

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych

$$a_3 \ddot{x}(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u(t)$$

, warunki początkowe

$$x = x_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{x}$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = [u(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t)] / a_3 \end{cases}$$

Uogólnienie

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t, x)$$

$$x_{(1)} \equiv x;$$

$$\frac{dx_{(1)}}{dt} = x_{(2)};$$

$$\frac{dx_{(2)}}{dt} = x_{(3)};$$

.....;

$$\frac{dx_{(n-1)}}{dt} = x_{(n)};$$

$$\frac{dx_{(1)}}{dt} = f_1(t, x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$$

.....

$$\frac{dx_{(n)}}{dt} = f_n(t, x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$$

$$\frac{dx_{(n)}}{dt} = \frac{1}{a_n} \left\{ f_n(t, x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}) - (a_{n-1} x_{(n)} + a_{n-2} x_{(n-1)} + \dots + a_0 x_{(1)}) \right\}$$

Przykład:

$$\log x \frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2t \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + e^x = \log \left(2t + \frac{dx}{dt} \right)$$

$$\frac{dx_{(1)}}{dt} = x_{(2)}; \quad \frac{dx_{(2)}}{dt} = x_{(3)}$$

$$\frac{dx_{(3)}}{dt} = \frac{1}{\log x_{(1)}} \left\{ \log(2t + x_{(2)}) - 3x_{(3)} - 2t(x_{(2)})^2 - e^{x_{(1)}} \right\}$$

Metody samostartujące

Zagadnienia typu $\frac{dx(t)}{dt} = x^{(1)} = f(t, x)$ z warunkami początkowymi $x(t_0) = x_0$

Szereg Taylora:
$$x(t_{i+1}) = x(t_0) + \Delta t \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t_i} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left. \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right|_{t_i} + \frac{\Delta t^3}{3!} \left. \frac{d^3x(t)}{dt^3} \right|_{t_i} + \dots$$

Schemat całkowania:
$$x_{i+1} = x_i + h x_i^{(1)} + \frac{1}{2!} h^2 x_i^{(2)} + \frac{1}{3!} h^3 x_i^{(3)} + \frac{1}{4!} h^4 x_i^{(4)} + \dots$$

Przykład: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \sin \omega t$, dla $t=0$ jest $x=3$, $x^{(1)}=2$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \sin \omega t - 2y(t) - x(t) \end{cases}$$

Szeregi Taylora:
$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta t x_i^{(1)} + \frac{\Delta t^2}{2!} x_i^{(2)} + \frac{\Delta t^3}{3!} x_i^{(3)} + \dots \\ y_{i+1} = y_i + \Delta t y_i^{(1)} + \frac{\Delta t^2}{2!} y_i^{(2)} + \frac{\Delta t^3}{3!} y_i^{(3)} + \dots \end{cases}$$

gdzie: $\Delta t = t_{i+1} - t_i$

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= y, & y^{(1)} &= \sin \omega t - 2y - x \\ x^{(2)} &= y^{(1)}, & y^{(2)} &= \omega \cos \omega t - 2y^{(1)} - x^{(1)} \\ x^{(3)} &= y^{(2)}, & y^{(3)} &= -\omega^2 \sin \omega t - 2y^{(2)} - x^{(2)} \end{aligned}$$

0) Obliczenia w pierwszym kroku ($t_0=0$):

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 & y_0 &= 2 \\ x_0^{(1)} &= 2 & y_0^{(1)} &= -7 \\ x_0^{(2)} &= -7 & y_0^{(2)} &= 13 \\ x_0^{(3)} &= 13 & y_0^{(3)} &= -19 \end{aligned}$$

1) obliczamy wartości w chwili t_1 (dla $\Delta t=10^{-2}$ [s])

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + (10^{-2} \cdot 2) - \left(\frac{10^{-4}}{2} \cdot 7 \right) + \left(\frac{10^{-6}}{6} \cdot 13 \right) + \dots \\ y_1 &= 2 - (10^{-2} \cdot 7) + \left(\frac{10^{-4}}{2} \cdot 13 \right) - \left(\frac{10^{-6}}{6} \cdot 19 \right) + \dots \end{aligned}$$

