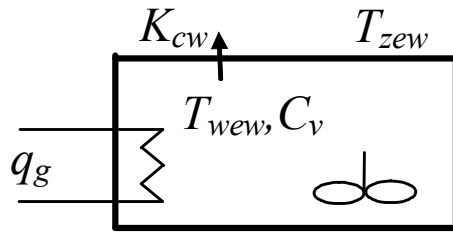


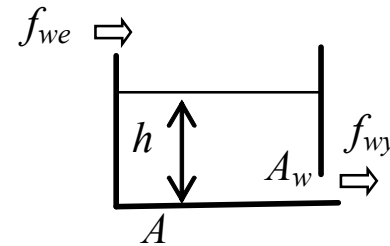
# Analogia układów cieplnych i hydraulicznych



$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_c(T_{wew}(t) - T_{zew}(t))$$

$$C_v s T_{wew}(s) + K_c T_{wew}(s) = q_g(s) + K_c T_{zew}(s)$$

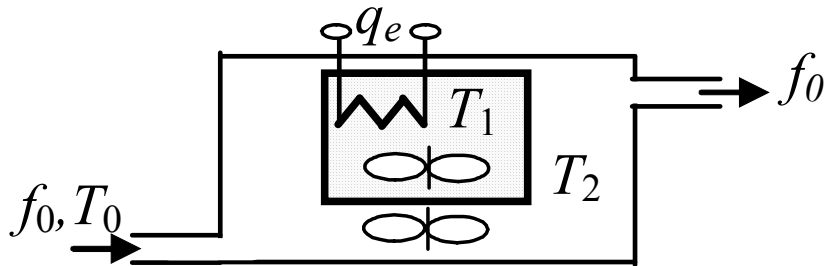
$$T_{wew}(s) = \frac{1}{C_v s + K_c} q_g(s) + \frac{K_c}{C_v s + K_c} T_{zew}(s)$$



$$A \dot{h}(t) = f_{we}(t) - a h(t)$$

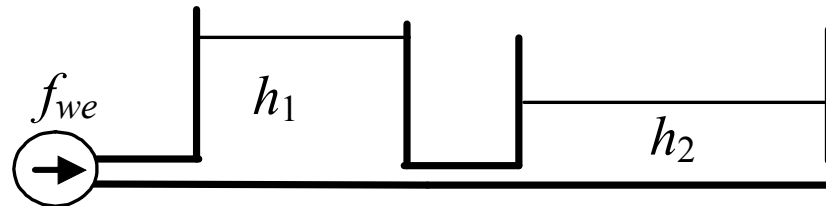
$$A s h(s) + a h(s) = f_{we}(s)$$

$$h(s) = \frac{1}{A s + a} f_{we}(s)$$



$$\begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = q_e - k_{12}(T_1 - T_2) \\ C_2 \dot{T}_2 = k_{12}(T_1 - T_2) - k_f T_2 + k_f T_0 \end{cases}$$

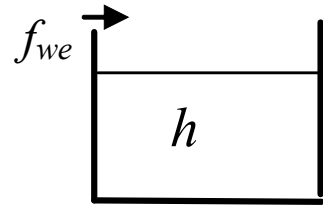
$$k_f = c_p \rho f_0$$



$$\begin{cases} S_1 \dot{h}_1 = f_{we} - k_{12}(h_1 - h_2) \\ S_2 \dot{h}_2 = k_{12}(h_1 - h_2) - k_2 h_2 \end{cases}$$

# Samowyrównywanie, inercja, opóźnienie, unilateralność

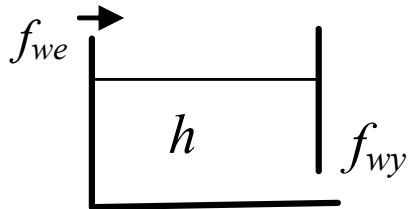
całkowanie



$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t)$$

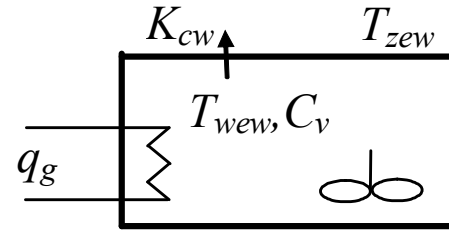
$$h_1(s) = \frac{1}{As} f_{we}(s)$$

inercja (samowyrównywanie)



