są przypadki, gdy $a_2 = 0$, a więc:

- $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ i $a_0 \neq 0$ - układ jest pierwszego rzędu $a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$ z jednym biegunem, a więc bez możliwości oscylacji, stabilny lub niestabilny zależnie od znaku $\lambda = -a_0/a_1$,
- $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ i $a_0 = 0$ - układ jest pierwszego rzędu $a_1 \dot{x}(t) = b_0 u(t)$ z zerowym biegunem, czyli na granicy stabilności, bez oscylacji,
- $a_2 = 0$, $a_1 = 0$ i $a_0 \neq 0$, to otrzymujemy model statyczny, uznawany za układ stabilny.

Poniżej przedstawiono przykłady sformułowania prostych zadań projektowych dla modelu (7-1).

1° W odpowiedzi układu nie występują oscylacje (układ stabilny lub niestabilny):

warunek 1: $a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$

układ 2.rzędu, bieguny rzeczywiste

lub 2: $a_2 = 0$

układ \leq 1.rzędu

2° Projektowany układ jest stabilny (z oscylacjami lub bez),

warunek 1: $a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$

układ 2.rzędu, bieguny rzeczywiste

$$\wedge \left(\text{Re}(\rho_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \wedge \text{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \right)$$

oba bieguny po lewej

lub 2: $a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$

układ 2.rzędu, bieguny zespolone

$$\wedge \left(\text{Re}(\rho_1) = \text{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1}{2a_2} < 0 \right)$$

oba bieguny po lewej

lub 3: $a_2 = 0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 < 0$

układ 1.rzędu, biegun po lewej

lub 4: $a_2 = 0 \wedge a_1 = 0$

układ statyczny

3° Układ dochodzi do stanu równowagi bez przeregulowań (jest stabilny aperiodycznie):

warunek 1: $a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$

układ 2.rzędu, bieguny rzeczywiste

¹ Patrz: linie pierwiastkowe, metoda Evansa (np. [1]). W zasadzie jest to metoda przeznaczona do projektowania układów sterowania, ale można ją rozszerzyć na dowolny liniowy obiekt

$$\wedge \left(\operatorname{Re}(\rho_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \wedge \operatorname{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \right) \quad \text{oba bieguny po lewej}$$

$$\text{lub 2: } a_2=0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 < 0$$

układ 1.rzędu, biegun po lewej

$$\text{lub 3: } a_2 = a_1 = 0$$

układ statyczny

4° Po zakłóceniu układ nie oscyluje, ale też nie osiąga stanu równowagi:

$$\text{warunek 1: } a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$$

układ 2.rzędu, bieguny rzeczywiste

$$\wedge \left(\operatorname{Re}(\rho_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} \geq 0 \vee \operatorname{Re}(\rho_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} \geq 0 \right) \quad \text{choć 1 biegun nie po lewej}$$

$$\text{lub 2: } a_2=0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 \geq 0$$

układ 1.rzędu, biegun nie po lewej

W bardziej złożonych zadaniach projektowych można wymagać nie tylko stabilności układu (bieguny o ujemnej części rzeczywistej), ale także określonego czasu ustalania odpowiedzi czy szybkości tłumienia oscylacji.

5° Układ ma mieć czas ustalania mniejszy niż T_{uzad} - na podstawie zależności (6-4) oznacza to, że oba bieguny muszą spełniać nierówność

$$|\operatorname{Re}(\rho_i)| \geq 4/T_{uzad} \quad (7-9)$$

6° Każda następna amplituda oscylacji ma być przynajmniej p razy mniejsza od poprzedniej ($A_2 \leq A_1/p$) – na podstawie (6-5) można to wymaganie przeliczyć na warunek:

$$\frac{1}{p} \leq e^{-2\pi/\mu} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{-2\pi}{\mu} \rightarrow \ln p \leq \frac{2\pi}{\mu} \rightarrow \mu \leq \frac{2\pi}{\ln p} \rightarrow \operatorname{Im}(\rho) \leq \frac{2\pi \operatorname{Re}(\rho)}{\ln p} \quad (7-10)$$

Wymagania projektowe mogą obejmować również parametry statyczne, na przykład:

7° Odpowiedź skokowa układu stabilizuje się na poziomie x_w :

$$\text{warunek 1: dobrać } a_0 \text{ i } b_0 \text{ tak aby } a_0 x_w = b_0,$$

równanie statyczne dla $u=1$,

oraz 2: dobrać a_2 i a_1 tak by układ był stabilny.

Projektowanie polega na sformułowaniu odpowiedniego układu nierówności i poprawnym jego rozwiązaniu. Schematy rozwiązań przykładowych przedstawiono w załączniku C.1 (lista2).

Gdzie o poprawności biegunów: W przypadku układów drugiego rzędu sprawdzenie poprawności:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \leftrightarrow \quad a_2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = a_2 (\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2) \quad (7-11)$$

Stąd wynikają wzory Viéte'a dla wielomianu drugiego stopnia:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{oraz} \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{a_0}{a_2} \quad (7-12)$$

Dodać. Zastosowanie wzorów Viéte'a do projektowania (dobory parametrów) – kiedy i jak.

Wzory (1-7) są prawdziwe ($a_n \neq 0$) można wykorzystać jako narzędzie pomocnicze przy analizowaniu pierwiastków, podobnie jak wzory skróconego mnożenia. Zespolone i rzeczywiste

7.3. Równania oscylacyjne i komplementarne

7.3.1. Własności i parametry równania oscylacyjnego

Najbardziej charakterystyczną postacią modelu drugiego rzędu (7-1) jest **równanie oscylacyjne** zapisywane w postaci:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \quad \omega_n > 0 \quad (7-13)$$

gdzie: ζ - współczynnik tłumienia, ω_n – pulsacja układu ($\omega_n = 2\pi f_n$, gdzie f_n to częstotliwość drgań własnych nietłumionych). Założenie o dodatniej wartości pulsacji ω_n wynika z fizycznej interpretacji tego parametru (r. 7.3.4), a poza tym zapewnia, że znak współczynnika $2\zeta\omega_n$ zależy tylko i wyłącznie od znaku tłumienia ζ . Bieguny układu wyznaczone na podstawie równania charakterystycznego mają postać:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ \lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases} \quad (7-14)$$

Analizując wzory (7-14) można wykazać, że równanie oscylacyjne może mieć parę biegunów rzeczywistych lub zespolonych, leżących w lewej lub prawej półpłaszczyźnie zespolonej, a tym samym jego rozwiązanie może być aperiodyczne lub oscylacyjne, stabilne lub niestabilne. Ponieważ $\omega_n > 0$, więc typ biegunów i stabilność układu zależy jedynie od tłumienia ξ .

1° Jeśli $\xi^2 \geq 1$, to oba pierwiastki są rzeczywiste (reakcje bez oscylacji):

$$\text{Re}(\lambda_1) = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}), \text{Im}(\lambda_1) = 0 \text{ oraz } \text{Re}(\lambda_2) = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}), \text{Im}(\lambda_2) = 0.$$

Ponieważ pulsacja $\omega_n > 0$, to znak pierwiastków zależy od wyrażeń: $-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$ i $-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}$.

• Dla $\xi > 1$ układ jest stabilny, ponieważ $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ i $\text{Re}(\lambda_2) < 0$

potwierdzenie: $-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} < 0$ $-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} < 0$
 $\sqrt{\xi^2 - 1} < \xi \quad |()^2$ $-(>0) - (>0) < 0 \quad (\rightarrow \text{prawda})$
 $\xi^2 - 1 < \xi^2 \quad (\rightarrow \text{prawda})$

• Dla $\xi = 1$ układ ma podwójny ujemny pierwiastek: $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n < 0$, więc jest stabilny.

• Dla $\xi < -1$ układ jest niestabilny, ponieważ $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ i $\text{Re}(\lambda_2) > 0$

potwierdzenie: $(-\xi) + \sqrt{\xi^2 - 1} > 0$ $(-\xi) - \sqrt{\xi^2 - 1} > 0$
 $(>0) + (>0) > 0 \quad (\rightarrow \text{prawda})$ $(-\xi) > \sqrt{\xi^2 - 1} \quad |()^2$
 $\xi^2 > \xi^2 - 1 \quad (\rightarrow \text{prawda})$

• Dla $\xi = -1$ układ ma podwójny dodatni pierwiastek: $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n > 0$, więc jest niestabilny.

2° Jeśli $\xi^2 < 1$, to pierwiastki są zespolone (reakcje z oscylacjami)

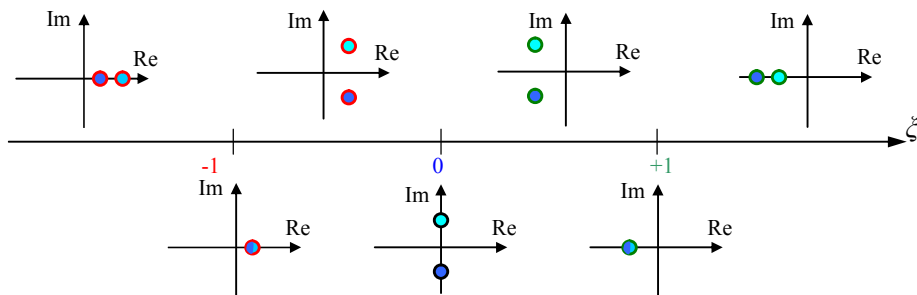
$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = -\xi\omega_n \text{ i } \text{Im}(\lambda_{1,2}) = \pm\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}.$$

• Dla $0 < \xi < 1$ układ jest stabilny, ponieważ część rzeczywista $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$.

• Dla $-1 < \xi < 0$ układ jest niestabilny, ponieważ część rzeczywista $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) > 0$.

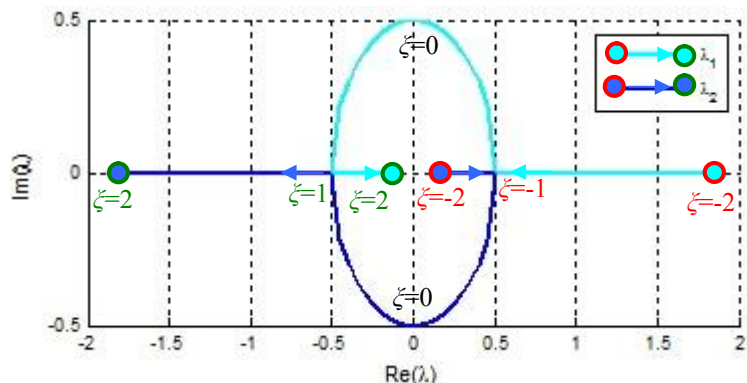
• Dla $\xi = 0$ układ ma parę pierwiastków urojonych: $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_n$, więc znajduje się na granicy stabilności.

Podsumowanie powyższych zależności przedstawiono na Rys. 7-2.



Rys. 7-2. Zależność biegunów układu oscylacyjnego od tłumienia ξ

Wpływ wartości tłumienia ξ na położenie biegunów można również przedstawić w postaci linii pierwiastkowych. Na Rys. 7-3 tłumienie ξ zmienia się w zakresie od wartości -2 (bieguny rzeczywiste dodatnie) do wartości 2 (bieguny rzeczywiste ujemne) - strzałki pokazują kierunek wzrostu ξ .

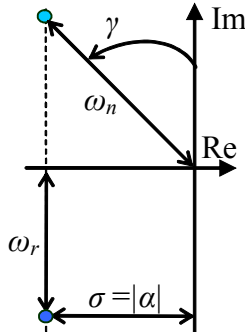


Rys. 7-3. Linie pierwiastkowe dla $-2 \leq \xi \leq 2$ ($\omega_n=0.5$)

Równanie oscylacyjne (7-13) obejmuje przypadki, gdy reakcja zawiera i nie zawiera oscylacje. Jedynie dla ułamkowych wartości tłumienia ($-1 < \xi < 1$) jest to równanie oscylacyjne sensu stricto, to znaczy, że jego rozwiązanie ma charakter oscylacyjny (zawiera składową sinusoidalną), ponieważ bieguny zawierają część rzeczywistą (α) i urojoną (ω_r):

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + j\omega_r = -\sigma + j\omega_r \\ \lambda_2 = \alpha - j\omega_r = -\sigma - j\omega_r \end{cases}, \quad \text{gdzie: } \alpha = -\xi\omega_n, \sigma = |\alpha|, \omega_r = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (7-15)$$

Przedstawiając te bieguny na płaszczyźnie zespolonej (Rys. 7-4) można wykorzystać następujące zależności geometryczne:



Rys. 7-4. Parametry a położenie biegunów układu oscylacyjnego

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2} &= \sqrt{(-\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} = \omega_n, \\ \sin \gamma &= \frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2}} = \frac{\xi\omega_n}{\sqrt{\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}} = \xi, \end{aligned} \quad (7-16)$$

które określają ścisły związek pomiędzy położeniem biegunów ($\alpha \pm j\omega_r$) a parametrami równania oscylacyjnego (ξ, ω_n).

