Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

dr hab. inż. Iwona Karcz – Dulęba, prof. PWr

Równania różniczkowe numerycznie

- rozwiązujemy równania pierwszego rzędu z warunkiem początkowym (zagadnienie początkowe Cauchy'ego)

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- równania *n*-tego rzędu przekształcamy do układu *n* równań pierwszego rzędu

Metody różnicowe - ogólna idea

- wyznaczanie przybliżenia rozwiązania w skończonej liczbie punktów zadanego przedziału $[x_0, x_{max}]$
- wartość w kroku następnym obliczana na podstawie rozwiązania bieżącego
- rozwiązania przypisywane do określonych chwil $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{max}$

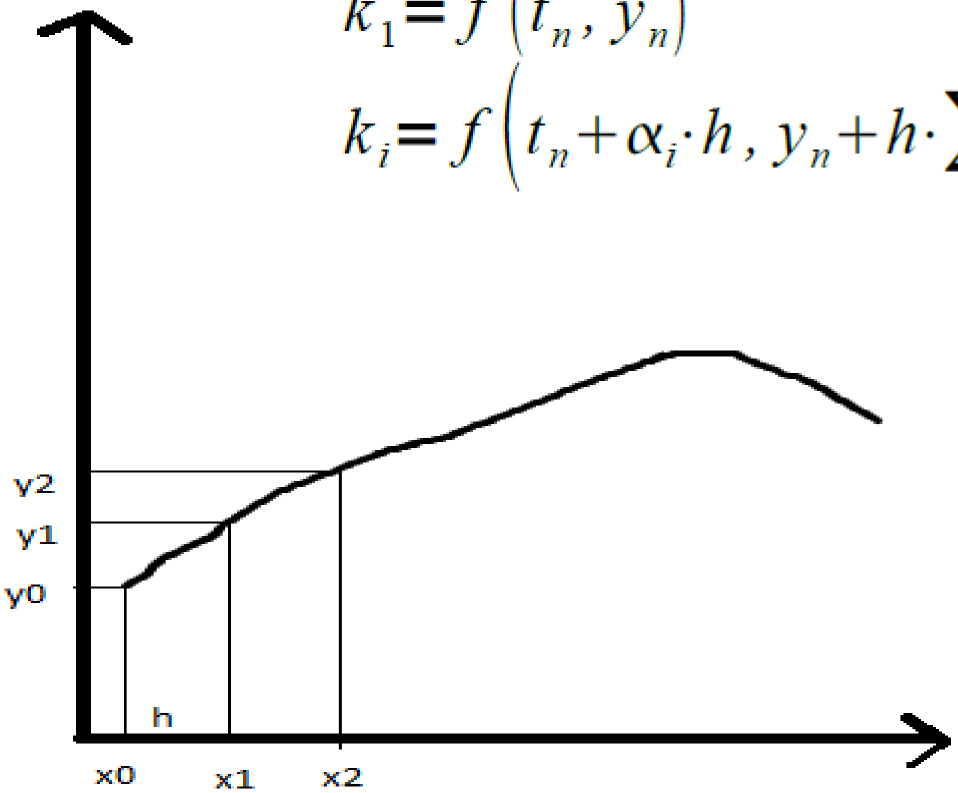
Ogólna postać schematu różnicowego:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot k_i$$

gdzie:

$$k_1 = f\left(t_n, y_n\right)$$

$$k_i = f\left(t_n + \alpha_i \cdot h, y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \cdot k_j\right), dla\, i = 2,3, \ldots, p$$



oraz

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1, dla\, i = 2,3, \ldots, p$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} = \alpha_i, dla\, i = 2,3, \ldots, p$$

Metody - podział

- STAŁOKROKOWE
  $x_i - x_{i-1} = h = const$
- ZMIENNOKROKOWE

- JEDNOKROKOWE
  – wykorzystują informację z poprzedniego kroku
- WIELOKROKOWE
  – wykorzystują informację z *k* poprzednich kroków