Metody samostartujące

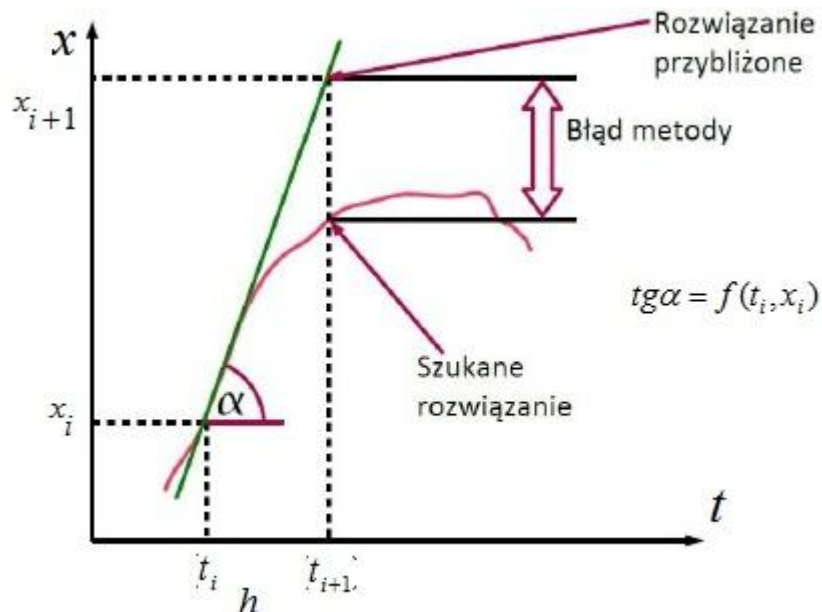
Zagadnienia typu $\frac{dx(t)}{dt} = x^{(1)} = f(t, x)$ z warunkami początkowymi $x(t_0) = x_0$

Szereg Taylora: $x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta t \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t_i} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left. \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right|_{t_i} + \frac{\Delta t^3}{3!} \left. \frac{d^3x(t)}{dt^3} \right|_{t_i} + \dots$

Schemat całkowania: $x_{i+1} = x_i + h x_i^{(1)} + \frac{1}{2!} h^2 x_i^{(2)} + \frac{1}{3!} h^3 x_i^{(3)} + \frac{1}{4!} h^4 x_i^{(4)} + \dots$

Rząd metody – potęga ostatniego wyrazu w rozwinięciu Taylora

Metoda Eulera: $x_1 = x_0 + h \frac{dx_0}{dt}$, błąd $\varepsilon = \frac{h^2}{2!} x_0^{(2)} + \frac{h^3}{3!} x_0^{(3)} + \dots$
(metoda stycznych)



Zagadnienie

$$\frac{dx_i}{dt} = f(t_i, x_i)$$

- błędy w pojedynczym kroku (błędy lokalne)
- błędy akumulowane (błąd globalny)
czyli różnica między rozwiązaniem dokładnym a numerycznym na końcu

Metody samostartujące

Zagadnienia typu $\frac{dx(t)}{dt} = x^{(1)} = f(t, x)$ z warunkami początkowymi $x(t_0) = x_0$

Schemat całkowania: $x_{i+1} = x_i + hx_i^{(1)} + \frac{1}{2!}h^2 x_i^{(2)} + \frac{1}{3!}h^3 x_i^{(3)} + \frac{1}{4!}h^4 x_i^{(4)} + \dots$

Metody Rungego-Kutty: $x_{i+1} = x_i + \mu_0 k_0 + \mu_1 k_1 + \dots + \mu_p k_p$

Suma wag $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_p = 1$

Parametry k_i są wyliczane z układu równań:

$$k_0 = hf(t_i, x_i)$$

$$k_1 = hf(t_i + \alpha_1 h, x_i + \beta_{1,0} k_0)$$

$$k_2 = hf(t_i + \alpha_2 h, x_i + \beta_{2,0} k_0 + \beta_{2,1} k_1)$$

$$k_3 = hf(t_i + \alpha_3 h, x_i + \beta_{3,0} k_0 + \beta_{3,1} k_1 + \beta_{3,2} k_2)$$

.....

$$k_p = hf(t_i + \alpha_p h, x_i + \beta_{p,0} k_0 + \beta_{p,1} k_1 + \dots + \beta_{p,p-1} k_{p-1})$$

gdzie: krok $h = t_{i+1} - t_i$, stałe współczynniki μ , α i β .

Znając t_i, x_i można obliczyć k_0 , co pozwala obliczyć k_1 itd.

Każdy z wyrazów $k_0 \dots k_p$ jest proporcjonalny do $f(t, x)$ w przedziale $t_i \dots t_{i+1}$.

W skrócie:

- metody Rungego-Kutty wymagają p -krotnego obliczenia pierwszej pochodnej dla każdego kroku (zamiast wyliczania wyższych pochodnych jak w szeregu Taylora)
- współczynniki μ , α i β powinny być tak dobrane by wzór na y_{i+1} był identyczny jak rozwinięcie Taylora ograniczone do kilku pierwszych wyrazów.