7.3.2. Równania drugiego rzędu komplementarne do równania oscylacyjnego

Nie każde równanie drugiego rzędu można zapisać w postaci równania oscylacyjnego. **Równaniem komplementarnym do oscylacyjnego** jest zapis:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \quad \omega_n > 0 \quad (7-17)$$

Bieguny układu wyznaczone na podstawie równania charakterystycznego mają postać:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 + 1} = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) \\ \lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 + 1} = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 + 1}) \end{cases} \quad (7-18)$$

Ze wzoru (7-18) od razu wynika, że równanie (7-17) ma tylko rzeczywiste bieguny:

$$\text{Re}(\lambda_1) = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}), \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0 \quad \text{oraz} \quad \text{Re}(\lambda_2) = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 + 1}), \quad \text{Im}(\lambda_2) = 0.$$

Ponieważ pulsacja $\omega_n > 0$, to dokładniejsza analiza pokazuje, że niezależnie od wartości tłumienia ξ , jeden biegun jest zawsze ujemny a jeden zawsze dodatni.

- Dla $\xi \geq 0$ układ ma $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ i $\text{Re}(\lambda_2) < 0$.

$$\begin{aligned} \text{potwierdzenie: } -\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} &> 0 & -\xi - \sqrt{\xi^2 + 1} &< 0 \\ \sqrt{\xi^2 + 1} &> \xi \quad (\rightarrow \text{prawda}) & -(>0) - (>0) &< 0 \quad (\rightarrow \text{prawda}) \end{aligned}$$

- Dla $\xi < 0$ układ ma $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ i $\text{Re}(\lambda_2) < 0$.

$$\begin{aligned} \text{potwierdzenie: } (-\xi) + \sqrt{\xi^2 + 1} &> 0 & (-\xi) - \sqrt{\xi^2 + 1} &< 0 \\ (>0) + (>0) &> 0 \quad (\rightarrow \text{prawda}) & (-\xi) < \sqrt{\xi^2 + 1} & (\rightarrow \text{prawda}) \end{aligned}$$

Postać równania oscylacyjnego (7-13) i komplementarnego (7-17) obejmuje warunek $\omega_n > 0$, co wynika z fizycznej interpretacji pulsacji ω_n , a poza tym gdyby parametr ω_n przyjął wartość 0, to spowodowałoby jednoczesne wyzerowanie współczynnika $2\xi\omega_n$. Wobec tego wzory (7-13) i (7-17) nie pozwalają zapisać przypadku:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) = b_0 u(t) \quad (7-19)$$

czyli **równania z zerowym biegunem** (7-7). Zależnie od drugiego biegunu ($\lambda_2 = -a_1/a_2$) jest to układ:

- na granicy stabilności jeśli $\lambda_2 \leq 0$,
- niestabilny jeśli $\lambda_2 > 0$.

7.3.3. Projektowanie własności dynamiki na podstawie tłumienia układu

Z własności równania oscylacyjnego i komplementarnego wynika kolejna metoda badania i projektowania własności układów drugiego rzędu, którą można nazwać metodą na podstawie tłumienia. Projektowanie na podstawie współczynnika ξ polega na sprowadzeniu badanego modelu (7-1) do postaci (7-13), (7-17) lub (7-19) i wykorzystaniu własności tych równań. Z każdą postacią wiąże się przyjęcie odpowiednich założeń, które muszą być uwzględnione przy formułowaniu całościowej odpowiedzi. Tak więc w ogólnym przypadku równania typu:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \quad (7-20)$$

mogą wystąpić następujące przypadki.

1° Jeśli $a_2 \neq 0$ i $a_0/a_2 > 0$, mamy równanie oscylacyjne:

$$\ddot{x}(t) + \frac{a_1}{a_2} \dot{x}(t) + \frac{a_0}{a_2} x(t) = \frac{b_0}{a_2} u_1(t) \quad (7-21)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = b_1 u(t), \omega_n > 0$$

W tym przypadku można wyznaczyć pulsację i tłumienie:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2} > 0 \\ 2\xi\omega_n = \frac{a_1}{a_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \\ \xi = \frac{a_1}{2a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \end{cases}, \quad (7-22)$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem $\sqrt{a_0/a_2}$ jest zawsze dodatnie, co wynika z wcześniejszego warunku $a_0/a_2 > 0$, a wartość pierwiastka $\sqrt{a_0/a_2}$ jest zawsze dodatnia, co wynika z założenia $\omega_n > 0$. Własności układu (stabilność, oscylacje) zależą jedynie od tłumienia ξ , które może przyjmować dowolną wartość - teoretycznie $-\infty < \xi < \infty$ (r. 7.3.1).

2° Jeśli $a_2 \neq 0$ i $a_0/a_2 < 0$, mamy przypadek równania komplementarnego do oscylacyjnego:

$$\ddot{x}(t) + \frac{a_1}{a_2} \dot{x}(t) - \left(\frac{-a_0}{a_2}\right) x(t) = \frac{1}{a_2} u_1(t) \quad (7-23)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \omega_n > 0$$

Tu również można wyznaczyć pulsację i tłumienie. Założenie $a_0/a_2 < 0$ zapewnia dodatnią wartość pod pierwiastkiem $\sqrt{-a_0/a_2}$, i sam pierwiastek też jest dodatni $\sqrt{-a_0/a_2}$ bo $\omega_n > 0$. Jednak równanie jest zawsze niestabilne (bez oscylacji), niezależnie od wartości ξ (r. 7.3.2).

3° Jeśli $a_2 \neq 0$ i $a_0 = 0$, otrzymujemy równanie z zerowym biegunem:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) = u_1(t), \quad (7-24)$$

które jest albo na granicy stabilności, albo jest niestabilne (7-7).

W wszystkich trzech przypadkach konieczne jest założenie $a_2 \neq 0$ (ze względu na operację dzielenia). Przypadki, gdy $a_2 = 0$ musi być rozważone oddzielnie:

- $a_2 = 0$ i $a_1 \neq 0$, to układ jest pierwszego rzędu (bez możliwości oscylacji) – stabilny lub niestabilny,
- $a_2 = 0$ i $a_1 = 0$, to otrzymujemy model statyczny, uznawany za układ stabilny.

Każde zadanie projektowe dla modelu (7-1), rozwiązywane za pomocą analizy biegunów (r. 7.2.2) można rozwiązać na podstawie tłumienia układu.

1° W odpowiedzi układu nie występują oscylacje (układ stabilny lub niestabilny):

warunek 1: $a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 > 0$

r.oscylacyjne

$$\wedge \left(\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \geq 1 \vee \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \leq -1 \right) \quad \text{i oba bieguny rzeczywiste}$$

lub 2: $a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 \leq 0$

r.komplementarne lub z biegunem 0

lub 3: $a_2 = 0$

układ ≤ 1 .rzędu

2° Projektowany układ jest stabilny (z oscylacjami lub bez):

warunek 1: $a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 > 0$

r.oscylacyjne

$$\wedge \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} > 0 \quad \text{i oba bieguny po lewej}$$

lub 2: $a_2=0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 < 0$ układ 1.rzędu, biegun po lewej

lub 3: $a_2=0 \wedge a_1=0$ układ statyczny

3° Układ dochodzi do stanu równowagi bez przeregulowań (był stabilny aperiodycznie),
warunek 1: $a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 > 0$ r.oscylacyjne

$$\wedge \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \geq 1 \quad \text{i oba bieguny rzeczywiste po lewej}$$

lub 2: $a_2=0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 < 0$ układ 1.rzędu, biegun po lewej

lub 3: $a_2=0 \wedge a_1=0$ układ statyczny

4° Po zakłóceniu układ nie oscyluje, ale też nie osiąga stanu równowagi:
warunek 1: $a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 > 0$ r.oscylacyjne

$$\wedge \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \leq -1 \quad \text{i oba bieguny rzeczywiste, po prawej}$$

lub 2: $a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 \leq 0$ r.komplementarne lub z biegunem 0

lub 3: $a_2=0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 \geq 0$ układ 1.rzędu, biegun nie po lewej

Schematy rozwiązań przykładowych przedstawiono w załączniku C.2 (lista2). Wynik analizy układu za pomocą współczynnika tłumienia ξ i analizy biegunów musi być oczywiście ten sam, co można wykorzystać do wybrania metody, która w danym przypadku będzie prostsza, albo do sprawdzenia poprawności uzyskanych wyników. Dodatkowo do potwierdzenia wyników można zastosować jeszcze inne metody, na przykład kryterium Routha.

7.3.4. Analiza i parametry odpowiedzi skokowych równania oscylacyjnego (LAB05)poprawić

Typowym elementem badania dynamiki obiektów jest obserwacja reakcji układu na skokową zmianę wartości zmiennej wejściowej. Rozwiązanie równania drugiego rzędu jest na tyle proste, że można wyznaczyć dokładny wzór funkcji i przeprowadzić jego analizę, wykorzystując typowe operacje badania przebiegu funkcji (załącznik B.3). Odpowiedź skokowa znormalizowanego¹ równania oscylacyjnego:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t), \quad \omega_n > 0 \quad (7-25)$$

w poszczególnych przypadkach ma postać:

- dla $|\xi| > 1$ (pierwiastki rzeczywiste):

$$1 - A_1 e^{\alpha_1 t} - A_2 e^{\alpha_2 t} = 1 - A_1 e^{\omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} - A_2 e^{\omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} \quad (7-26)$$

gdzie $\alpha_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$, $\alpha_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$;

$$A_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad A_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

- dla $|\xi| = 1$ (podwójny pierwiastek):

$$1 - A_1 e^{\alpha t} - A_2 t e^{\alpha t} = 1 - A_1 e^{-\xi\omega_n t} - A_2 t e^{-\xi\omega_n t} \quad (7-27)$$

gdzie $\alpha = -\xi\omega_n$; $A_1 = \frac{1}{1 - \alpha}$, $A_2 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$

- dla $|\xi| < 1$ (pierwiastki zespolone) formy są różne:

$$1 - e^{\alpha t} \left(\cos\omega_r t - \frac{\alpha}{\omega_r} \sin\omega_r t \right) = 1 - A e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1) = 1 - A e^{\alpha t} \cos(\omega_r t - \varphi_2) \quad (7-28)$$

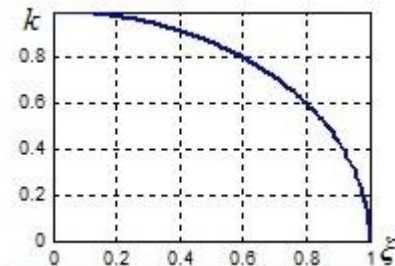
gdzie: $\lambda_1 = \alpha + j\omega_r$, $\lambda_2 = \alpha - j\omega_r$, $\alpha = -\xi\omega_n$, $\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$,

$$A = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2}}{\omega_r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad \varphi_1 = \arctg\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right), \quad \varphi_2 = \arctg\left(\frac{-\alpha}{\omega_r}\right).$$

¹ Wzmocnienie układu $k_{ukl} = 1$

Na podstawie rozwiązania (7-28) można wskazać interpretację i uzasadnienie nazw parametrów związanych z równaniem oscylacyjnym (ζ , ω_n , ω_r). W szczególności dotyczy to przypadku, gdy odpowiedź skokowa ma postać ograniczonych oscylacji, czyli dla $0 \leq \zeta < 1$:

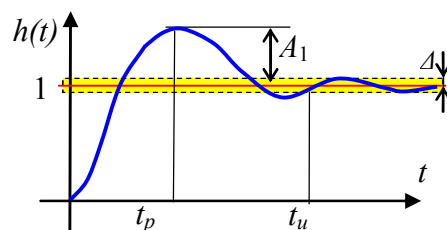
- ζ - **współczynnik tłumienia względnego** (w skrócie „tłumienie układu”) ... **dokończyć**
- ω_n - **pulsacja drgań własnych nietłumionych** (w skrócie „pulsacja układu”) jest pulsacją przebiegu sinusoidalnego występującego w składowej swobodnej przy zerowym tłumieniu - na podstawie (7-28) dla $\zeta = 0$ składowa ta ma postać $A \sin(\omega_n t + \varphi_1)$,
- ω_r - **pulsacja drgań własnych tłumionych** (w skrócie „pulsacja odpowiedzi”) jest pulsacją przebiegu sinusoidalnego w reakcji układu przy tłumieniu $0 < \zeta < 1$ - składowa swobodna we wzorze (7-28) to $A e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1)$, gdzie pulsacja $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.



Rys. 7-5. Wpływ ζ na pulsację $\omega_r = k \omega_n$

Jak wynika z wykresu tej funkcji (Rys. 7-5), przy niewielkich wartościach tłumienia $\zeta = 0 \div 0.5$ pulsacja ω_r zmienia się jedynie w zakresie 13%. Co oznacza, że ω_r zależy głównie od pulsacji ω_n .