Metoda rozwinięcia w szereg Taylora

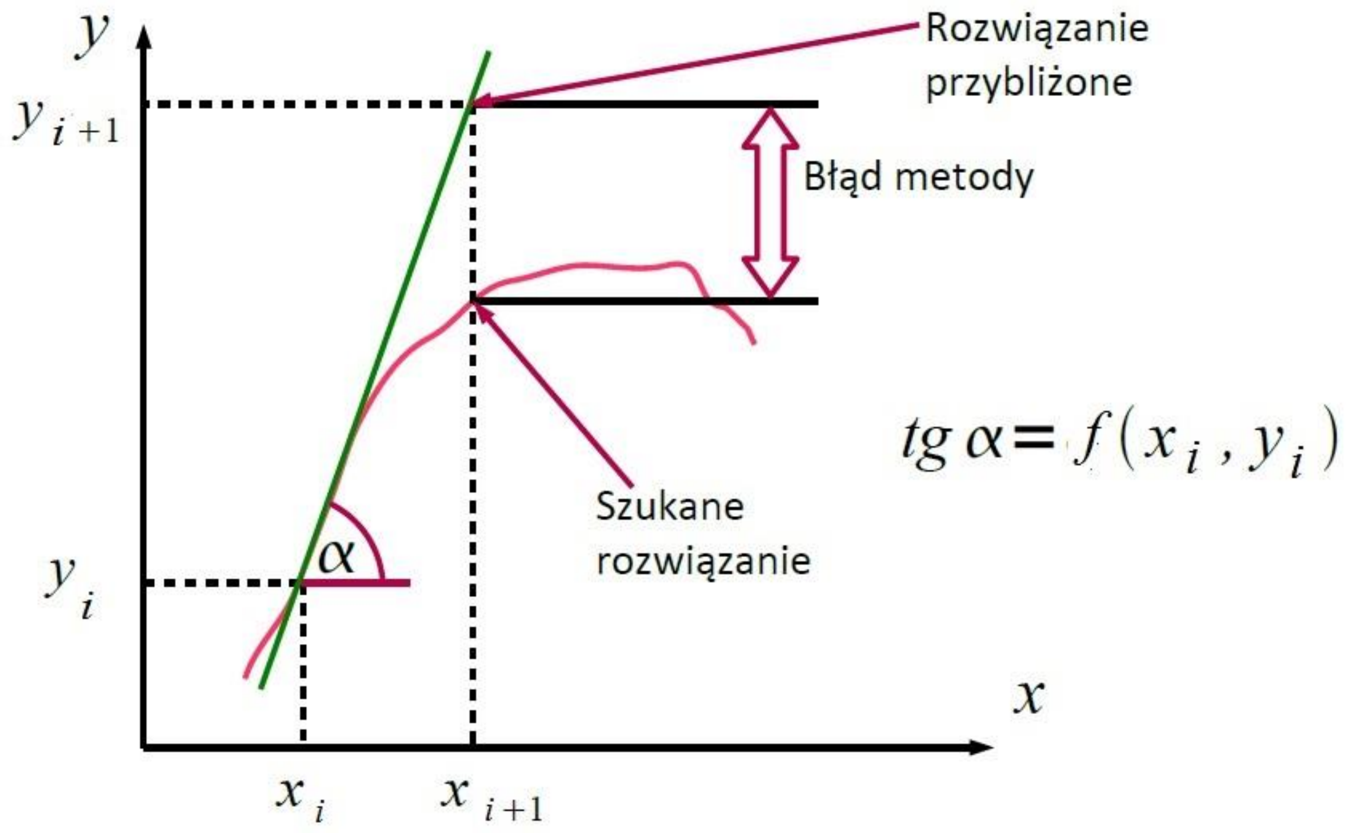
$$y_{m+1} = y_m + y_m{}' \cdot \Delta + \frac{1}{2} y_m^{(2)} \cdot \Delta^2 + \frac{1}{6} y_m^{(3)} \cdot \Delta^3 + O(\Delta^4)$$

gdzie:

$$y^{(k)}(x_m) = y_m^{(k)} \quad \Delta = x - x_m$$

Metoda Eulera (metoda stycznych)