Metody samostartujące

Metody Rungego-Kutty:

3-rzędu

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}k_0 + \frac{2}{3}k_1 + \frac{1}{6}k_2$$

$$k_0 = hf(t_i, x_i)$$

$$k_1 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_0\right)$$

$$k_2 = hf(t_i + h, x_i + 2k_1 - k_0)$$

4-rzędu

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}[k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3]$$

$$k_0 = hf(t_i, x_i)$$

$$k_1 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_0\right)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf(t_i + h, x_i + k_2)$$

Metody przyspieszonego całkowania (niesamostartujące)

$$x_{i+1} = a_i x_i + a_{i-1} x_{i-1} + \dots + a_{i-p} x_{i-p} + h \cdot (b_{i+1} x_{i+1}^{(1)} + b_i x_i^{(1)} + \dots + b_{i-p} x_{i-p}^{(1)})$$

- korzysta z p poprzednich wartości zmiennej x , tzn. x_i, \dots, x_{i-p}
- jej pierwszej pochodnej $x^{(1)}$, tzn. $\underline{x_{i+1}}^{(1)}, x_i^{(1)}, \dots, x_{i-p}^{(1)}$ (razem $p+1$ wartości)

użycie $x_{(i+1)}^{(1)}$ poprawia dokładność
ale wymaga **predykcji** tej wartości,

Predyktory Adams-Bashfortha (bez pochodnej $x_{(i+1)}^{(1)}$)

$$\text{Dla } p=1 \quad x_{i+1} = x_{i-1} + 2h \cdot x_i^{(1)} + \frac{h^3}{3} x^{(3)}(\varepsilon)$$

$$\text{Dla } p=3 \quad x_{i+1} = x_{i-3} + \frac{3}{4} h \cdot (2x_i^{(1)} - x_{i-1}^{(1)} + 2x_{i-2}^{(1)}) + \frac{14}{45} h^5 x^{(5)}(\varepsilon)$$

$$\text{Dla } p=5 \quad x_{i+1} = x_{i-5} + \frac{3}{10} h \cdot (11x_i^{(1)} - 14x_{i-1}^{(1)} + 26x_{i-2}^{(1)} - 14x_{i-3}^{(1)} + 11x_{i-4}^{(1)}) + \frac{41}{140} h^7 x^{(7)}(\varepsilon)$$

Prostota, łatwość programowania, stosunkowo krótki czas obliczeń

W każdym kroku tylko jedna wartość pochodnej ($x^{(1)}$)

Nie wymagają iteracji

Stosunkowo niska dokładność i duża szansa na akumulację błędów

Metody predykcyjno-korekcyjne (niesamostartujące)

$$x_{i+1} = a_i x_i + a_{i-1} x_{i-1} + \dots + a_{i-p} x_{i-p} + h \cdot (b_{i+1} x_{i+1}^{(1)} + b_i x_i^{(1)} + \dots + b_{i-p} x_{i-p}^{(1)})$$

$$\text{Dla } p=1 \quad x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{1}{3} h \cdot (x_{i+1}^{(1)} + 4x_i^{(1)} + x_{i-1}^{(1)}) - \frac{1}{90} h^5 x^{(5)}(\varepsilon)$$

$$\text{Dla } p=3 \quad x_{i+1} = x_{i-3} + \frac{2}{45} h \cdot (7x_{i+1}^{(1)} + 32x_i^{(1)} + 12x_{i-1}^{(1)} + 32x_{i-2}^{(1)} + 7x_{i-3}^{(1)}) - \frac{8}{945} h^7 x^{(7)}(\varepsilon)$$

$$\text{Dla } p=5 \quad x_{i+1} = x_{i-5} + \frac{3}{10} h \cdot (x_{i+1}^{(1)} + 5x_i^{(1)} + x_{i-1}^{(1)} + 6x_{i-2}^{(1)} + x_{i-3}^{(1)} + 5x_{i-4}^{(1)} + x_{i-5}^{(1)}) - \frac{1}{140} h^7 x^{(7)}(\varepsilon) - \frac{1}{1400} h^9 x^{(9)}(\varepsilon)$$

1. zastosować metodę samostartującą (np. Rungego-Kutty) w celu uzyskania pierwszych p wartości
2. uzyskać pierwszą predykcję wartości y_{i+1} (wzory przyspieszonego całkowania)
3. podstawić otrzymaną wartość y_{i+1} do rozwiązywanego równania różniczkowego $y^{(1)}=f(x,y)$ w celu uzyskania wartości $y_{i+1}^{(1)}$
4. obliczyć nową wartość y_{i+1} przy użyciu dokładniejszych równań (jak wyżej)
5. powtarzanie kroków 3 i 4 aż do uzyskania wystarczającej zgodności kolejnych wartości y_{i+1} (jeśli krok h jest wystarczająco mała każda sekwencja kroków powinna zmniejszać różnicę pomiędzy kolejnymi wartościami y_{i+1})