Przeprowadzając klasyczną analizę przebiegu rozwiązania (7-28) można obliczyć charakterystyczne parametry takie jak wielkość przeregulowania A_1 , czas ustalania odpowiedzi t_u (Rys. 7-6).



Rys. 7-6. Parametry tłumionych oscylacji

Przeregulowanie A_1 jest związane z maksymalną wartością funkcji (7-28), więc wyznaczenie wartości A_1 można wykonać przez następujące etapy:

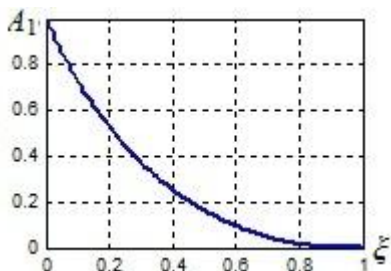
1° obliczenie funkcji pochodnej $\dot{x}(t)$:

$$x(t) = 1 - e^{\alpha t} \left(\cos \omega_r t - \frac{\alpha}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) \rightarrow \dot{x}(t) = -e^{\alpha t} \left(\omega_r \sin \omega_r t + \frac{\alpha^2}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) \quad (7-29)$$

2° rozwiązanie $\dot{x}(t) = 0$, co odpowiada obliczeniu czasu pierwszego przeregulowania (t_p):

$$\dot{x}(t) = e^{\alpha t} \left(\omega_r \sin \omega_r t + \frac{\alpha^2}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) = 0 \rightarrow \sin \omega_r t = 0 \rightarrow \omega_r t = \pi \rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_r} \quad (7-30)$$

3° obliczenie wartości pierwszego przeregulowania $x(t_p)$:



Rys. 7-7. Wpływ ζ na przeregulowanie A_1

$$x(t_p) = 1 - e^{\alpha \pi / \omega_r} \left(\cos \pi - \frac{\alpha}{\omega_r} \sin \pi \right) = 1 + e^{\alpha \pi / \omega_r} = 1 + A_1 \quad (7-31)$$

gdzie: $A_1 = e^{\alpha \pi / \omega_r} = e^{-\zeta \pi \sqrt{1 - \zeta^2}}$, oznacza, że wielkość przeregulowania jest funkcją tłumienia ζ . Funkcję przedstawiono na Rys. 7-7, a orientacyjne dla $\zeta = 0.3, 0.5$ i 0.7 wartości A_1 wynoszą 35%, 15% i 5%.

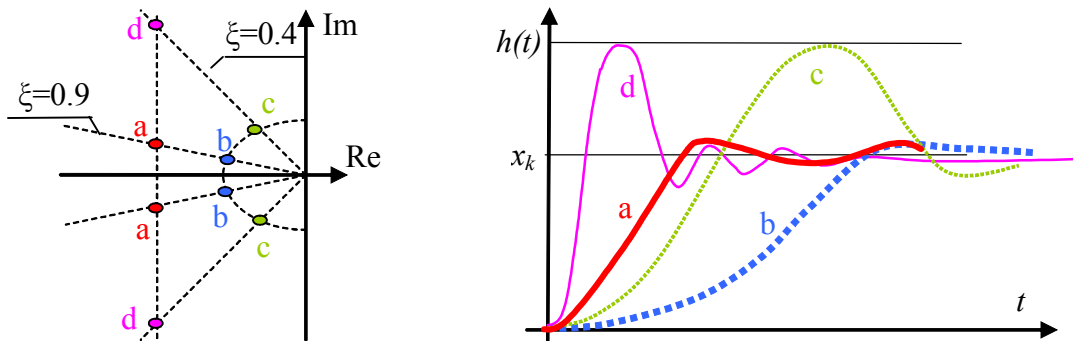
Czas ustalania odpowiedzi t_u zależy od części rzeczywistej biegunów. Zgodnie ze wzorem (6-4) przy założeniu tolerancji $\Delta = 2\%$ czas ustalania można oszacować ze wzoru:

$$t_u = 4 / |\alpha| = 4 / (\zeta \omega_n) \quad (7-32)$$

Zależności (7-31) i (7-32) można wykorzystać do wyznaczenia podstawowych wskaźników jakości na podstawie parametrów ζ i ω_n , lub do projektowania układów o zadanych wskaźnikach jakości.

Powyższa analiza oraz wykres na Rys. 7-4 pozwala przedstawić jakościowe relacje pomiędzy wartościami parametrów $\alpha = \text{Re}(\lambda_{1,2})$, ζ , ω_n , położeniem biegunów i parametrami przebiegu tłumionych oscylacji (Rys. 7-8). Jeśli porównywane układy mają:

- bieguny o takiej samej części rzeczywistej α (leżą w tej samej odległości od osi urojonej), to mają taką samą szybkość stabilizacji (czas ustalania t_u),
- takie same tłumienie ζ (bieguny leżą na tej samej półprostej), to odpowiedzi mają takie samo przeregulowanie (A_1),
- taką samą pulsację ω_n (bieguny leżą na tym samym półokręgu), to pulsacja odpowiedzi (ω_r) jest podobna (szczególnie dla małych ζ).



Rys. 7-8. Położenie biegunów a odpowiedź układu oscylacyjnego

Przedstawione relacje uzasadniają zastosowanie analizy położenia biegunów do porównywania lub projektowania układów dynamiki

Dodać oscylacyjność ?? Dokładniej? jak np. <http://labor.zut.edu.pl/fileadmin/wfm10.html>

7.4. Zastosowanie (LISTA 02, LAB05)

7.4.1. Projektowanie „jakościowe”

W tabeli Tab. 7-4 zestawiono własności równania różniczkowego drugiego rzędu, opisane za pomocą analizy biegunów oraz tłumienia układu. Uzyskane wnioski są podstawą dla metod prostego, „jakościowego” projektowania własności dynamicznych obiektów i układów sterowania.

Tab. 7-4. Własności liniowych równań drugiego rzędu ($a_2 \neq 0$)

| | $a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t)$ | | | | | | | | |
|---------------------|--|---|---|---|---|---|--|--|--|
| przypadki | $a_0 / a_2 > 0$ | | | | | | $a_0 / a_2 < 0$ | $a_0 = 0$ | |
| równanie | równanie oscylacyjne: $\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = u, \omega_n > 0$ | | | | | | *(kompl.) | ** (całk.) | |
| wyróżnik Δ | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ | | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ | $\Delta > 0$ | $\Delta > 0$ | |
| tłumienie ξ | $\xi < -1$ | $\xi = -1$ | $-1 < \xi < 0$ | $\xi = 0$ | $0 < \xi < 1$ | $\xi = 1$ | $\xi > 1$ | $-\infty < \xi < \infty$ | |
| bieguny λ_i | $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$ | $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$ | $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$ | $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$ | $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$ | $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$ | $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$ | $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$ | $\lambda_1 = 0, \lambda_2$ $\text{Im}(\lambda_i) = 0$ |
| stabilność | niestabilne | | na granicy stab. | | stabilne | | niestabilne | na granicy stab. lub niestab. | |
| oscylacje | bez oscylacji | | oscylacje | | bez oscylacji | | bez oscylacji | | |

* Równanie postaci $\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} - \omega_n^2 x = u, \omega_n > 0$

** Równanie $\ddot{x} + b\dot{x} = u$ ma dwa rzeczywiste pierwiastki, w tym $\lambda_1 = 0$.

Na przykład, jeśli $\Delta \geq 0$, to układ może być stabilny lub nie, ale na pewno w odpowiedzi nie pojawią się oscylacje. Jeśli $\Delta < 0$, to w odpowiedzi wystąpią oscylacje (mniej lub bardziej widoczne), a warunkiem stabilności jest $-a_1 / a_2 < 0$, czyli ten sam znak parametrów a_1 i a_2 .

Jeśli wszystkie współczynniki równania różniczkowego (a_2, a_1, a_0) mogą przyjmować dowolne wartości (także zero), to możliwości zawarte Tab. 7-4 należy uzupełnić o dwa przypadki:

- $a_2 = 0$ (równanie pierwszego rzędu):

$$a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t) \quad (7-33)$$

z jednym pierwiastkiem $\lambda_1 = -a_0 / a_1$, które może być stabilne lub niestabilne (w tym $\lambda_1 = 0$),

- $a_2 = a_1 = 0$ (równanie statyczne):

$$a_0 x(t) = u_1(t) \quad (7-34)$$

w którym własności dynamiczne nie występują, czyli jest zawsze stabilne.

7.4.2. Przykładowe zadania projektowe (LISTA 02)

Dodać (przykłady obiektów)

Wybór metody

1° Wyznacz bieguny i sprawdź poprawność wyznaczonych wzorów dla:

a) dowolnego równania drugiego rzędu (7-1),

b) równania oscylacyjnego (7-13),

c) równania komplementarnego do równania oscylacyjnego (7-17).

2° Układ ma dwa ujemne bieguny: -10 i -2. Odtwórz model obiektu. Czy ten model jest jednoznaczny? Co można powiedzieć o współczynniku tłumienia tego układu? (*^b)

8. Portrety fazowe

8.1. Wprowadzenie - definicja i własności portretu fazowego

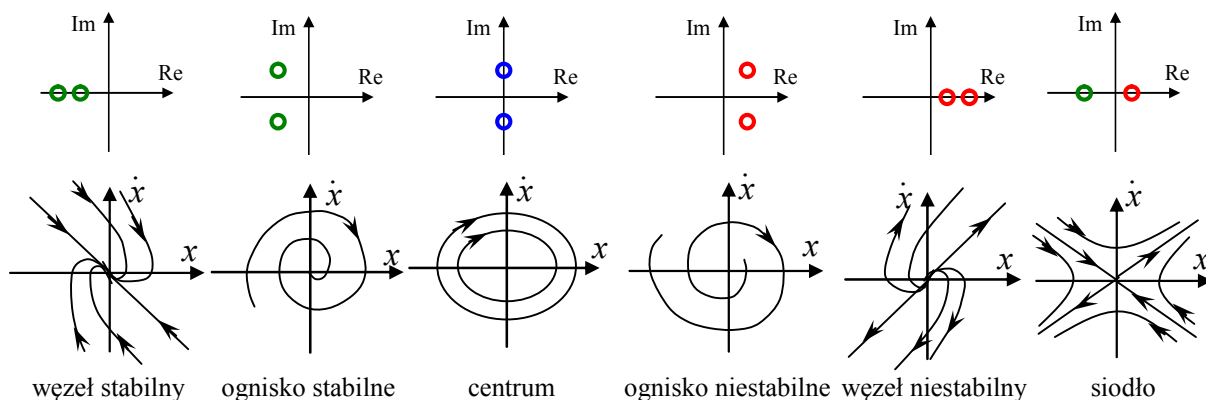
Portret fazowy to rodzina trajektorii w układzie współrzędnych $[x, \dot{x}]$, przedstawiających zachowanie obiektu obserwowane przy stałym wymuszeniu ale dla różnych warunków początkowych, które są wówczas jedyną przyczyną zmian obserwowanych w układzie. Jest to graficzny sposób zobrazowania własności dynamicznych obiektów 1. lub 2 rzędu liniowych i nieliniowych. Portrety fazowe mają szczególne zastosowanie w przypadku występowania nieliniowości typu nasycenie, strefa nieczułości, przekładnik, ... , czyli funkcji nieróżniczkowalnych¹. [dodać więcej](#)

Portrety fazowe najłatwiej jest uzyskać metodami symulacyjnymi na podstawie równań różniczkowych (\Rightarrow). Ilość trajektorii koniecznych do odtworzenia portretu można znacznie ograniczyć ze względu na jedną z podstawowych własności – trajektorie nie przecinają się ponieważ badane są **układy deterministyczne** (przejście z jednego punktu przestrzeni do kolejnego jest jednoznaczne - nie ma czynnika losowego lub możliwości wyboru).

8.2. Typy portretów fazowych (Lab...)

8.2.1. Układy liniowe

W układach liniowych można wyróżnić sześć charakterystycznych typów portretów, związanych z położeniem biegunów układu (Rys. 8-1).



Rys. 8-1. Charakterystyczne typy portretów fazowych układów liniowych

Każda trajektoria portretu reprezentuje ewolucję stanu obiektu od określonego warunku początkowego (przy stałym wymuszeniu). Jeśli układ jest stabilny, to dąży do punktu równowagi, a jeśli jest niestabilny to oddala się od tego punktu. Kierunek zmian (strzałkę czasu na trajektorii) określa się jednoznacznie na podstawie własności funkcji pochodnej – jeśli pochodna jest dodatnia (obszar nad osią x) to funkcja rośnie ($\dot{x} > 0 \Rightarrow x \uparrow$), jeśli pochodna jest ujemna (obszar pod osią x) to funkcja maleje ($\dot{x} < 0 \Rightarrow x \downarrow$), pochodna równa 0 (na osi x) oznacza maksimum lub minimum funkcji.