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i), \quad y(x_0) = y_0$$



Błędy metody

- błąd lokalny
  - różnica miedzy rozwiązaniem dokładnym a numerycznym w jednym kroku
- błąd globalny (całkowity)
  - różnica miedzy rozwiązaniem dokładnym a numerycznym w punkcie końcowym

Dokładność metody

- metodę ocenia się porównując z rozwiązaniem uzyskanym za pomocą rozkładu w szereg Taylora

Rząd dokładności metody - potęga ostatniego wyrazu przy rozkładzie w szereg Taylora, któremu odpowiada rozwiązanie uzyskane przy pomocy danej metody

- im większy rząd, tym metoda dokładniejsza
- zwiększenie dokładności kosztem długości obliczeń
- metoda Eulera - rzędu pierwszego

Modyfikacje metody Eulera

- ***Metoda Heuna*** *(ulepszona metoda Eulera)*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h[\, f\,(x_i\,, y_i\,) + f\,(x_i + h, y_i + h\, f\,(x_i\,, y_i\,))]$$

– rzędu drugiego

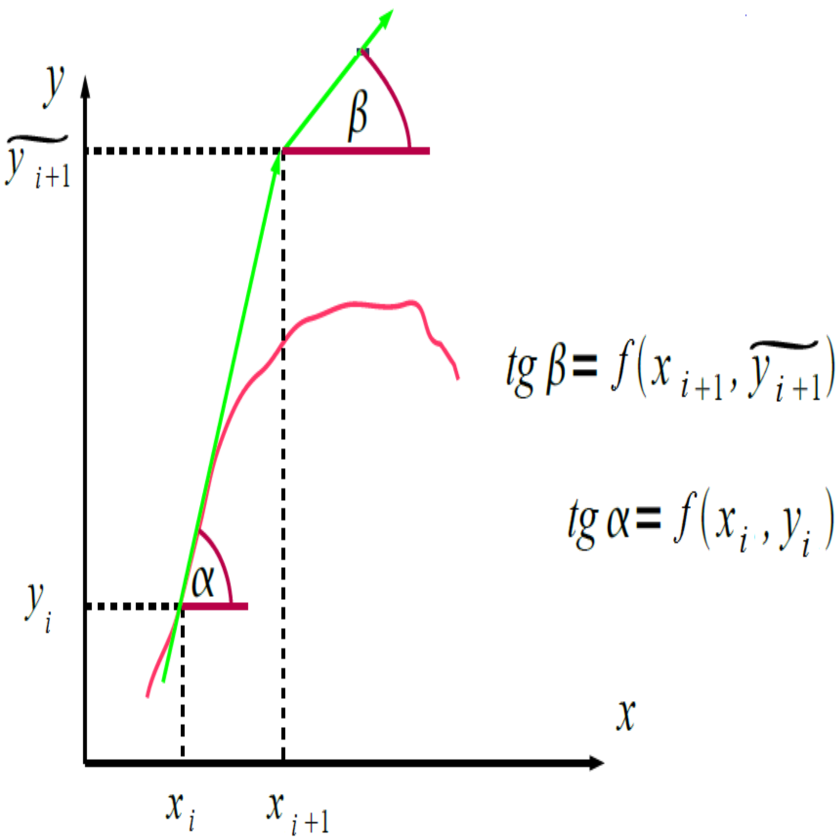
- ***Metoda Eulera-Cauchy'ego*** *(metoda punktu środkowego)*

