Równania stanu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\dot{x} = Ax + Bu$ równania stanu

$y = Cx + Du$ równania wyjściowe

Równanie n-tego rzędu → układ n równań 1-ego rzędu

$$a_3\dddot{x}(t)+a_2\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=u(t) \qquad a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$$

rząd ?

$$x = x_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad = \dot{x}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad = \ddot{x}$$

$$\dot{x}_3 \quad = \dddot{x}$$

$$a_3\dot{x}_3(t)+a_2x_3(t)+a_1x_2(t)+a_0x_1(t)=u(t)$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=\left[u(t)-a_0x_1(t)-a_1x_2(t)-a_2x_3(t)\right]/a_3\end{cases}$$

rząd ?

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0-\lambda & 1\\ \dfrac{-a_0}{a_3} & \dfrac{-a_1}{a_3} & \dfrac{-a_2}{a_3}-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$$

stopień ?

Badanie układów liniowych: 1) punkt równowagi

(składowa wymuszona przy stałym wymuszeniu)

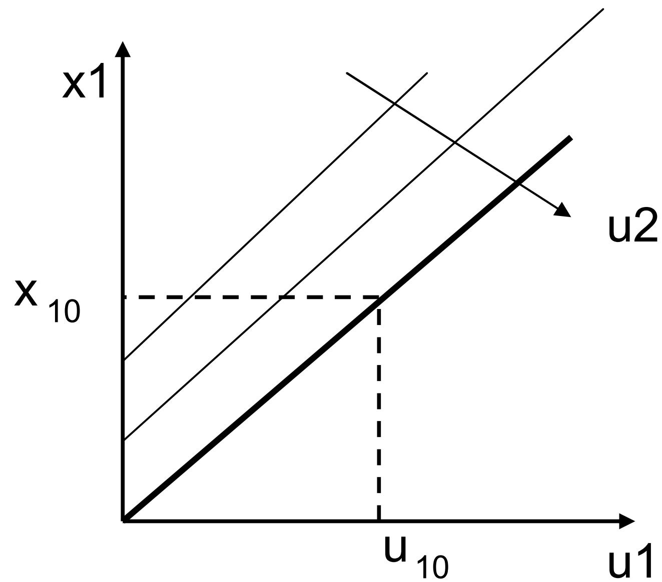
$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$a_0 x = b_0 u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ 0 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2 \end{cases}$$

charakterystyka statyczna
(punkt równowagi)



Badanie układów liniowych: 2) stabilność

(składowa swobodna)

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

Rozwiązanie swobodne:
- równanie charakterystyczne -> pierwiastki
- suma przebiegów wykładniczych
- przebiegi sin/cos z nałożonym przebiegiem wykładniczym
- układ jest stabilny jeśli Re(λ_i) < 0

Równanie charakterystyczne – własności wielomianu

kryteria położenia pierwiastków

kryteria stabilności

Kryteria stabilności

$$a_n\lambda^n + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$$

kryterium Routha

1) wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera i mają jednakowy znak, czyli

$a_i > 0$, dla *i=0,1,...n*

2) wszystkie współczynniki pierwszej kolumny tablicy Routha są dodatnie:

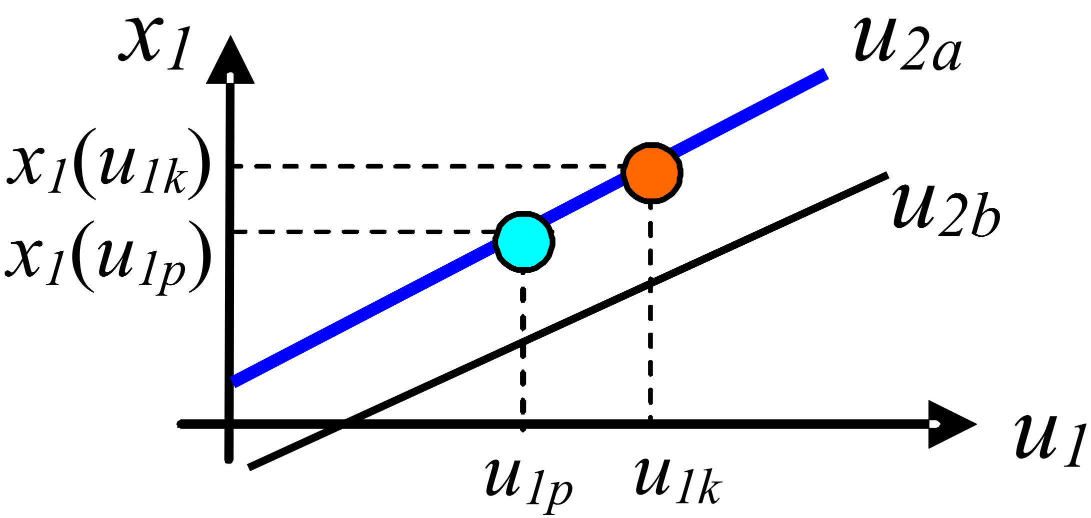
$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \qquad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}$$