Portrety fazowe układów liniowych dobrze ilustrują własność **globalnej stabilności** lub niestabilności tych układów. Ponieważ w układzie liniowym jest możliwy tylko jeden punkt równowagi (\Rightarrow), więc układ stabilny dąży do tego punktu niezależnie od warunków początkowych (jest stabilny globalnie).

Na podstawie przedstawionych własności portretów fazowych można wyjaśnić następujące spostrzeżenia praktyczne:

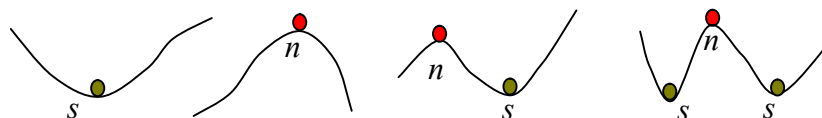
- 1° trajektorie przecinają oś x pod kątem 90° ,
- 2° punkt równowagi znajduje się na osi x - położenie punktu zależy od wartości wymuszenia u ,
- 3° przy wymuszeniu zerowym punkt równowagi leży w środku układu współrzędnych,
- 4° z trajektorii można odczytać amplitudy (przeregulowania) przebiegu rozwiązania - maksymalna lub minimalna wartość funkcji \rightarrow zerowa pochodna funkcji \rightarrow punkty na osi x .

8.2.2. Układy nieliniowe

Portrety fazowe układów nieliniowych mogą mieć jeden lub więcej punktów równowagi – w zależności od rozwiązania równania statycznego. Układ nieliniowy może być stabilny/niestabilny globalnie, ale jeśli układ ma więcej punktów równowagi, to może być stabilny w jednych a niestabilny w innych punktach, i wówczas rozróżniamy stabilność/niestabilność lokalną i globalną (Rys. 8-2).

¹ Więcej np. w [3/r.2.4]

Wyznaczenie portretu fazowego układu nieliniowego w odpowiednio dużym otoczeniu punktów równowagi umożliwia określenie obszarów stabilnych warunków początkowych (obszarów stabilności).



Rys. 8-2. Idee stabilności/niestabilności globalnej/lokalnej

W pobliżu punktów równowagi portrety układów nieliniowych ale różniczkowalnych¹ są zbliżone do liniowych wzorców (stabilne/niestabilne węzły, ogniska, siodła). To spostrzeżenie potwierdza możliwość analizy stabilności układu nieliniowego w ograniczonym zakresie wokół punktów równowagi za pomocą linearyzacji modelu w otoczeniu tych punktów (\Rightarrow). W ten sposób można również zidentyfikować punkty równowagi na portretach układów nieliniowych.

8.3. Symulacyjne generowanie portretów fazowych

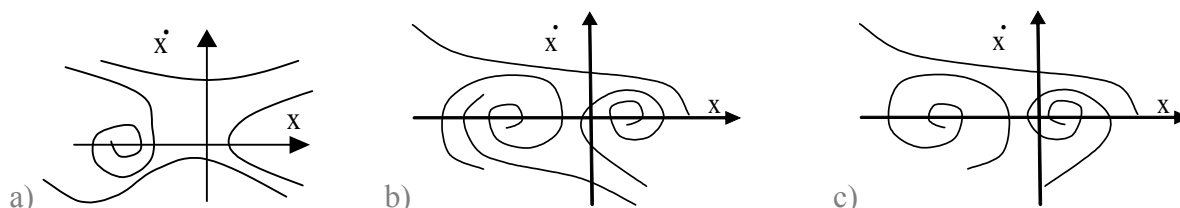
8.3.1. Zasady generowania portretów

Portret fazowy w programie symulacyjnym powstaje przez wielokrotne uruchomienie obliczeń reakcji obiektu dla stałego wymuszenia (zwykle równego zero) i różnych warunków początkowych oraz przedstawienie wyników w układzie współrzędnych $[x, \dot{x}]$. To oznacza, że badany model może być co najwyżej drugiego rzędu i musi umożliwić zainicjowanie różnych warunków początkowych². Model może być nieliniowy i mogą to być nawet funkcje typu nasycenie, strefa martwa, przekaźnik, itp.³ – portrety fazowe wspomagają szczególnie badania stabilności takich właśnie przypadków. Własności modeli liniowych można badać w prostszy sposób (nawet analitycznie) a na podstawie położenia biegunów łatwo przewidzieć typ portretu (węzeł/ognisko stabilne/niestabilne, centrum, siodło). Portrety modeli nieliniowych są bardziej złożone, na przykład mogą zawierać więcej niż jeden punkt równowagi a stabilność trajektorii może zależeć od warunków początkowych. Nieznajomość obszarów stabilności utrudnia generowanie nieznanego portretu, wiadomo jednak, że model różniczkowalny ma w odpowiednio małym otoczeniu każdego punktu równowagi portret podobny do układów liniowych. [poprawić/uzupełnić](#)

8.3.2. Praktyczne aspekty wyznaczania portretów

Eksperymentalne wyznaczanie portretu fazowego wymaga przemyślanego wybierania warunków początkowych i czasu trwania eksperymentu (początku i długości trajektorii), tak aby można było jednoznacznie wnioskować o globalnej i lokalnej stabilności badanego obiektu. Informacje na o ilości punktów równowagi czy o charakterze nieliniowości znacznie ułatwiają zadanie (\Rightarrow).

Założmy, że przedstawione poniżej portrety zawierają wszystkie charakterystyczne trajektorie.



Rys. 8-3. Przykłady portretów fazowych wygenerowanych eksperymentalnie

Na tej podstawie można:

- 1° zaznaczyć kierunki trajektorii,
- 2° określić ilość punktów równowagi, ich typ i stabilność,
- 3° w pewnych przypadkach określić liniowość modeli,
- 4° stwierdzić stabilność/niestabilność globalną

¹ bez elementów typu przekaźnik, strefa nieczułości, ...

² tego warunku nie spełniają modele w postaci transmitancji

³ nieliniowe nieróżniczkowalne

V. Podstawowe badania dynamiki układów wielowymiarowych (MIMO)

9. Analityczne badanie układu równań różniczkowych (równania stanu)

9.1. Wprowadzenie - obiekty SISO i MIMO

Modele układów konstruowane na podstawie znajomości zjawisk fizycznych (r. 2.1) zazwyczaj mają postać układu równań różniczkowych. Układy równań powstają w naturalny sposób jako rezultat zastosowania konstrukcji modeli na podstawie bilansu objętości (r. 2.2) czy ciepła (r. 2.3). Teoretycznie można je przekształcić i analizować jako jedno równanie n -tego rzędu, stosując metody analizowania i symulacji dynamiki układów opisane w rozdziałach 4÷7 na przykładzie pojedynczego równania różniczkowego z jednym wejściem i jednym wyjściem (ang. SISO¹). Jednak zazwyczaj nie ma konieczności takiego przekształcania, ponieważ analogiczne możliwości występują dla modeli o wielu wejściach i wyjściach (ang. MIMO²).

Typową postacią modeli typu MIMO są **równania stanu**, to znaczy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu, liniowych lub nieliniowych:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases} \quad (9-1)$$

gdzie $x_1(t) \div x_n(t)$ to n zmiennych stanu, a $u_1(t) \div u_m(t)$ to zmienne wejściowe (wymuszenia).

W najprostszych przypadkach zmienne stanu (x) oznaczają jednocześnie zmienne wyjściowe (rozwiązania). Przedstawienie modelu w postaci układu równań stanu pozwala obserwować wiele zmiennych x jednocześnie i pokazuje sprzężenia pomiędzy poszczególnymi zmiennymi, czyli jak zmienne wyjściowe wpływają na siebie nawzajem. Układ n równań różniczkowych pierwszego rzędu jest **modelem n -tego rzędu**.

9.2. Rozwiązania analityczne równań stanu

9.2.1. Liniowe równania stanu

Jeśli równania stanu (9-1) są równaniami liniowymi, to można je uporządkować w następujący sposób:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \dots + b_{1m}u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \dots + b_{2m}u_m(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \dots + b_{nm}u_m(t) \end{cases} \quad (9-2)$$

i zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (9-3)$$

lub symbolicznie:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (9-4)$$

gdzie:

- $\mathbf{x}(t)$ jest nazywany **wektorem n zmiennych stanu** – jest to poszukiwane rozwiązanie układu,
- $\mathbf{u}(t)$ reprezentuje wektor m zmiennych wejściowych – funkcje wymuszające na wejściach,
- \mathbf{A} – **macierz stanu** – podstawowa macierz układu o wymiarze $n \times n$,
- \mathbf{B} – macierz o wymiarze $n \times m$.

Równania stanu zawierają całą informację o dynamice obiektu, ale bywają jeszcze uzupełniane przez **równania wyjściowe**:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t), \quad (9-5)$$

¹ Single Input Single Output

² Multiple Input Multiple Output

które na podstawie wektora rozwiązań \mathbf{x} i zmiennych wejściowych \mathbf{u} pozwalają na zdefiniowanie dowolnego zestawu zmiennych wyjściowych \mathbf{y} .

9.2.2. Rozwiązanie równań stanu

Postać rozwiązania układu równań (9-3) jest analogiczna do rozwiązania pojedynczego równania n -tego rzędu (r. 1.4) - każda ze zmiennych stanu $x_i(t)$ jest sumą odpowiedniej składowej swobodnej $x_{is}(t)$ i wymuszonej $x_{iw}(t)$.

Składowe wymuszone układu (9-3) przy stałych wymuszeniach można obliczyć na podstawie opisu statycznego, czyli układu równań algebraicznych jaki powstaje po wyzerowaniu pochodnych:

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (9-6)$$

Po rozwiązaniu¹ otrzymujemy wektor \mathbf{x} , który zawiera składowe wymuszone poszczególnych zmiennych stanu $x_{iw}(t)$:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (9-7)$$

Wzory opisujące poszczególne współrzędne wektora \mathbf{x} (9-7) są podstawą do rysowania charakterystyk statycznych poszczególnych zmiennych x_i :

$$x_i = f_i(u_1, \dots, u_m) \quad (9-8)$$

oraz do wyliczenia wartości w stanie ustalonym (punktu równowagi) x_{i0}, \dots, x_{n0} dla zadanych wartości wymuszeń u_{10}, \dots, u_{m0} .

Podstawą rozwiązania swobodnego układu równań (9-3) jest równanie charakterystyczne, które w zapisie macierzowym ma postać: **Wyprowadzenie w zał (Raczyński)?**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (9-9)$$

a po rozpisaniu macierzy \mathbf{A} :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9-10)$$

Wyznacznik jest wielomianem n -tego stopnia, a jego n pierwiastków jest **biegunami** układu, które mają takie samo znaczenie i zastosowanie jak dla równania n -tego rzędu, czyli:

- mogą być rzeczywiste i zespolone, pojedyncze i wielokrotne,
- występują jako współczynniki w wykładnikach funkcji eksponencjalnych, które tworzą składniki rozwiązania swobodnego każdej ze zmiennych stanu $x_{is}(t)$:

$$x_{is}(t) = A_{i1}e^{\lambda_1 t} + \dots + A_{in}e^{\lambda_n t}, \quad i=1..n \quad (9-11)$$

- decydują o własnościach dynamiki układu - układ jest stabilny, jeśli wszystkie bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej.

Pierwiastki równania (9-9) w algebrze są znane pod nazwą **wartości własne macierzy \mathbf{A}**

Dysponując równaniem charakterystycznym można zastosować wszystkie metody analizowania i projektowania układów liniowych omówione w części III (r.6÷8).

9.2.3. Numeryczne wspomaganie badań analitycznych

Zapis modeli i operacji w postaci macierzowej (9-4), (9-6), (9-9) jest wykorzystywany szczególnie przy stosowaniu komputerowych programów obliczeniowych, przygotowanych do przetwarzania macierzy (jak na przykład Matlab). Jest to wygodna forma prowadzenia badań szczególnie wówczas, gdy macierze mają duży wymiar i nie ma potrzeby przedstawienia rozwiązania w postaci analitycznej (wszystkie współczynniki modelu mają określone wartości i oczekiwane wyniki też mają być wartościami). Nie zawsze jednak model jest aż tak złożony, ażeby rezygnować z przekształceń na wzorach, które można wykonać ręcznie i co ważniejsze - także dla modeli nieliniowych. Oczywiście można również skorzystać z programów, które realizują obliczenia symboliczne (na przykład Mathematica, a także Matlab, choć w mniejszym stopniu), jednak Inną drogą do rozwiązania bardzo złożonych problemów może być uproszczenie badanego modelu, na przykład przez zweryfikowanie przyjętych założeń (r.???) .