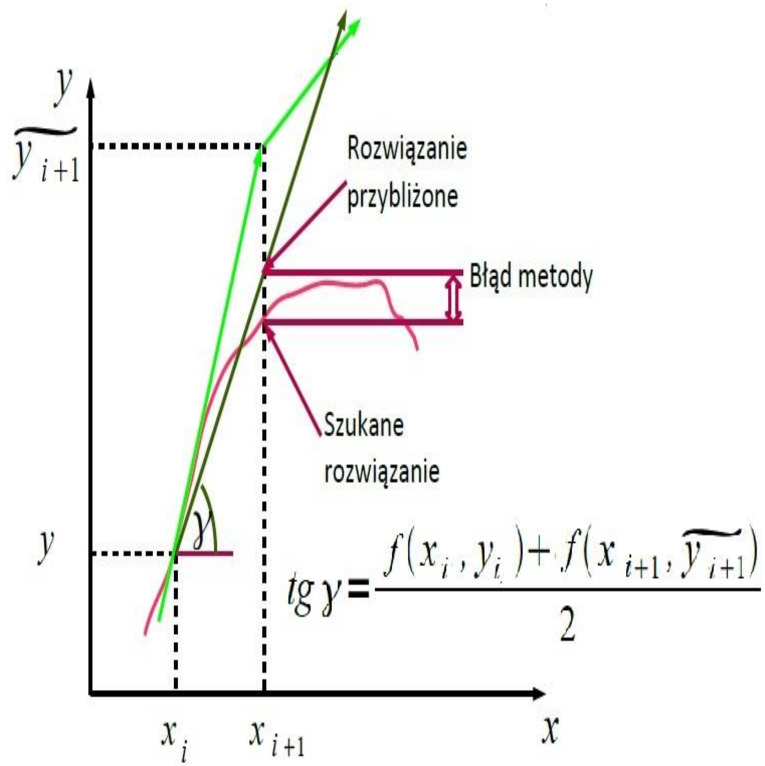
$$y_{i+1} = y_i + h\, f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}h\, f\,(x_i\,, y_i\,)\right)$$

– rzędu drugiego

Metoda Heuna

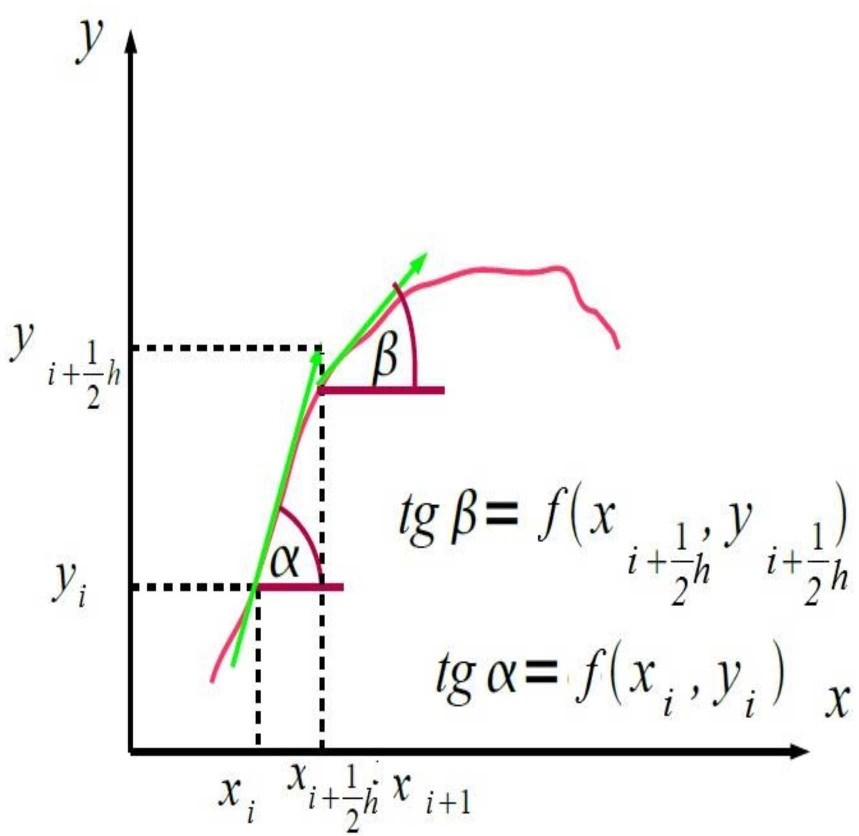
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))]$$