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}$$

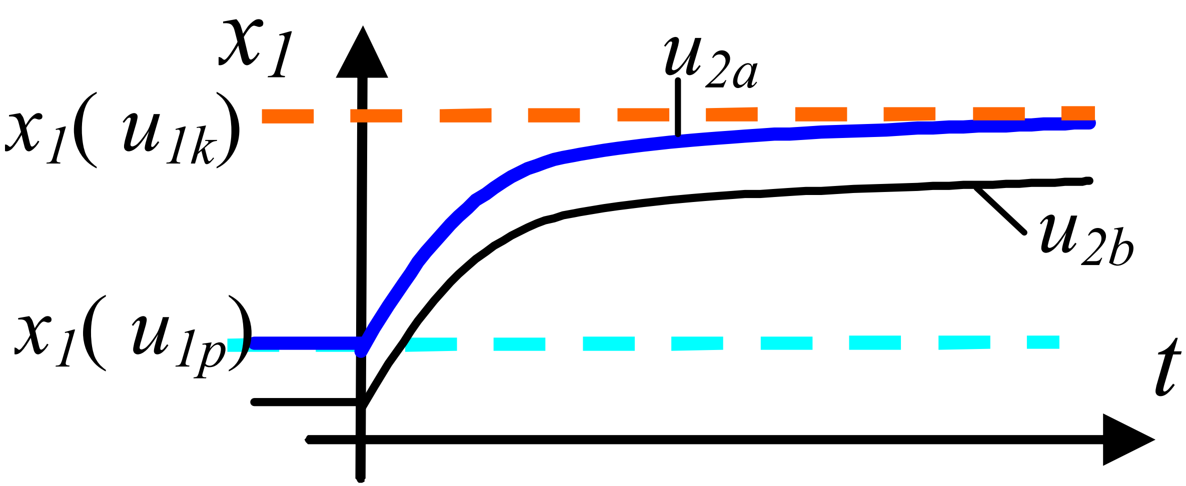
Charakterystyki statyczne i dynamiczne (czasowe)



$$x_1 = f(u_1, u_2)$$

$$x_1 = f_1(u_1);\ u_2 = u_{2a}$$

$$x_1 = f_2(u_1);\ u_2 = u_{2b}$$



Eksperymentalne wyznaczanie charakterystyk czasowych

Transmitancja

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Równanie różniczkowe liniowe

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Równanie charakterystyczne

Założenie: Równanie różniczkowe liniowe

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = f(s)$	$\mathcal{L}\left[af_1(t) + bf_2(t)\right] = af_1(s) + bf_2(s)$	$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sf(s) - f(0_+)$
Transformata funkcji	*Twierdzenie o liniowości*	*Transformata funkcji pochodnej* *Założenie:* $f(0_+) = 0$

$$a_n s^n X(s) + \ldots + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_m s^m U(s) + \ldots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$\left(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0\right) X(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0\right) U(s)$$

Równanie operatorowe

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \boxed{\frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = G(s)}$$

Transmitancja

Transmitancja = transformata funkcji wyjściowej do transformaty funkcji wejściowej
= funkcja przejścia, opisująca sposób przetwarzania sygnału

Założenia: Równanie różniczkowe liniowe i zerowe warunki początkowe

$$M(s) = 0 \longrightarrow a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Równanie charakterystyczne

Transmitancja – stan ustalony (punkt równowagi)

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} \longrightarrow X(s) = G(s)U(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s)$$, jeśli $\lim_{t\to\infty} x(t)$ istnieje

Dla *u(t)*=1*(t)*, czyli *U(s)* = 1/*s*	$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s)$
Dla *u(t)*=*k*, czyli *U(s)* = *k*/*s*	$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{k}{s} = \lim_{s\to 0} G(s)k$
Dla *u(t)*=δ*(t)*, czyli *U(s)* = 1	$\lim_{s\to 0} sG(s)$
Dla *u(t)*=*sin t*, czyli $U(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Granica?

Warunki początkowe

Równanie różniczkowe n-tego rzędu:

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$$

n warunków początkowych:

$$x^{(n)}(0) = x_{0n}; x^{(n-1)}(0) = x_{0n-1}; \ldots; \dot{x}(0) = x_{01}; x(0) = x_0$$

Rozwiązanie i symulacja dla dowolnych warunków początkowych

$$a_n s^n X(s) + \ldots + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_0 U(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{a f_1(t) + b f_2(t)\right\} = a f_1(s) + b f_2(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = s f(s) - f(0_+) = \qquad s f(s)$$

$$f(0_+) = 0$$

Transmitancja:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$

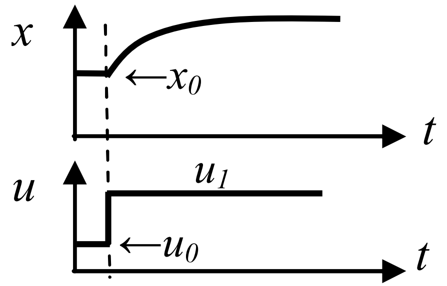
Zerowe warunki początkowe:

$$x^{(n-1)}(0) = 0; \quad \ldots; \quad \dot{x}(0) = 0$$

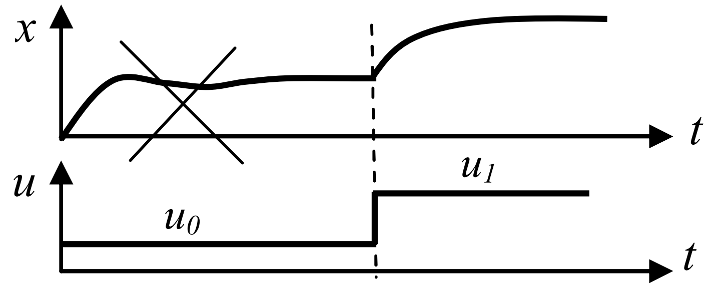
$$u(0) = 0; x(0) = 0$$

Rozwiązanie i symulacja tylko dla zerowych warunków początkowych

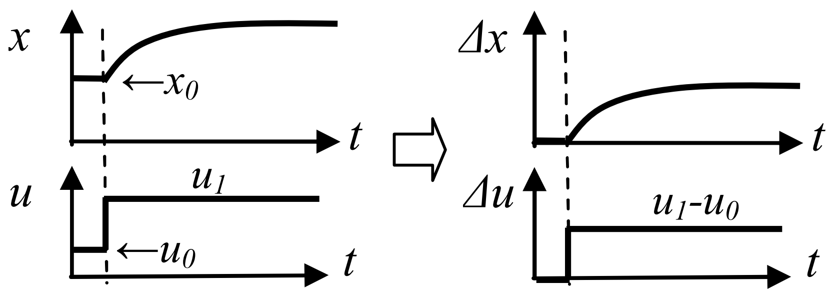
Reakcja skokowa od dowolnego stanu ustalonego



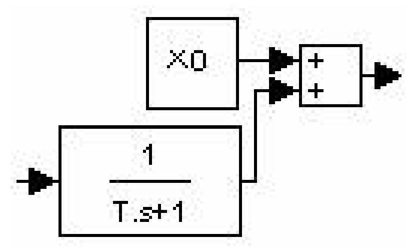
Symulacja od stanu ustalonego



Symulacja od przypadkowego stanu



Przesunięcie układu odniesienia



Ustalenie punktu pracy w modelu

Transmitancje układów wielowymiarowych

Przykład
$$\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

Operacje macierzowe

$$s\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{m_1} & \frac{a_2}{m_1} \\ \frac{b_1}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{a_1}{m_1} & \frac{-a_2}{m_1} \\ \frac{-b_1}{m_2} & s + \frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

Transmitancje układów wielowymiarowych

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{a_1}{m_1} & \frac{-a_2}{m_1} \\ \frac{-b_1}{m_2} & s + \frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \frac{\det\left(\frac{m_2 s + b_2}{m_2}\right)}{\det(sI - A)} & (-1)^{2+1} \frac{\det\left(\frac{-a_2}{m_1}\right)}{\det(sI - A)} \\ (-1)^{1+2} \frac{\det\left(\frac{-b_1}{m_2}\right)}{\det(sI - A)} & (-1)^{2+2} \frac{\det\left(\frac{m_1 s + a_1}{m_1}\right)}{\det(sI - A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \left(\frac{m_1 s + a_1}{m_1}\right)\left(\frac{m_2 s + b_2}{m_2}\right) - \frac{b_1 a_2}{m_1 m_2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_2 s + b_2}{M(s)} & \frac{a_2}{M(s)} \\ \frac{b_1}{M(s)} & \frac{m_1 s + a_1}{M(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$M(s) = (m_1 s + a_1)(m_2 s + b_2) - b_1 a_2$$

Transmitancje układów wielowymiarowych

Przykład $\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t)+a_1x_1(t)-a_2x_2(t)=u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t)-b_1x_1(t)+b_2x_2(t)=u_2(t) \end{cases}$

Równania operatorowe

$$\begin{cases} (m_1s+a_1)x_1(s)=a_2x_2(s)+u_1(s) \\ (m_2s+b_2)x_2(s)=b_1x_1(s)+u_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1(s)x_1(s)=a_2x_2(s)+u_1(s) \\ M_2(s)x_2(s)=b_1x_1(s)+u_2(s) \end{cases} \longrightarrow \quad x_1(s)=\frac{a_2x_2(s)+u_1(s)}{M_1(s)}$$

$$M_2(s)x_2(s)=b_1\frac{a_2x_2(s)+u_1(s)}{M_1(s)}+u_2(s) \quad \Big|\cdot M_1(s)$$

$$M_1(s)M_2(s)x_2(s)=b_1a_2x_2(s)+b_1u_1(s)+M_1(s)u_2(s)$$

$$\boxed{x_2(s)=\frac{b_1u_1(s)+M_1(s)u_2(s)}{M_1(s)M_2(s)-b_1a_2}}$$

$$M_1(s)x_1(s)=a_2x_2(s)+u_1(s)= \quad a_2\frac{b_1u_1(s)+M_1(s)u_2(s)}{M_1(s)M_2(s)-b_1a_2}+u_1(s)$$

$$x_1(s)=\frac{a_2b_1u_1(s)+a_2M_1(s)u_2(s)+(M_1(s)M_2(s)-b_1a_2)u_1(s)}{M_1(s)(M_1(s)M_2(s)-b_1a_2)}$$

$$\boxed{x_1(s)=\frac{M_2(s)u_1(s)+a_2u_2(s)}{M_1(s)M_2(s)-b_1a_2}}$$

Transmitancje układów wielowymiarowych

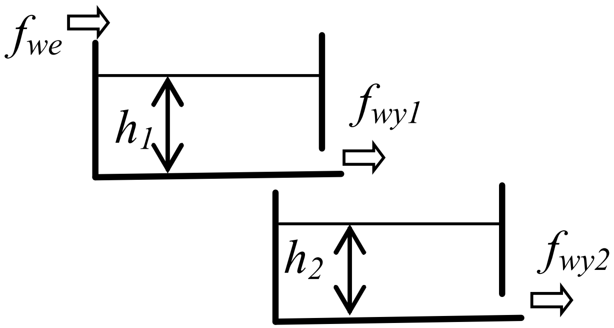
Przykład $\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1x_1(t) - a_2x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1x_1(t) + b_2x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$

$$x_1(s) = \frac{m_2s + b_2}{M(s)}u_1(s) + \frac{a_2}{M(s)}u_2(s)$$

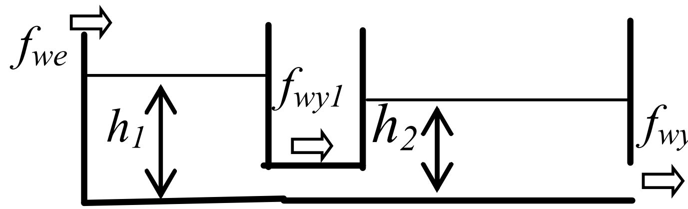
$$x_2(s) = \frac{b_1}{M(s)}u_1(s) + \frac{m_1s + a_1}{M(s)}u_2(s)$$

$$M(s) = (m_1s + a_1)(m_2s + b_2) - b_1a_2$$

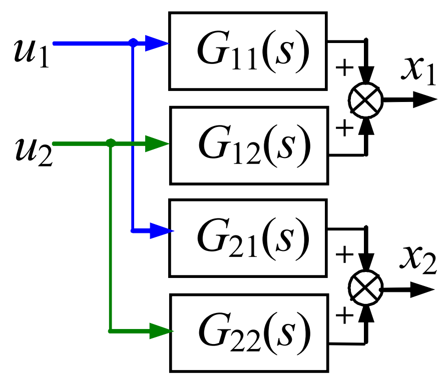
Kaskada niewspółdziałająca



Kaskada współdziałająca



$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$



Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- znana postać rozwiązania swobodnego
- parametry rozwiązania swobodnego - algebraiczne równanie charakterystyczne
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakter.
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  - $u(t)=1(t)$ $x(t)$ $u(t)=\delta(t)$ $dx(t)/dt$
- jeden punkt równowagi
- stabilność / niestabilność globalna
- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)