¹ stosując dowolną metodę rozwiązywania układu równań (operacje macierzowe, metodę eliminacji kolejnych zmiennych z układu równań)

Przykładowy skrypt (analogicznie jak 4.3.4)

- zastosowanie funkcji - stan równowagi, wartości własne macierzy

9.3. Przykłady zastosowania analitycznych rozwiązań równań stanu (LISTA03)

9.3.1. Kaskady zbiorników

Przykładem obiektów opisanych równaniami stanu są otarte układy hydrauliczne w postaci kaskady zbiorników (r. 2.2). Jednak modele kaskad zawierające dokładny opis swobodnego wypływu, są układami nieliniowymi i jedyne co można łatwo obliczyć w takim przypadku, to punkt równowagi przy stałych wymuszeniach. W dalszych rozważaniach zostanie więc zastosowane liniowe przybliżenie funkcji swobodnego wypływu, co pozwoli przypatrzeć się własnościom dynamiki przybliżonych, liniowych modeli obiektu.

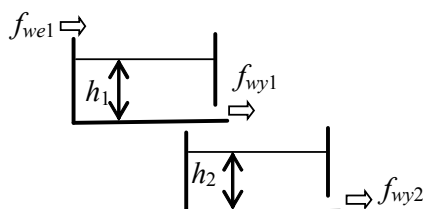
Do analizy wybrano trzy typy kaskad zbiorników. Wszystkie kaskady są opisane modelami drugiego rzędu, ale wykazują specyficzne cechy, wynikające ze sposobu połączenia zbiorników (sprzężenia pomiędzy poszczególnymi zmiennymi).

1° Układ zbiorników niepołączonych, nazywany kaskadą niewspółdziałającą (Rys. 9-1), jest opisany układem równań stanu (2-9), ale są to równania nieliniowe. Macierzowo można zapisać wersję przybliżoną modelu:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1 h_1(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 h_1(t) - a_2 h_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{A_1} & 0 \\ \frac{a_1}{A_2} & \frac{-a_2}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} f_{we1}(t) \quad (9-12)$$

Układ równań statycznych pozwala wyznaczyć punkt równowagi dla stałego wymuszenia:

$$h_{10} = f_{we1} / a_1, h_{20} = f_{we1} / a_2 \quad (9-13)$$



Rys. 9-1. Kaskada niewspółdziałająca 2

Z kolei z macierzy stanu można wyznaczyć równanie charakterystyczne:

$$\left(\frac{-a_1}{A_1} - \lambda \right) \left(\frac{-a_2}{A_2} - \lambda \right) = 0, \quad (9-14)$$

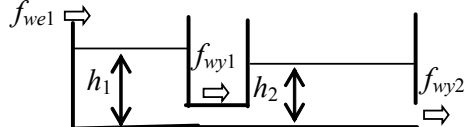
$$\text{czyli } A_1 A_2 \lambda^2 + (A_2 a_1 + A_1 a_2) \lambda + a_1 a_2 = 0$$

2° Układ zbiorników połączonych przewodem, nazywany kaskadą współdziałającą (Rys. 9-2) również opisują równania nieliniowe (2-11) i dopiero wersję przybliżoną można zapisać macierzowo:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1 (h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 (h_1(t) - h_2(t)) - a_2 h_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{A_1} & \frac{a_1}{A_1} \\ \frac{a_1}{A_2} & \frac{-a_1 - a_2}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} f_{we1}(t) \quad (9-15)$$

Punkt równowagi wyznaczony na podstawie układu równań statycznych:

$$h_{10} = f_{we1} \dots, h_{20} = f_{we1} \dots \quad (9-16)$$



Rys. 9-2. Kaskada współdziałająca 2

Natomiast równanie charakterystyczne ma postać:

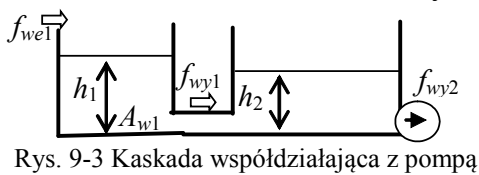
$$\left(\frac{-a_1}{A_1} - \lambda \right) \left(\frac{-a_1 - a_2}{A_2} - \lambda \right) - \frac{a_1^2}{A_1 A_2} = 0 \quad (9-17)$$

$$\text{lub } A_1 A_2 \lambda^2 + (A_2 a_1 + A_1 (a_1 + a_2)) \lambda + a_1 a_2 = 0$$

3° Układ zbiorników połączonych przewodem i z pompą wyjściową (Rys. 9-3) po uproszczeniu dokładnego modelu (2-12) ma postać:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1 (h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 (h_1(t) - h_2(t)) - f_{wy1}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{A_1} & \frac{a_1}{A_1} \\ \frac{a_1}{A_2} & \frac{-a_1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ \frac{-1}{A_2} \end{bmatrix} f_{we1}(t) \quad (9-18)$$

Układ równań statycznych ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $f_{we10} = f_{we20}$ i nie ma rozwiązań (nie ma punktu równowagi), gdy $f_{we10} \neq f_{we20}$, co wynika z równości:



Rys. 9-3 Kaskada współdziałająca z pompą

$$a_1(h_{10} - h_{20}) = f_{we10} = f_{wy10} \quad (9-19)$$

Równanie charakterystyczne:

$$\left(\frac{-a_1}{A_1} - \lambda \right) \left(\frac{-a_1}{A_2} - \lambda \right) - \frac{a_1^2}{A_1 A_2} = 0 \quad (9-20)$$

$$\text{lub po uproszczeniu } A_1 A_2 \lambda^2 + a_1 (A_2 + A_1) \lambda = 0$$

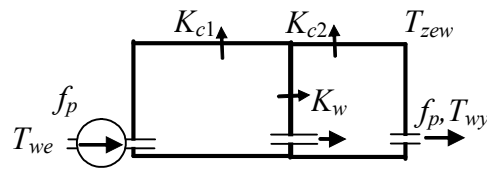
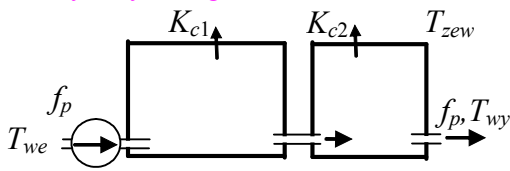
Porównując punkt równowagi i równania charakterystyczne analizowanych modeli warto zwrócić uwagę na następujące spostrzeżenia:

- Kaskada niewspółdziałająca - cechą tego układu jest **unilateralność**, to znaczy, że stan pierwszego magazynu (zbiornika) wpływa na stan drugiego magazynu ale stan drugiego magazynu nie wpływa na stan pierwszego. W macierzy A występują wówczas zera, które powodują, że równanie charakterystyczne powstaje jako iloczyn elementów na przekątnej.
- Kaskada współdziałająca - **cdn**
- Kaskada z pompą - brak lub nieskończenie wiele punktów równowagi, zerowy biegun. **cdn**
cdn?

9.3.2. Wielowymiarowe obiekty cieplne

Równania stanu są również naturalnym rezultatem konstrukcji modeli układów cieplnych (r. 2.3). Jeśli w takim układzie nie ma transportu ciepła poprzez nośnik, to powstają równania liniowe, które można zapisać w postaci macierzowej.

Przykłady analogiczne do zbiorników???



9.4. Konwersja modeli do równań stanu (LISTA03)

9.4.1. Przekształcenie równania n -tego rzędu do układu równań 1 rzędu

Postać modelu wynika zwykle ze sposobu jego konstrukcji (r. 2), ale może też być efektem przekształceń. Wśród różnych operacji bardzo użyteczne jest przekształcenie równania różniczkowego n -tego rzędu do układu n równań pierwszego rzędu. Algorytm przekształcenia zostanie przedstawiony na przykładzie równania trzeciego rzędu:

$$a_3\ddot{x}(t) + a_2\dot{x}(t) + a_1x(t) + a_0x(t) = bu(t) \quad (9-21)$$

W przypadku równania trzeciego rzędu, zamiast zmiennej x zostaną wprowadzone trzy nowe zmienne x_1, x_2, x_3 , zdefiniowane według następującego schematu:

$$\begin{aligned} x &= x_1 && \rightarrow x \\ \dot{x}_1 &= x_2 && \rightarrow \dot{x} \\ \dot{x}_2 &= x_3 && \rightarrow \ddot{x} \\ \dot{x}_3 &&& \rightarrow \ddot{\ddot{x}} \end{aligned} \quad (9-22)$$

Nowe zmienne x_1, x_2, x_3 należy podstawić do równania (9-21) zamiast x, \dot{x}, \ddot{x} , a zamiast najwyższej pochodnej $\ddot{\ddot{x}}$ – pierwszą pochodną ostatniej zmiennej (\dot{x}_3). Równoważny układ równań stanowi to równanie z nowymi zmiennymi oraz dwa równania wskazane na schemacie (9-22):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = [bu(t) - a_2x_3(t) - a_1x_2(t) - a_0x_1(t)]/a_3 \end{cases} \quad (9-23)$$

Przekształcony model można uporządkować, zapisać w postaci macierzowych równań stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0/a_3 & -a_1/a_3 & -a_2/a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b/a_3 \end{bmatrix} u(t), \quad (9-24)$$

i wyznaczyć równanie charakterystyczne modelu:

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (9-25)$$

Kolejność zapisania równań (9-23), a tym samym kolejność zmiennych stanu w wektorze $\mathbf{x}(t)$ jest dowolna. Równanie charakterystyczne nie zależy od kolejności zmiennych stanu pod warunkiem, że kolejność zmiennych w wektorach $\mathbf{x}(t)$ i $\dot{\mathbf{x}}(t)$ jest taka sama.

Forma modelu nie wpływa oczywiście na własności modelu, więc czy to będzie jedno równanie n -tego rzędu (9-21), czy układ równań 1. rzędu (9-25), to rząd, bieguny, stabilność, punkt równowagi są identyczne.

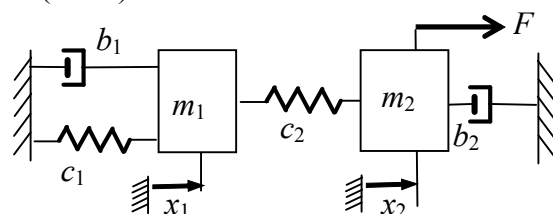
Przekształć równanie oscylacyjne (7-13) do postaci równań stanu - przy równaniu oscylacyjnym

9.4.2. Zastosowanie przekształcenia w modelach prostych układów mechanicznych

Pojedyncze równanie n -tego rzędu i układ równań 1. rzędu są dwoma formami modelu, na podstawie których można wyznaczyć równanie charakterystyczne. Trzecią formą, która to umożliwia jest transmitancja omówiona w r. 11.

Jeśli więc konstruowany model zawiera równania różnych zmiennych i różnych rzędów, to analityczne badanie jego stabilności wymaga przekształcenia modelu do jednej z form umożliwiających wyznaczenie równania charakterystycznego, przy czym zazwyczaj najprostsze jest doprowadzenie modelu do postaci równań stanu. Typowe przykłady tego typu modeli występują w układach mechanicznych ze sprężynami, tłumikami i masami (r. 2.4).

Rozważmy układ mechaniczny z dwoma punktami bilansowymi przedstawiony na Rys. 9-4, ale przy różnych założeniach dotyczących mas i tarcia.



Rys. 9-4. Układ z dwoma punktami i masami (2)

1° Jeśli model układu ma uwzględniać wpływ masy m_1 i m_2 , to model dynamiki układu obejmuje dwa równania, ale jest rzędu czwartego:

$$\begin{cases} 0 = m_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1 + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = m_2 \ddot{x}_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \quad (9-26)$$

W celu wyznaczenia równania charakterystycznego można zastosować konwersję na układ równań:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \\ \dot{y}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-c_1 - c_2}{m_1} & \frac{-b_1}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_3}{m_2} & 0 & \frac{-c_2}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ m_2 \end{bmatrix} F(t) \quad (9-27)$$

w którym zastosowano następujący schemat podstawień:

$$\begin{array}{llll} x_1 = y_1 & \rightarrow x_1 & x_2 = y_3 & \rightarrow x_2 \\ \dot{y}_1 = y_2 & \rightarrow \dot{x}_1 & \dot{y}_3 = y_4 & \rightarrow \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 & \rightarrow \ddot{x}_1 & \dot{y}_4 & \rightarrow \ddot{x}_2 \end{array}$$

Dodać -> Rozwinięcie wyznacznika (bo dużo zer)

Równanie charakterystyczne ma postać

2° Jeśli w analizowanym układzie masy m_1 i m_2 mają pomijalne wartości, to model dynamiki układu obejmuje dwa równania i jest drugiego rzędu, i można go zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{cases} 0 = b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F = b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-c_1 - c_2}{b_1} & \frac{c_2}{b_1} \\ \frac{c_2}{b_2} & \frac{-c_2}{b_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b_2 \end{bmatrix} F(t) \quad (9-28)$$

Równanie charakterystyczne to wielomian

3° Można rozważyć również układ, w którym pomija się wpływ sił bezwładności (mas) i tarcia - znaczenie mają tylko siły sprężystości. Wówczas modelem obiektu są równania:

$$\begin{cases} 0 = c_1 x_1(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F = c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \quad (9-29)$$

Są to równania statyczne, co oznacza, że model nie ma równania charakterystycznego - jest to opis z natury stabilny. Model opisuje obiekt, w którym reakcje zachodzą "natychmiast", to znaczy praktycznie bardzo szybko. Jeśli reakcje rzeczywistego układu nie mają takiego charakteru, to znaczy, że model (9-29) nie jest odpowiedni dla tego obiektu.