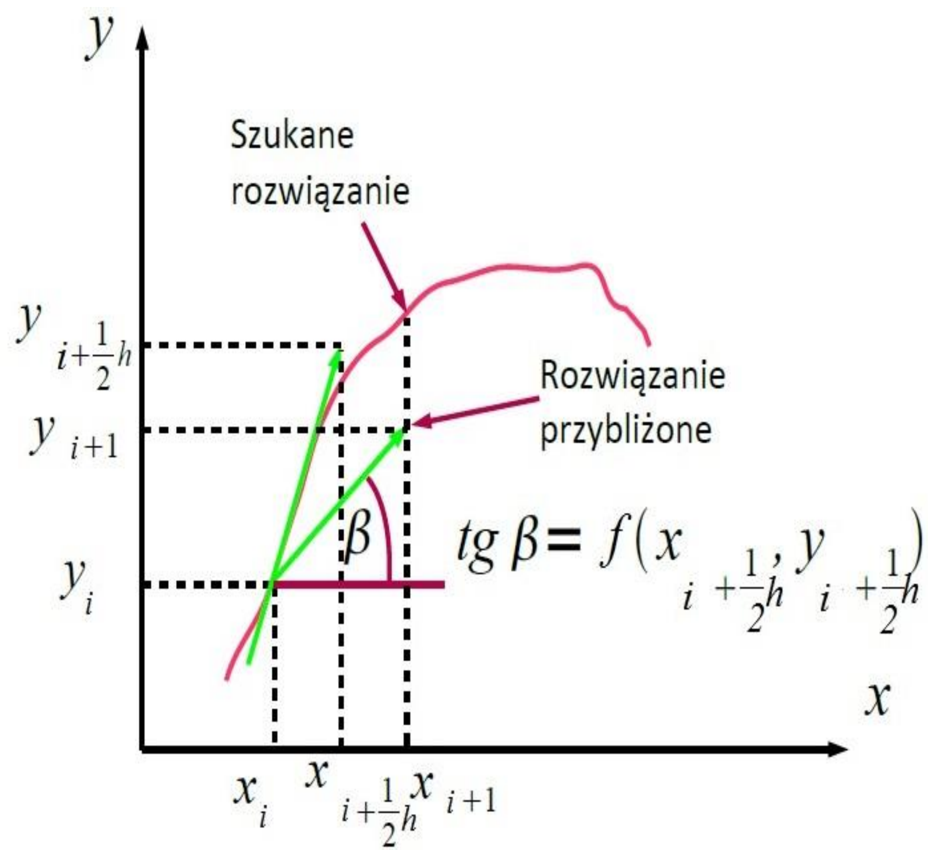




Metoda Eulera-Cauchy'ego

$$y_{i+1} = y_i + h\,f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h,\, y_i + \tfrac{1}{2}h\,f(x_i, y_i)\right)$$





Metoda Rungego-Kutty rz. 4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\mathrm{k}_2 + 2\mathrm{k}_3 + k_4\right)$$