$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - ah(t)$$

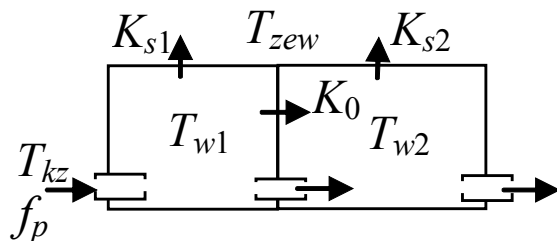
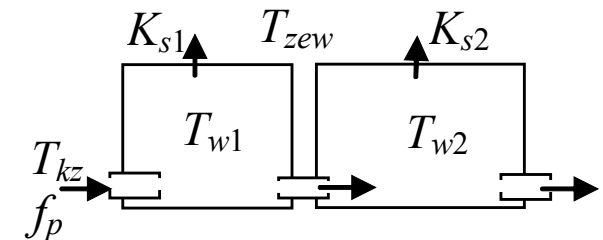
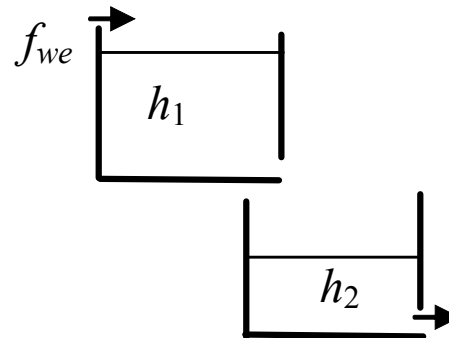
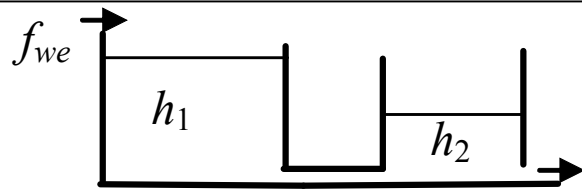
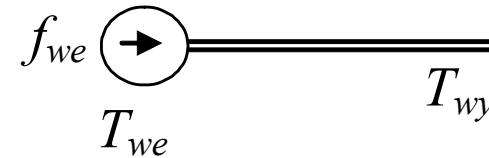
$$h(s) = \frac{1}{As + a} f_{we}(s)$$



opóźnienie

$$T_{wy}(t) = T_{we}(t - T_0)$$

$$T_{wy}(s) = e^{-sT_0} T_{we}(s)$$

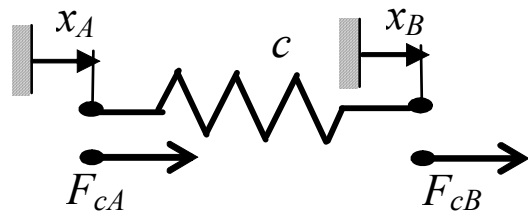


unilateralność

# Elementy elektryczne i mechaniczne

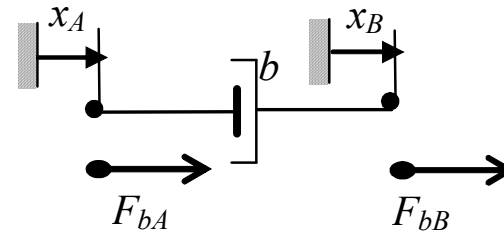
Tab. I-6. Stosowane opisy podstawowych elementów elektrycznych

	$u(i)$		$i(u)$	$u(q)$	$Z(s)$
rezystor (R)	$u(t) = Ri(t)$	$u(s) = Ri(s)$	$i(t) = Gu(t)$	$u(t) = R\dot{q}(t)$	$R$
kondensator (C)	$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$u(s) = \frac{1}{sC} i(s)$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = \frac{1}{C} q(t)$	$\frac{1}{sC}$
cewka (L)	$e_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$	$u(s) = sLi(s)$	$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$	$u(t) = L\ddot{q}(t)$	$sL$



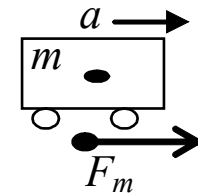
$$F_{cA}(t) = c(x_A(t) - x_B(t))$$

$$F_{cB}(t) = c(x_B(t) - x_A(t))$$



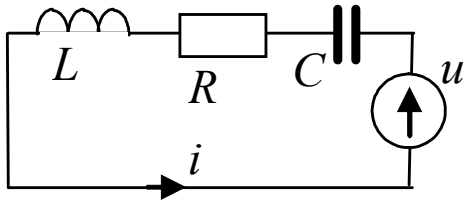
$$F_{bA}(t) = b(\dot{x}_A(t) - \dot{x}_B(t))$$

$$F_{bB}(t) = b(\dot{x}_B(t) - \dot{x}_A(t))$$



$$F_m(t) = m\ddot{x}(t)$$

# Układy elektryczne i mechaniczne

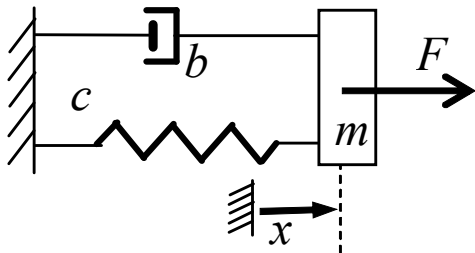


$$j\omega LI + RI + \frac{1}{j\omega C} I = U$$

$$sLi(s) + Ri(s) + \frac{1}{sC} i(s) = u(s)$$

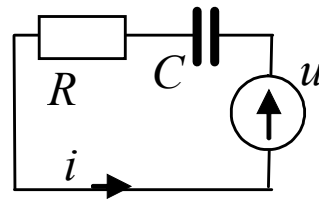
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t)$$

$$L\dot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = u(t)$$



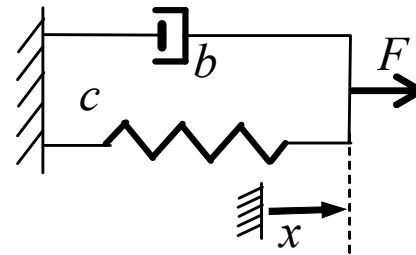
$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

$$ms^2 x(s) + bsx(s) + cx(s) = F(s)$$



$$R\dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = u(t)$$

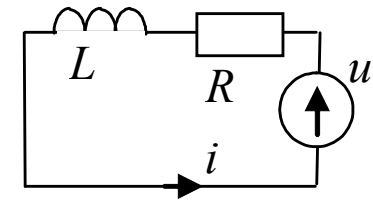
$$q(s) = \left( \frac{1}{sR + 1/C} \right) u(s)$$



$$b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

$$bsx(s) + cx(s) = F(s)$$

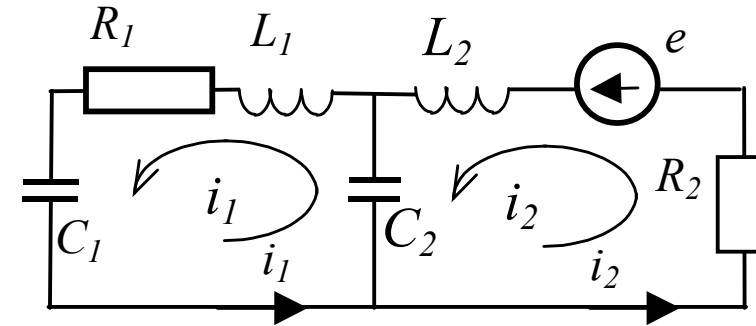
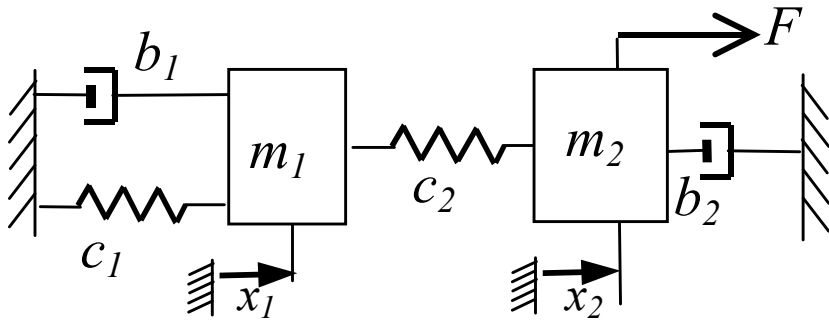
$$x(s) = \left( \frac{1}{sb + c} \right) F(s)$$



$$sLi(s) + Ri(s) = u(s)$$

$$i(s) = \left( \frac{1}{sL + R} \right) u(s)$$

## Analogia układów mechanicznych i elektrycznych



$$\begin{cases} F = m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) \\ 0 = m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = s^2 m_2 x_2 + s b_2 x_2 + c_2 (x_2 - x_1) \\ 0 = s^2 m_1 x_1 + s b_1 x_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = s L_2 i_2 + R_2 i_2(s) + \frac{i_2 - i_1}{s C_2} \\ 0 = s L_1 i_1 + R_1 i_1 + \frac{i_1}{s C_1} + \frac{i_1 - i_2}{s C_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{q_2 - q_1}{C_2} \\ 0 = L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_2} \end{cases}$$

# Analogie układów cieplnych, elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych

Tab.I-7. Przykłady analogii

	obiekty cieplne	obwody elektryczne			układy mechaniczne		układy hydrauliczne		
							zamknięte		otwarte
magazyn	$Q = C_V T$	$q = Cu$		$u = \frac{1}{C} q$		$F = cx$			$V = Ah$
	$\frac{dQ}{dt} = C_V \frac{dT}{dt}$	$\frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$							$\frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt}$
	$q = C_V \frac{dT}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int idt$		$F = c \int vdt$		$\Delta p = \frac{K}{V} \int fdt$	$f = \frac{V}{K} \frac{d\Delta p}{dt}$	
przewodność (lub opór)	$q = K_c T$	$i = \frac{1}{R} u$	$u = Ri$	$u = R \frac{dq}{dt}$	$F = bv$	$F = b \frac{dx}{dt}$	$\Delta p \approx Rf$ <sup>(*)</sup>	$f = \frac{1}{R} \Delta p$	$f \approx ah$ <sup>(**)</sup>
bezwładność		$i = \frac{1}{L} \int udt$	$u = L \frac{di}{dt}$	$u = L \frac{d^2 q}{dt^2}$	$F = m \frac{dv}{dt}$	$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$	$\Delta p = m \frac{df}{dt}$		
źródła	$q$	$i$	$u$		$F$		$\Delta p$	$f$	$f$
funkcje czasu	$Q(t), q(t), T(t)$	$q(t), i(t), u(t)$			$x(t), v(t), F(t)$		$\Delta p(t), f(t)$		$V(t), f(t), h(t)$
bilans	$\sum q$	$\sum i, \sum u$			$\sum F$		$\sum q, \sum f$		$\sum f$

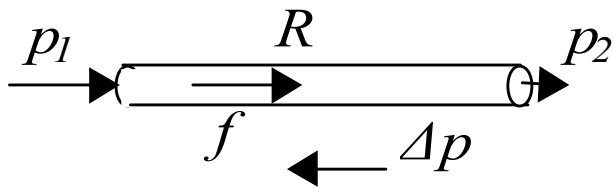
Uwaga: W tabeli pominięto oznaczenie funkcji czasu, na przykład jest  $T$  zamiast  $T(t)$

Analogie dotyczą opisu liniowego, natomiast zależności dokładne to: <sup>(\*)</sup>  $\Delta p = Rf^2$ , <sup>(\*\*)</sup>  $f = k\sqrt{h}$

Zmienne i jednostki:

- obiekty cieplne:  $Q(t)$  – ciepło [J],  $q(t)$  – moc, strumień ciepła [W],  $T(t)$  – temperatura [K],[°C];
- obwody elektryczne:  $q(t)$  – ładunek elektryczny [C],  $i(t)$  – natężenie prądu [A],  $u(t)$  – napięcie, różnica potencjałów [V];
- układy mechaniczne:  $x(t)$  – przesunięcie [m],  $v(t)$  – prędkość [m/s],  $F(t)$  – siła [N];
- układy hydrauliczne:  $V(t)$  – objętość [m<sup>3</sup>],  $f(t)$  – przepływ, strumień [m<sup>3</sup>/s],  $\Delta p(t)$  – ciśnienie [Pa=N/m<sup>2</sup>].

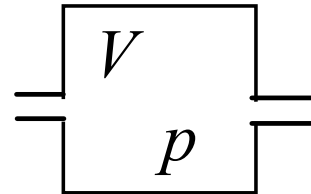
# Układy hydrauliczne i pneumatyczne (bez przemian gazowych)



$$\Delta p(t) = R f(t)$$

lub

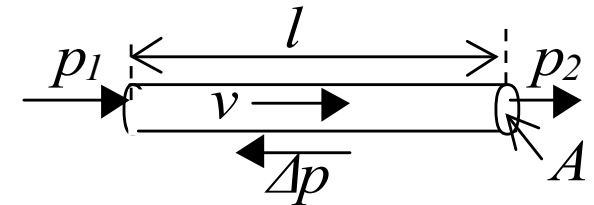
$$\Delta p(t) = R f^2(t)$$



$$dp(t) = K \frac{dV(t)}{V}$$

$$dV(t) = f(t) dt$$

$$\frac{V}{K} \frac{dp(t)}{dt} = f(t)$$

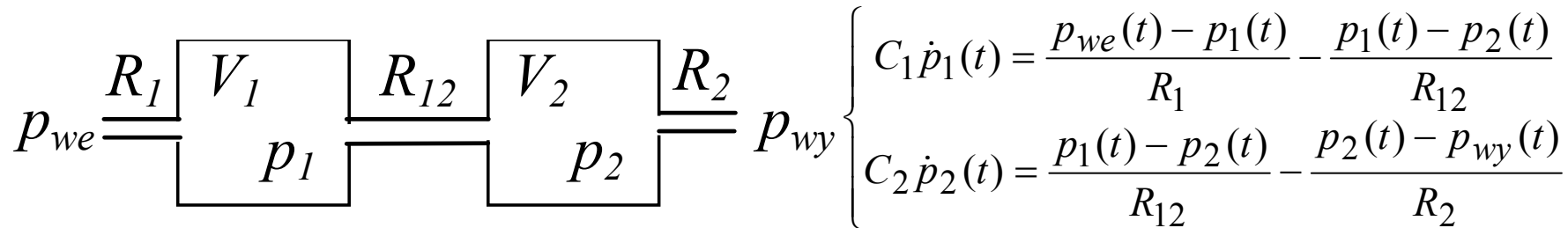


$$F(t) = m a(t)$$

$$\Delta p(t) A = \rho l A \frac{dv(t)}{dt}$$

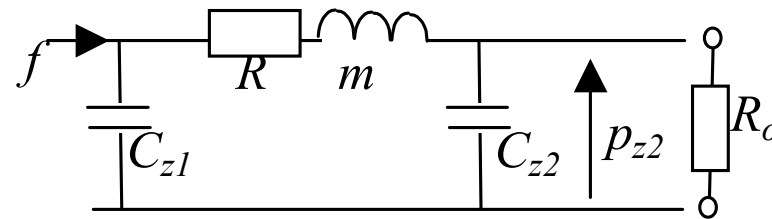
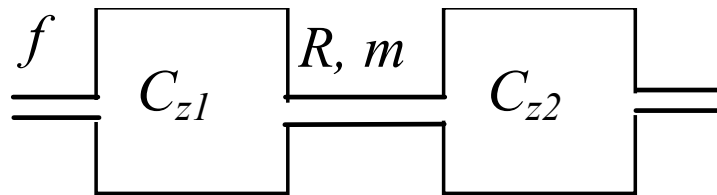
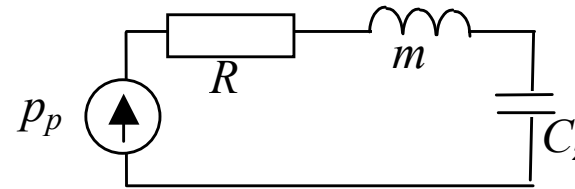
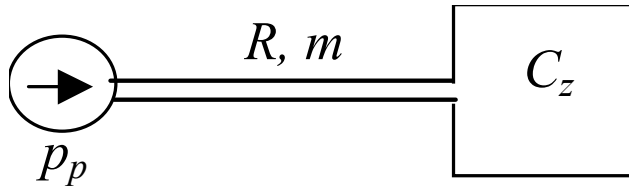
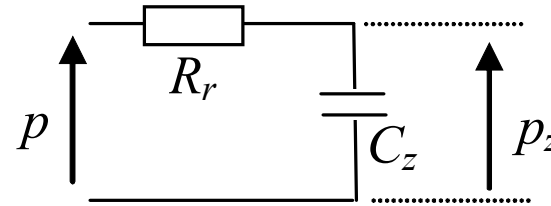
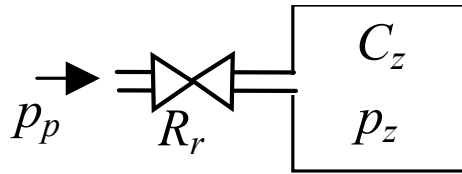
$$\Delta p(t) = m \frac{df(t)}{dt}$$

$$m = \rho l / A$$



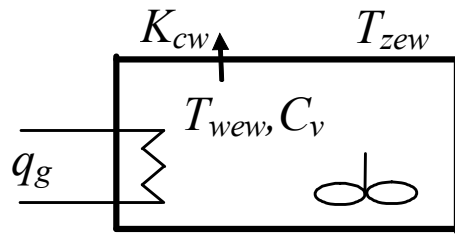
$$\begin{cases} C_1 \dot{p}_1(t) = \frac{p_{we}(t) - p_1(t)}{R_1} - \frac{p_1(t) - p_2(t)}{R_{12}} \\ C_2 \dot{p}_2(t) = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{R_{12}} - \frac{p_2(t) - p_{wy}(t)}{R_2} \end{cases}$$

# Analogia pneumatyczno-elektryczna





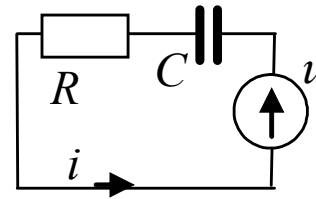
## Analogia ciepłno-elektryczna



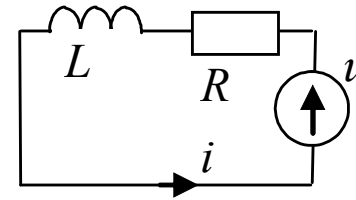
$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_c(T_{wew}(t) - T_{zew}(t))$$

$$C_v s T_{wew}(s) + K_c T_{wew}(s) = q_g(s) + K_c T_{zew}(s)$$

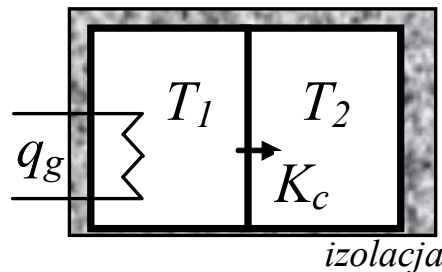
$$T_{wew}(s) + T_{zew}(s) = \frac{1}{C_v s + K_c} q_g(s) + \frac{K_c}{C_v s + K_c} T_{zew}(s)$$



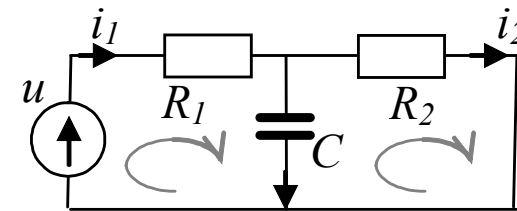
$$q(s) = \left( \frac{1}{sR + 1/C} \right) u(s)$$



$$i(s) = \left( \frac{1}{sL + R} \right) u(s)$$



$$\begin{cases} C_{v1} \dot{T}_1(t) = q_g(t) - K_c(T_1(t) - T_2(t)) \\ C_{v2} \dot{T}_2(t) = K_c(T_1(t) - T_2(t)) \end{cases}$$



$$\begin{cases} R_1 \dot{q}_1(t) + \frac{1}{C} (q_1(t) - q_2(t)) = u(t) \\ R_2 \dot{q}_2(t) + \frac{1}{C} (q_2(t) - q_1(t)) = 0 \end{cases}$$

# Analogie układów cieplnych, elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych

Tab.I-7. Przykłady analogii

	obiekty cieplne	obwody elektryczne			układy mechaniczne		układy hydrauliczne		
							zamknięte		otwarte
magazyn	$Q = C_V T$	$q = Cu$		$u = \frac{1}{C} q$		$F = cx$			$V = Ah$
	$\frac{dQ}{dt} = C_V \frac{dT}{dt}$	$\frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$							$\frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt}$
	$q = C_V \frac{dT}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int idt$		$F = c \int vdt$		$\Delta p = \frac{K}{V} \int fdt$	$f = \frac{V}{K} \frac{d\Delta p}{dt}$	
przewodność (lub opór)	$q = K_c T$	$i = \frac{1}{R} u$	$u = Ri$	$u = R \frac{dq}{dt}$	$F = bv$	$F = b \frac{dx}{dt}$	$\Delta p \approx Rf$ <sup>(*)</sup>	$f = \frac{1}{R} \Delta p$	$f \approx ah$ <sup>(**)</sup>
bezwładność		$i = \frac{1}{L} \int udt$	$u = L \frac{di}{dt}$	$u = L \frac{d^2 q}{dt^2}$	$F = m \frac{dv}{dt}$	$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$	$\Delta p = m \frac{df}{dt}$		
źródła	$q$	$i$	$u$		$F$		$\Delta p$	$f$	$f$
funkcje czasu	$Q(t), q(t), T(t)$	$q(t), i(t), u(t)$			$x(t), v(t), F(t)$		$\Delta p(t), f(t)$		$V(t), f(t), h(t)$
bilans	$\sum q$	$\sum i, \sum u$			$\sum F$		$\sum q, \sum f$		$\sum f$

Uwaga: W tabeli pomięto oznaczenie funkcji czasu, na przykład jest  $T$  zamiast  $T(t)$

Analogie dotyczą opisu liniowego, natomiast zależności dokładne to: <sup>(\*)</sup>  $\Delta p = Rf^2$ , <sup>(\*\*)</sup>  $f = k\sqrt{h}$

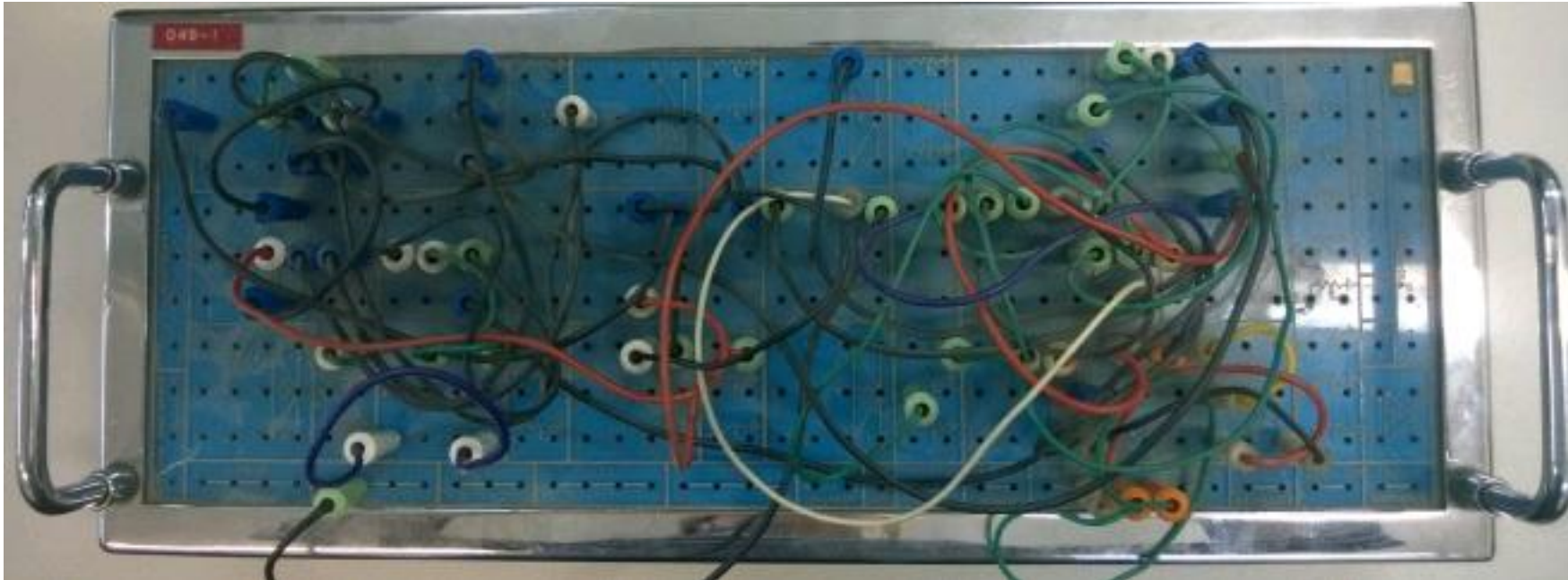
Zmienne i jednostki:

- obiekty cieplne:  $Q(t)$  – ciepło [J],  $q(t)$  – moc, strumień ciepła [W],  $T(t)$  – temperatura [K],[°C];
- obwody elektryczne:  $q(t)$  – ładunek elektryczny [C],  $i(t)$  – natężenie prądu [A],  $u(t)$  – napięcie, różnica potencjałów [V];
- układy mechaniczne:  $x(t)$  – przesunięcie [m],  $v(t)$  – prędkość [m/s],  $F(t)$  – siła [N];
- układy hydrauliczne:  $V(t)$  – objętość [m<sup>3</sup>],  $f(t)$  – przepływ, strumień [m<sup>3</sup>/s],  $\Delta p(t)$  – ciśnienie [Pa=N/m<sup>2</sup>].

## Zastosowania analogii

### Modele analogowe

### Maszyna analogowa (analogowa maszyna licząca)





## Analogowa maszyna licząca (maszyna/komputer analogowy)



## Zastosowania analogii

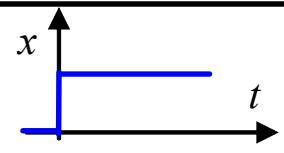
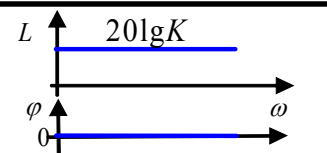
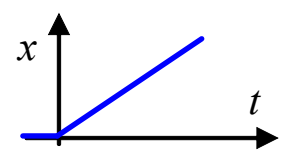
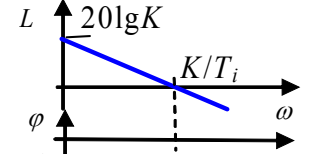
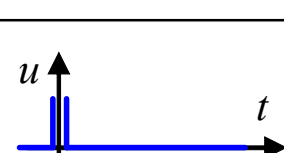
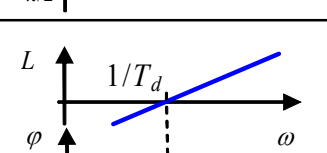
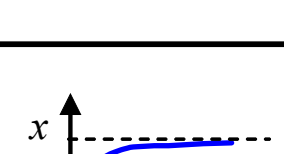
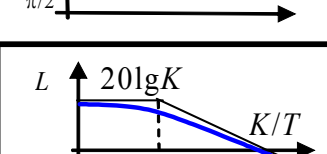
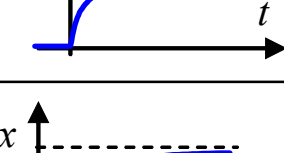
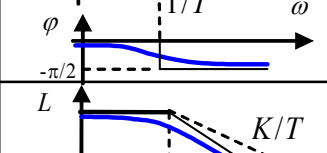
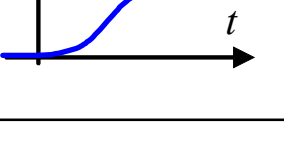
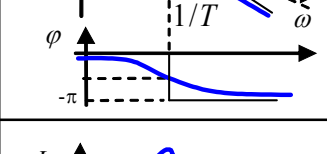
Przeniesienie wiedzy (doświadczenia, metod)

- uwaga na ograniczenia (zakres analogii)
- analogia – podobieństwo (nie identyczność)

Uogólnienie

- teoria sterowania

# Podstawowe obiekty dynamiki (człony dynamiki)

obiekt (człon)	$G(s)$	odp.skokowa	$L(\omega), \varphi(\omega)$
<p>proporcjonalny</p> $x(t) = b_0 u(t)$	$K$		
<p>całkujący</p> $a_1 \dot{x}(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{T_i s}$ $T_i > 0$		
<p>różniczkujący</p> $a_0 x(t) = b_1 \dot{u}(t)$	$T_d s$ $T_d > 0$		
<p>inercyjny</p> $a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{T s + 1}$ $T > 0$		
<p>inercyjny 2 rzędu</p> $a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $T_1 > 0, T_2 > 0$		
<p>oscylacyjny</p> $a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$	$\frac{K}{s^2 + 2\xi\omega T s + \omega^2}$ $\frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ $\omega > 0, T > 0$		

Uwaga: Równanie różniczkowe odpowiada transmitancji członu dynamiki jeśli spełnia warunki dotyczące parametrów