Wszystkie trzy warianty modelu układu mają takie samo równanie statyczne - taki sam punkt równowagi, opisany przez dwie współrzędne:

$$x_1 = \frac{F}{c_1}, \quad x_2 = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} \quad (9-30)$$

10. Badania symulacyjne na podstawie równań stanu

10.1. Wprowadzenie

Warunki prowadzenia badań dynamiki układów MIMO są zasadniczo takie same jak dla układów SISO.

Ogólne

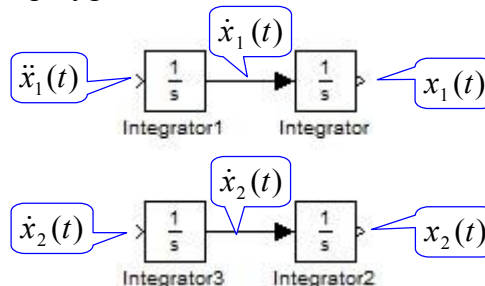
10.2. Definicja modeli w blokach, funkcjach i plikach

10.2.1. Schematy graficzne liniowych/nieliniowych równań stanu

Modele w postaci układu równań różniczkowych można przygotować do symulacji rysując schemat oparty na blokach całkujących, stosując zasady analogiczne jak dla pojedynczego równania (r. 5). Układ może obejmować równania dowolnego rzędu. Należy je przekształcić, tak aby po lewej stronie pozostały najwyższe pochodne poszczególnych zmiennych stanu. Na przykład w przypadku modelu (9-26) podstawą rysowania schematu będą równania:

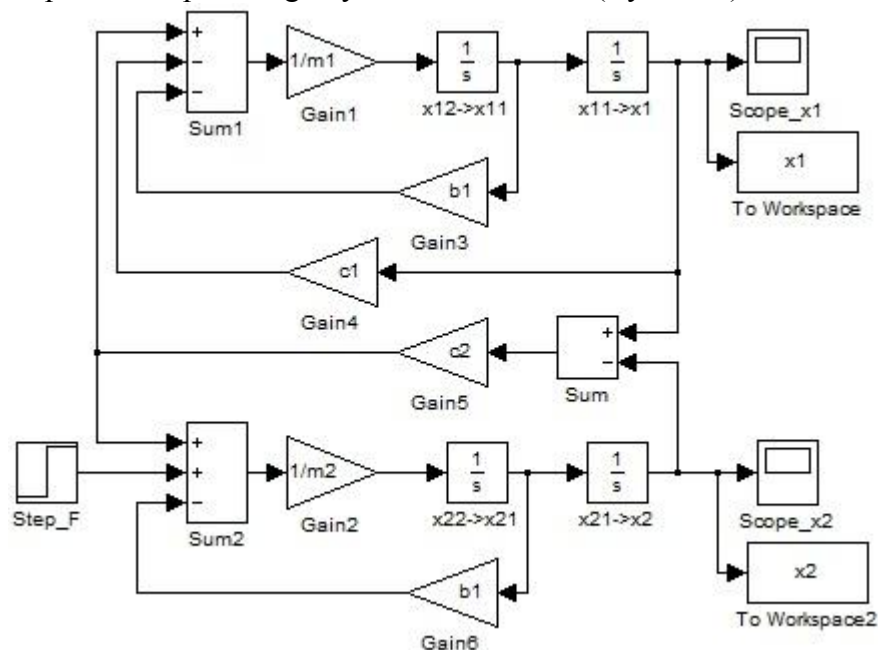
$$\begin{cases} 0 = m_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1 + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = m_2 \ddot{x}_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = \frac{1}{m_1} (-b_1 \dot{x}_1(t) - c_1 x_1 - c_2 (x_1(t) - x_2(t))) \\ \ddot{x}_2(t) = \frac{1}{m_2} (-b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) + F(t)) \end{cases}$$

Pierwszym etapem konstrukcji jest przygotowanie łańcuchów bloków całkujących dla x_1 i x_2 :



Rys. 10-1. Pierwszy etap konstrukcji układu dwóch równań – łańcuchy bloków całkujących

Na wejście każdego łańcucha należy skierować sygnał najwyższej pochodnej, skonstruowany za pomocą bloków na podstawie poszczególnych równań układu (Rys. 10-2).



Rys. 10-2. Schemat układu równań

Na schemacie użyto zmiennych m_1 , m_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , odpowiadających parametrom modelu (m_1 , m_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2), oraz zmiennych $x1_0$, $x1_10$, $x2_0$, $x2_10$ wpisanych do bloków całkujących jako warunki początkowe ($\dot{x}_1(0)$, $x_1(0)$, $\dot{x}_2(0)$, $x_2(0)$).

Podstawowe zalety tej metody przygotowania schematu symulacyjnego, to ograniczenie koniecznych przekształceń modelu (np. nie ma potrzeby konwersji modelu na układ równań 1. rzędu) oraz możliwość realizacji równań nieliniowych.

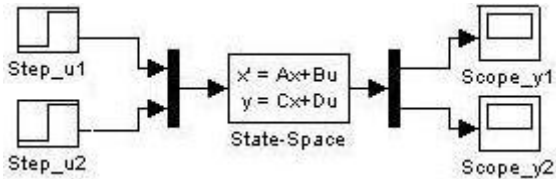
10.2.2. Specjalistyczne bloki na schemacie graficznym

Dla modeli liniowych zapisanych jako równania stanu w formie macierzowej, tworzenie schematu można znacznie uprościć dzięki zastosowaniu specjalnego bloku (State-Space), w którym parametrami są macierze równań stanu (Tab. 10-1).

Tab. 10-1. Podstawowe bloki do definiowania modeli w postaci równań stanu

| Operacja | Matlab/Simulink | Scilab/Xcos | Octave |
|-----------------------------|-----------------|-------------|--------|
| definiowanie równania stanu | State-Space | CLSS | --- |
| łączenie/dzielenie sygnałów | Mux, Demux | | |

Blok równań stanu (Rys. 10-3) jest przygotowany do wprowadzenia modelu postaci macierzowej:



Rys. 10-3. Blok równań stanu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (10-1)$$

gdzie wektor \mathbf{u} zawiera zmienne wejściowe, a wektor \mathbf{y} - zmienne wyjściowe. Wymiary macierzy \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} muszą się zgadzać, tak aby móc wykonać operacje na macierzach.

Blok równań stanu ma zawsze jedno wejście i jedno wyjście, ale mogą to być sygnały wektorowe - sygnały wejściowe można połączyć w wektor za pomocą multipleksera (Mux), a wektor wyjściowy można rozdzielić na sygnały za pomocą demultipleksera (Demux). Na wyjściu bloku dostępny jest tylko wektor \mathbf{y} , jeśli więc istnieje potrzeba obserwowania zmiennych stanu \mathbf{x} , to trzeba zdefiniować zmienne wyjściowe, które będą im odpowiadać. Blok równań stanu umożliwia podanie wektora wartości początkowych dla zmiennych stanu \mathbf{x}_0 , można więc uruchamiać symulacje od różnych warunków początkowych.

10.2.3. Specjalistyczne funkcje w skryptach

Typowe badania modeli zapisanych w postaci macierzowych równań stanu można zrealizować za pomocą prostych funkcji (Tab. 10-2).

Tab. 10-2. Wybrane funkcje do definiowania i badania modeli liniowych równań stanu

| Operacja | Matlab/Control | Scilab | Octave |
|--------------------------|----------------|--------|--------|
| definicja równania stanu | ss | Syslin | |
| odpowiedzi czasowe | step, impulse | Csim | |
| bieguny układu | pole | | |
| Wzmocnienie | dcgain | | |

W Matlabie funkcja ss umożliwia definicję modelu i zapamiętanie go w programie symulacyjnym pod wybraną nazwą. Parametry tej funkcji są takie same jak analogicznego bloku State-Space. Z kolei funkcje step i impulse służą do uruchamiania symulacji, która generuje wykres przedstawiający reakcję wskazanego modelu na standardowe zakłócenie (skok jednostkowy, impuls). Dostępne są także funkcje do wyznaczenia podstawowych parametrów modelu: funkcja pole pozwala wyznaczyć bieguny, a funkcja dcgain - wzmocnienie układu przy stałym wymuszeniu.

Dodać – model zdefiniowany przez ss na schemacie

10.2.4. Definiowanie modeli w pliku funkcyjnym

Definicja modelu w pliku funkcyjnym wymaga przedstawienia go w postaci układu równań pierwszego rzędu. Modele definiowane w plikach nie muszą być modelami liniowymi. Opiszemy więc przykład modelu van der Pola:

$$\ddot{x}(t) - c(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \rightarrow \ddot{x}(t) = c(1 - x^2)\dot{x} - x \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = c(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases} \quad (10-2)$$

Badany model należy zapisać w pliku funkcyjnym, zgodnie z zasadami konstrukcji takich plików w danym programie symulacyjnym (Tab. 10-3).

Tab. 10-3. Przykład funkcji definiującej model dynamiki

| Matlab | Scilab | Octave |
|---|--|--------|
| <pre>function[xprim] = vdp(t, x) global c; xprim = [x(2); ... c*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];</pre> | <pre>function[xprim] = vdp(t, x) global c; xprim(1) = x(2); xprim(2)=c*(1-x(1)^2)*x(2) - x(1); endfunction</pre> | |

Zakładając, że „vdp” z odpowiednim rozszerzeniem jest nazwą pliku zawierającego model, uruchomienie symulacji można zrealizować w skrypcie (Tab. 10-4).

Tab. 10-4. Przykład symulacji z wykorzystaniem funkcji definiującej model dynamiki

| Matlab | Scilab | Octave |
|--|---|--------|
| <pre>global c c=1; tend=100; x0 = [-2.5; 2.5]; [T,x]=ode45('vdp',[0 tend], x0); plot(x(:,1), x(:,2))</pre> | <pre>c=1; tend=100 ; x0 = [-2.5; 2.5]; t = linspace(0, tend,500); exec('vdp.sci'); [x] = ode(x0, 0, t, vdp); plot(x(1,:), x(2,:))</pre> | |

10.3. Przykłady zastosowania badań symulacyjnych (LAB 06-07)

10.3.1. Badania układów liniowych i nieliniowych

Zastosowanie równań stanu w badaniach symulacyjnych jest dedykowane przede wszystkim do sytuacji, gdy wymagane jest badanie reakcji różnych wyjść układu na zakłócenia, które pojawiają się na różnych wejściach układu. Zazwyczaj są to reakcje na wymuszenia skokowe. Poprawne badanie wymaga, aby układ znajdował się w stanie równowagi, a wymuszenie jest podawane tylko na jedno z wejść.

Dynamiczne własności układów liniowych nie zależą od punktu pracy. W układach liniowych zmieniają się zależnie od punktu pracy

Scenariusz badań obejmuje więc wybór obserwowanych wyjść, wybór wejść na które będą podawane zakłócenia oraz wybór punktów pracy.

cdn.

10.3.2. Własności dynamiczne kaskady zbiorników

Wybrać przykład

Porównując reakcje modeli dokładnych i zlinearyzowanych, spodziewamy się, że uproszczony model kaskady będzie wykazywał takie same własności dynamiczne w całym zakresie pracy, a własności modeli dokładnego zależą od punktu pracy.

cdn W tym porównać odpowiedzi liniowe i nieliniowe w trzech punktach pracy (przy prawidłowej linearyzacji)

VI. Modele operatorowe

11. Transmitancje Laplace'a

11.1. Wprowadzenie - transmitancja i jej podstawowe własności

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a, pozwala przekształcić liniowe równanie różniczkowe na algebraiczne równanie operatorowe. W praktyce inżynierskiej przejście od modelu różniczkowego do operatorowego opiera się na zastosowaniu:

- twierdzenia o liniowości:

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = af_1(s) + bf_2(s) \quad (11-1)$$

- twierdzenia o transformacie pochodnej funkcji z założeniem $f(0_+) = 0$:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sf(s) - f(0_+) = sf(s) \quad (11-2)$$

Z rozwinięcia twierdzenia (11-2) do pochodnych n -tego rzędu przy założeniu **zerowych warunków początkowych** ($f(0_+)$ oraz wszystkie pochodne równe zero dla $t > 0$), wynika zależność:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n f(s), \quad (11-3)$$

którą wykorzystuje się do przekształcania równań różniczkowych przez proste podstawienie symboli:

$$\frac{d^k}{dt^k} \leftrightarrow s^k \quad (11-4)$$

Tak więc **liniowe** równanie różniczkowe:

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (11-5)$$

z zerowymi warunkami początkowymi można przekształcić na równanie operatorowe:

$$a_n s^n x(s) + \dots + a_1 s x(s) + a_0 x(s) = b_m s^m u(s) + \dots + b_1 s u(s) + b_0 u(s) \quad (11-6)$$

Stąd po uporządkowaniu:

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) x(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) u(s) \quad (11-7)$$

i podzieleniu stronami:

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = G(s) \quad (11-8)$$

otrzymujemy model dynamiki nazywany **transmitancją układu** $G(s)$, definiowaną jako stosunek transformaty funkcji wyjściowej $x(s)$ do transformaty funkcji wejściowej $u(s)$, ale wyznaczaną na podstawie wielomianów równania operatorowego. Transmitancje powstające na podstawie równań różniczkowych mają postać funkcji wymiernych, przy czym w większości rzeczywistych obiektów stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika¹.

Na podstawie transmitancji $G(s)$ i transformaty funkcji wejściowej $u(s)$ można wyznaczyć transformatę funkcji wyjściowej:

$$x(s) = G(s)u(s), \quad (11-9)$$

Stąd transmitancję nazywa się też **funkcją przejścia**, która opisuje sposób przetwarzania sygnału przez układ. Na podstawie transformaty $x(s)$ można odtworzyć oryginał funkcji wyjściowej $x(t)$ – jeśli istnieje taka potrzeba². Zazwyczaj nie jest to konieczne, bo podstawowe badania własności obiektu (stabilność, punkt równowagi) można wykonać na podstawie transmitancji. O stabilności układu decydują **bieguny** transmitancji, czyli pierwiastki równania charakterystycznego układu wyznaczonego przez przyrównanie do zera mianownika transmitancji (11-8) (pierwiastki mianownika):

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (11-10)$$

Jest to takie samo równanie jak to wyznaczone na podstawie pierwotnego równania różniczkowego. Poprawne przekształcenia modelu nigdy nie zmieniają wielomianu charakterystycznego (w szczególności stopnia wielomianu), co można wykorzystać do weryfikacji poprawności przekształceń. **Zera** transmitancji (pierwiastki wielomianu w liczniku) nie mają wpływu na stabilność układu.

¹ Stąd też istnieje wiele metod analizy i projektowania układów opracowanych przy założeniu, że transmitancja obiektu spełnia takie warunki.

² Cały proces przekształceń od równania różniczkowego do odtworzenia funkcji $x(t)$ nazywa się operatorową metodą rozwiązywania liniowych równań różniczkowych. Patrz: przekształcenie odwrotne \mathcal{L}^{-1} , metody wyznaczania oryginałów funkcji (metoda rozkładu na ułamki proste, metoda residuów), np. [1], [3/D2].

Aby wyznaczyć **punkt równowagi** na podstawie transmitancji należy skorzystać z własności przekształcenia Laplace'a – twierdzenia o wartości końcowej:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s x(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) u(s), \quad (11-11)$$

które jest prawdziwe pod warunkiem, że granica $x(t)$ przy $t \rightarrow \infty$ istnieje. Problem istnienia granicy trzeba rozstrzygnąć w inny sposób, na przykład na podstawie znajomości rozwiązania równania różniczkowego dla typowych funkcji wymuszających¹. W praktyce często wykorzystuje się to twierdzenie do obliczenia wyjścia przy stałym wymuszeniu u_0 , przy czym zakłada się wówczas, że stałe wymuszenie jest reprezentowane przez funkcję skokową o takiej samej wartości².

Dodać przykłady dla $1(t)$, $\delta(t)$, $\sin(\omega t)$

Przykłady zastosowania przedstawiono w załączniku(?)

11.2. Transmitancje układów wielowymiarowych

Transmitancja z definicji opisuje układ typu SISO. Jeśli układ ma wiele wejść i wiele wyjść (MIMO), to można wyznaczyć wiele transmitancji. Układ równań różniczkowych, tworzący model MIMO, po zastosowaniu przekształcenia operatorowego (11-4), staje się układem równań operatorowych. Rozwiązując ten układ otrzymujemy transformaty każdej zmiennej wyjściowej x_i , wyrażone jako suma składowych:

$$x_i(s) = G_{i1}(s)u_1(s) + \dots + G_{im}(s)u_m(s) \quad (11-12)$$

gdzie $G_{i1} \div G_{im}$ to transmitancje zmiennej x_i od poszczególnych wejść. Zbiór wszystkich transmitancji układu MIMO można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \quad (11-13)$$

gdzie: $\mathbf{x}(s)$ i $\mathbf{u}(s)$, to wektory transformat zmiennych wyjściowych i wejściowych, natomiast $\mathbf{G}(s)$ jest nazywana macierzą transmitancji lub transmitancją macierzową.

Pojęcie **transmitancji macierzowej** wynika z metody wyznaczenia transmitancji dla równań stanu. Równania stanu (9-4) są przekształcone do postaci operatorowej:

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (11-14)$$

a następnie wykonane są operacje macierzowe:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \quad (11-15)$$

Transmitancja macierzowa jest więc rodzajem operatora macierzowego $\mathbf{G}(s)$, który opisuje związek pomiędzy transformatą wektora wejściowego $\mathbf{u}(s)$ i wyjściowego $\mathbf{x}(s)$.

Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} m_1 \dot{x}_1(t) + a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) = u_1(t) \\ m_2 \dot{x}_2(t) - b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = u_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (11-16)$$

można zapisać kolejno w postaci macierzowej (11-14) i (11-15), czyli:

$$s \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{a_1}{m_1} & -\frac{a_2}{m_1} \\ -\frac{b_1}{m_2} & s + \frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (11-17)$$

Wykorzystując ogólny wzór na elementy macierzy odwrotnej (1-13) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \frac{\det\left(\frac{m_2 s + b_2}{m_2}\right)}{\det(sI - A)} & (-1)^{2+1} \frac{\det\left(\frac{-a_2}{m_1}\right)}{\det(sI - A)} \\ (-1)^{1+2} \frac{\det\left(\frac{-b_1}{m_2}\right)}{\det(sI - A)} & (-1)^{2+2} \frac{\det\left(\frac{m_1 s + a_1}{m_1}\right)}{\det(sI - A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (11-18)$$

gdzie wyrażenie w mianowniku jest wyznacznikiem $\det(sI - A) = \left(\frac{m_1 s + a_1}{m_1}\right) \left(\frac{m_2 s + b_2}{m_2}\right) - \frac{b_1 a_2}{m_1 m_2}$

Ostatecznie po uproszczeniu wyrażeń otrzymujemy:

¹ Jeśli funkcja wejściowa ma stałą wartość, to rozwiązanie wymuszone też ma stałą wartość – granica istnieje. Jeśli na wejściu jest funkcja sinus, to na wyjściu wystąpi sinus przeskalowany i przesunięty – nie ma granicy (funkcja okresowa).

² to założenie pozwala wyznaczyć transformatę funkcji wejściowej: $u(t) = u_0 \rightarrow u_0 \cdot 1(t) \rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = u_0/s$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_2s + b_2}{M(s)} & \frac{a_2}{M(s)} \\ \frac{b_1}{M(s)} & \frac{m_1s + a_1}{M(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (11-19)$$

gdzie: $M(s) = (m_1s + a_1)(m_2s + b_2) - b_1a_2$

Zastosowanie operatora macierzowego (11-15) w przekształceniach analitycznych ma dwie wady: wymaga odwracania macierzy (co jest uciążliwe gdy dotyczy operacji symbolicznych na wyrażeniach) i mianownik wszystkich transmitancji układu jest obliczany na podstawie jednego wyznacznika (zmniejsza to ilość przekształceń, ale trudno wykryć ewentualny błąd).

Analityczne wyznaczanie macierzy transmitancji układu MIMO można również wykonać stosując technikę wzorów Cramera (1-16) - po przekształceniu układu równań różniczkowych do postaci operatorowej, wyrażenia ze zmienną s oraz transformaty zmiennych wejściowych są traktowane analogicznie jak stałe współczynniki i układ zostaje zapisany w postaci:

$$\mathbf{a}_1 x_1(s) + \mathbf{a}_2 x_2(s) + \dots + \mathbf{a}_n x_n(s) = \mathbf{b} \quad (11-20)$$

gdzie wektory kolumnowe $\mathbf{a}_1 \div \mathbf{a}_n$ zawierają wyrażenia ze zmienną s , a wektor \mathbf{b} zawiera zmienne transformaty zmiennych wejściowych.

Na przykład układ równań (11-16):

$$\begin{cases} m_1 \dot{x}_1(t) + a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) = u_1(t) \\ m_2 \dot{x}_2(t) - b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = u_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 s x_1(s) + a_1 x_1(s) - a_2 x_2(s) = u_1(s) \\ m_2 s x_2(s) - b_1 x_1(s) + b_2 x_2(s) = u_2(s) \end{cases} \quad (11-21)$$

można zapisać kolejno w postaci macierzowej (11-14) i (11-15), czyli:

$$\begin{bmatrix} m_1s + a_1 \\ -b_1 \end{bmatrix} x_1(s) + \begin{bmatrix} -a_2 \\ m_2s + b_2 \end{bmatrix} x_2(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (11-22)$$

Na podstawie wzorów Cramera (1-16) otrzymujemy:

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{\det \begin{bmatrix} u_1(s) & -a_2 \\ u_2(s) & m_2s + b_2 \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{(m_2s + b_2)u_1(s) + a_2u_2(s)}{M(s)} = \frac{m_2s + b_2}{M(s)} u_1(s) + \frac{a_2}{M(s)} u_2(s), \quad (11-23)$$

$$x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{\det \begin{bmatrix} m_1s + a_1 & u_1(s) \\ -b_1 & u_2(s) \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{(m_1s + a_1)u_2(s) + b_1u_1(s)}{M(s)} = \frac{b_1}{M(s)} u_1(s) + \frac{m_1s + a_1}{M(s)} u_2(s)$$

gdzie wyrażenie $M(s)$ w mianowniku $M(s) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det \begin{bmatrix} m_1s + a_1 & -a_2 \\ -b_1 & m_2s + b_2 \end{bmatrix} = (m_1s + a_1)(m_2s + b_2) - b_1a_2$

W ten sposób można przekształcać nie tylko równania stanu, ale także modele zawierające równania wyższych rzędów i pochodne zmiennych wejściowych. Metoda nie wymaga odwracania macierzy, ale podobnie jak w poprzedniej metodzie mianownik wszystkich transmitancji jest obliczany na podstawie jednego wyznacznika.

Alternatywny sposób wyznaczania transmitancji układów wielowymiarowych polega na przekształceniu układu równań modelu do postaci operatorowej i rozwiązanie układu poprzez eliminowanie kolejnych zmiennych. Można go zastosować do każdego układu równań bez eliminowania pochodnych wyższego rzędu i pochodnych zmiennych wejściowych.

Na przykład układ równań (11-16) przekształcony do postaci operatorowej i uporządkowany ma postać:

$$\begin{cases} (m_1s + a_1)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) \\ (m_2s + b_2)x_2(s) = b_1x_1(s) + u_2(s) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1(s)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) \\ M_2(s)x_2(s) = b_1x_1(s) + u_2(s) \end{cases} \quad (11-24)$$

gdzie robocze symbole $M_1(s)$ i $M_2(s)$ mają na celu skrócić zapis kolejnych operacji.

Wyznaczając z układu (11-24) jedną ze zmiennych wyjściowych, na przykład x_1 :

$$x_1(s) = \frac{a_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)} \quad (11-25)$$

i podstawiając do drugiego równania, otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą x_2 :

$$M_2(s)x_2(s) = b_1 \frac{a_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)} + u_2(s) \quad | \cdot M_1(s) \quad (11-26)$$

Obustronne mnożenie przez $M_1(s)$ pozwala wyeliminować wyrażenia ułamkowe:

$$M_1(s)M_2(s)x_2(s) = b_1a_2x_2(s) + b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s) \quad (11-27)$$

ponieważ ostateczna postać transmitancji powinna mieć postać funkcji wymiernej (bez piętrowych ułamków):

$$x_2(s) = \frac{b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2} \quad (11-28)$$

Podstawiając wyznaczoną wartość x_2 (11-28) do wyrażenia (11-25) uzyskujemy równanie z niewiadomą x_1 :

$$x_1(s) = \frac{a_2}{M_1(s)} \frac{b_1 u_1(s) + M_1(s) u_2(s)}{M_1(s) M_2(s) - b_1 a_2} + \frac{u_1(s)}{M_1(s)}, \quad (11-29)$$

które po sprowadzeniu do wspólnego mianownika:

$$x_1(s) = \frac{a_2 b_1 u_1(s) + a_2 M_1(s) u_2(s) + (M_1(s) M_2(s) - b_1 a_2) u_1(s)}{M_1(s) (M_1(s) M_2(s) - b_1 a_2)} \quad (11-30)$$

można uprościć i otrzymać wyrażenie postaci:

$$x_1(s) = \frac{M_2(s) u_1(s) + a_2 u_2(s)}{M_1(s) M_2(s) - b_1 a_2} \quad (11-31)$$

Transmitancje (11-28) i (11-31) mają taki sam mianownik:

$$x_1(s) = \frac{m_2 s + b_2}{M(s)} u_1(s) + \frac{a_2}{M(s)} u_2(s) \quad \text{oraz} \quad x_1(s) = \frac{b_1}{M(s)} u_1(s) + \frac{m_1 s + a_1}{M(s)} u_2(s) \quad (11-32)$$

gdzie: $M(s) = (m_1 s + a_1)(m_2 s + b_2) - b_1 a_2$

Ponieważ mianownik transmitancji był wyznaczany na dwa sposoby, to oznacza z dużym prawdopodobieństwem, że jest on poprawny.

Nie tylko końcowy wynik (11-32), ale cały ciąg przekształceń (11-24)÷(11-31) pozwala kontrolować poprawność wykonania operacji na podstawie charakterystycznych etapów¹.

Różne transmitancje tego samego obiektu mają taki sam mianownik jeśli obiekt jest tak zwanym **układem współdziałającym**, co można stwierdzić także na podstawie współzależności równań różniczkowych opisujących obiekt² – pomiędzy zmiennymi stanu występują wzajemne sprzężenia. W **układzie niewspółdziałającym** sprzężenia występują tylko w jednym kierunku – zależności są unilateralne. Typ sprzężeń można ocenić na podstawie znajomości zjawisk występujących na obiekcie.

Rozwinąć

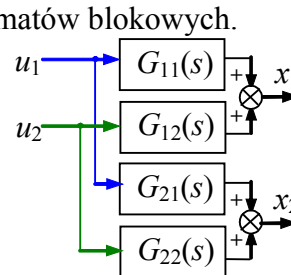
¹ W równaniach (11-24) występują nawiasy ze zmienną s , które zostaną zastąpione symbolami M_i . Symbole te pojawiają się w mianownikach wyznaczonych transmitancji. W równaniu (11-26) pojawia się możliwość wyeliminowania wyrażenia ułamkowego (obustronne pomnożenie przez jeden z symboli M_i), a w równaniu (11-30) – skrócenia ułamka (skrócenie wyrażen w liczniku i M_i jako wspólny dzielnik licznika i mianownika).

² w równaniu pochodnej x_1 występuje zmienna x_2 i odwrotnie

11.3. Schematy blokowe (strukturalne)

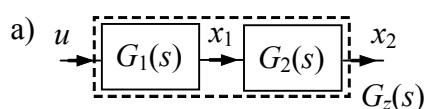
Modele opisane transmitancjami można przedstawić w postaci schematów blokowych.

Na przykład model (11-32) składa się z czterech transmitancji, opisujących związki pomiędzy dwoma wejściami i dwoma wyjściami obiektu i można go przedstawić w postaci schematu (Rys. 11-1). Schemat ten jest ilustracją modelu a nie odwzorowaniem wewnętrznej struktury obiektu. W obiektach współdziałających zmienne wpływają na siebie nawzajem i każda transmitancja zawiera w sobie informację o dynamice całego obiektu (wspólny mianownik). W badaniach stabilności można więc ograniczyć się do wyznaczenia i badania jednej wybranej transmitancji. Ponadto podstawowe badania dynamiki polegają na analizowaniu reakcji obiektu na wybrane, pojedyncze zakłócenia¹, można więc transmitancje obiektu badać oddzielnie (\Rightarrow).



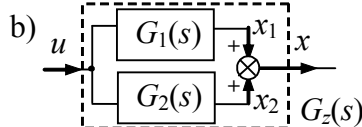
Rys. 11-1. Schemat blokowy (11-32)

Istotną zaletą stosowania transmitancji do opisu dynamiki obiektów jest prosta interpretacja iloczynu i sumy transmitancji jako szeregowego i równoległego połączenia bloków (Rys. 11-2).



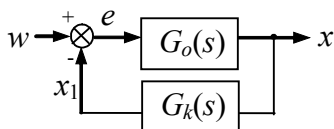
$$x_2(s) = G_1(s)G_2(s)u(s)$$

Rys. 11-2. Graficzna interpretacja iloczynu (a) i sumy (b) transmitancji

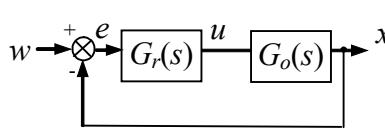


$$x(s) = (G_1(s) + G_2(s))u(s)$$

Za pomocą transmitancji oraz węzłów sumacyjnych i rozdzielających można konstruować schematy złożonych układów (obiektów). Typowy dla automatyki jest układ ze sprzężeniem zwrotnym, stosowany na przykład jako układ korekcji² (Rys. 11-3) lub regulacji³ (Rys. 11-4)



Rys. 11-3. Układ korekcji



Rys. 11-4. Układ regulacji

Wyznaczenie modeli zastępczych złożonych obiektów opiera się prostych działaniach arytmetycznych \textcircled{i} ⁴. Punktem wyjścia jest skompletowanie układu niezależnych równań, które opisują związki pomiędzy sygnałami na schemacie. Transmitancja zastępcza obiektu, jako związek pomiędzy jednym wejściem i jednym wyjściem, powstaje po wyeliminowaniu nadmiarowych zmiennych i uporządkowaniu otrzymanego wyrażenia.

Na przykład na schemacie układu korekcji (Rys. 11-3) występują cztery sygnały w , e , x i x_1 , w tym jeden wejściowy i trzy wyjściowe. Pełny układ równań zawiera więc trzy równania i pozwala wyznaczyć na przykład wzór na transmitancję $x(s)/w(s)$:

$$\begin{cases} e(s) = w(s) - x_1(s) \\ x(s) = G_o(s)e(s) \\ x_1(s) = G_k(s)x(s) \end{cases} \rightarrow x(s) = \frac{G_o(s)}{G_o(s)G_k(s) + 1}w(s) \quad (11-33)$$

Po podstawieniu transmitancji $G_o(s)$ i $G_k(s)$ można uporządkować wyrażenie (11-33) tak by określić rząd transmitancji zastępczej, wyznaczyć równanie charakterystyczne i bieguny złożonego układu.

Problem konstrukcji schematu może mieć charakter syntetyczny – schemat powstaje przez łączenie określonych bloków transmitancji, a celem jest wyznaczenie modelu zastępczego i zbadanie jego własności (np. stabilności⁵). Natomiast próba przedstawienia układu fizycznego w postaci schematu blokowego ma charakter analityczny, a punktem wyjścia jest zwykle podział na mniejsze fragmenty (np. urządzenia) dla których można określić wejścia i wyjścia, i wyznaczyć model, o ile to możliwe typu SISO.

¹ typowe badanie to skokowa zmiana wartości na jednym wejściu (powtarzane dla wybranych wejść)

² stosowany do korekcji własności dynamicznych obiektu G_o za pomocą członu korekcyjnego G_k

³ przeznaczony do sterowania obiektem G_o za pomocą regulatora G_r w celu uzyskania na wyjściu obiektu wartości zadanej w

⁴ czasem warto przekształcić schemat na równoważną, prostszą postać - patrz: przekształcanie schematów blokowych, np. [3/r.3.2.3, 5.2]

⁵ połączenie stabilnych elementów nie musi oznaczać stabilności układu

Proste zasady przekształcania schematów znajdują szczególne zastosowanie w metodach konstrukcji modeli opisujących liniowe układy elektryczne. Można je tworzyć według ogólnych zasad konstrukcji modeli, polegających na układaniu równań różniczkowych, które potem można w określonych warunkach przekształcić na transmitancje. W liniowych układach elektrycznych jednak zazwyczaj już na etapie konstrukcji modelu stosowany jest operatorowy opis własności elementów.

- 1° Wyznacz i porównaj wzory na transmitancje układów korekcji (Rys. 11-3) i regulacji (Rys. 11-4), przyjmując jako sygnał wyjściowy: a) zmienną x , b) zmienną e . (*^c)
- 2° Zapisz zestaw transmitancji dla układu korekcji i regulacji w postaci macierzy zakładając, że w dalsze badania będą dotyczyć tylko sygnału wyjściowego x i sygnału błędu e .
- 3° Określ rząd transmitancji zastępczej połączenia szeregowego i równoległego (Rys. 11-2) oraz układu korekcji (Rys. 11-3) i regulacji (Rys. 11-4) zakładając, że transmitancje składowe są funkcjami wymiernymi i że znany jest stopień wielomianów.
- 4° Podaj warunki zapewniające stabilność następujących transmitancji:

$$\text{a) } G(s) = G_1(s)G_2(s); \quad \text{b) } G(s) = G_1(s) + G_2(s)G_3(s); \quad \text{c) } G(s) = \frac{1}{G_1(s)G_3(s) + 1}$$

$$\text{gdzie: } G_1(s) = \frac{a}{(3s + a)}, \quad G_2(s) = \frac{1}{(s + a)^2}, \quad G_3(s) = k.$$

Jakie dodatkowe warunki muszą spełniać parametry aby układ osiągał stan równowagi bez przeregulowania (oscylacji)? Jak są połączone elementy składowe transmitancji $G(s)$ – narysuj schemat, oznacz składniki, wskaż wejście i wyjście związane z transmitancją $G(s)$.

11.4. Operatorowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych

Rozkład na ułamki proste. Odpowiedzi impulsowe. Rozwiązania dla układów z zerami.
Transmitancja a odpowiedź impulsowa.

12. Badania symulacyjne na podstawie transmitancji (LAB 07)

12.1. Wprowadzenie

12.2. Definicja modeli w blokach, funkcjach i plikach

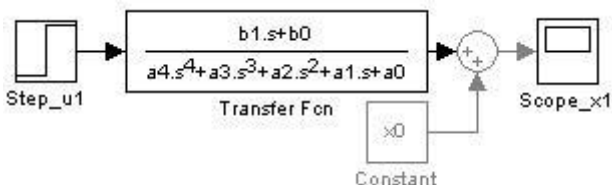
12.2.1. Specjalistyczne bloki na schemacie graficznym

Na schematach symulacyjnych można wykorzystywać kilka bloków do definiowania modeli liniowych (Tab. 10-1).

Tab. 12-1. Wybrane bloki do definiowania modeli w postaci transmitancji

| | Matlab/Simulink | Scilab/Xcos | Octave |
|---------------|-----------------|-------------|--------|
| transmitancja | Transfer Fcn | CLR | --- |

Oferowane bloki mają swoją specyfikę i ograniczenia w zastosowaniu¹. Podstawowa forma bloku transmitancji () jest typu SISO:



$$x_1(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} u_1(s) \quad (12-1)$$

czyli ma jedną zmienną wejściową u_1 i jedną wyjściową – zmienną stanu x_1 .

Rys. 12-1. Blok transmitancji

Współczynniki wielomianu licznika i mianownika są przekazywane do bloku za pomocą wektorów wartości. Programy symulacyjne zwykle akceptują tylko takie transmitancje, w których stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika (ewentualnie równy). Transmitancja z definicji jest modelem o zerowych warunkach początkowych. Zazwyczaj nie stanowi to problemu dla badań symulacyjnych, należy tylko podawać na wejście sygnał o zerowej wartości początkowej. Ponieważ reakcja modelu liniowego nie zależy od punktu pracy, więc w razie konieczności wyniki symulacji można przesunąć o wartość x_0 i uzyskać symulację przebiegu zmian od wybranego stanu równowagi.

12.2.2. Specjalistyczne funkcje w skryptach

Typowe badania modeli zapisanych w postaci macierzowych równań stanu czy transmitancji można zrealizować za pomocą prostych funkcji (Tab. 10-2).

Tab. 12-2. Wybrane funkcje do definiowania i badania modeli liniowych

| | Matlab/Control | Scilab | Octave |
|--------------------|----------------|--------|--------|
| transmitancja | tf, zpk | syslin | |
| odpowiedzi czasowe | step, impulse | csim | |
| bieguny układu | | | |
| wzmocnienie | | | |

Jedna grupa funkcji umożliwia definicję modelu i zapamiętanie go pod wybraną nazwą. Parametry i ograniczenia funkcji są takie same jak analogicznych bloków na schematach. Druga grupa funkcji służy do uruchamiania symulacji, która generuje wykres przedstawiający reakcję modelu na standardowe zakłócenie (skok jednostkowy, impuls).

12.3. Przykłady

¹ Nowsze wersje programów oferują dodatkowe wersje bloków bez ograniczeń, jednak są to de facto bloki, które nie ujawniają ograniczeń na zewnątrz ale obchodzą je za pomocą wewnętrznych konwersji.