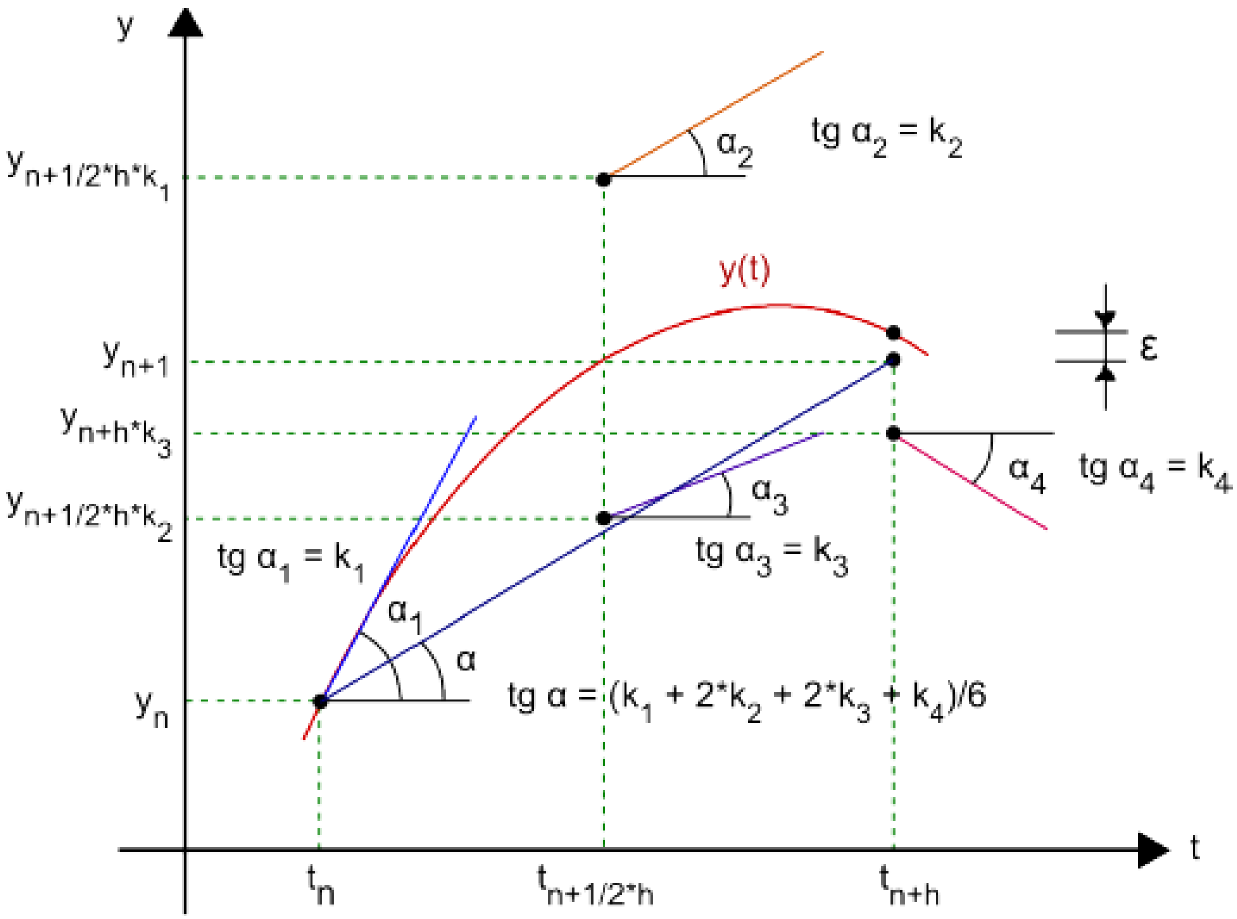
$$k_1 = f\left(t_n, y_n\right)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h \cdot k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + h \cdot k_3\right)$$

Metoda Rungego-Kutty rz. 4



Metody Rungego-Kutty

Rząd metody a ilość etapów

$$m = p\,, dla\; m = 1, 2, 3, 4$$
$$m < p\,, dla\; m \geq 5$$

gdzie: m - rząd metody, p - ilość etapów

Rząd metody	1	2	3	4	5	6	7	8
Ilość etapów	1	2	3	4	6	7	9	11

Metody zmiennkrokowe

- stosowane w przypadku funkcji szybkozmiennych
- zmiana długości kroku w zależności od błędu lokalnego i założonej tolerancji błędu

- metoda uniwersalna
  - „nakładka” na metody stałokrokowe
- metoda Dormanda - Prince'a

Metoda Dormanda-Prince'a

$$y_{n+1}=y_n+h\cdot\left(\frac{35}{384}k_1+\frac{500}{1113}k_3+\frac{125}{192}k_4-\frac{2187}{6784}k_5+\frac{11}{84}k_6\right)$$

$$\tilde{y}_{n+1}=y_n+h\cdot\left(\frac{5179}{57600}k_1+\frac{7571}{16695}k_3+\frac{393}{640}k_4-\frac{92097}{339200}k_5+\frac{187}{2100}k_6+\frac{1}{40}k_7\right)$$

- wyznaczenie błędu pojedynczego kroku

$$\delta=\left|\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}\right|$$

- dobór długości kroku *h* w zależności od błędu δ i założonej dokładności jednego kroku ϵ

$$h=h\cdot 0{,}8\cdot\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{6}}$$

Solvery w Matlabie

- ode23 – Runge-Kutta (2,3) (Bogacki-Shampine)
- ode45 - Runge-Kutta (4,5) (Dormand-Prince)
- ode113- Adams-Bashforth-Moulton

- do problemów sztywnych
  - ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb