Równanie równania n-tego rzędu

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

$$a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \longrightarrow a_n (\lambda - \lambda_k) \ldots . (\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

Równanie 2. rzędu

$$\ddot{x}(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_0 x(t) = u(t) \longleftarrow a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t)$$

$$b_0 \neq 0$$

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\,\omega_n\,\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = u(t) \qquad \ddot{x}(t) + 2\xi\,\omega_n\,\dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) = u(t)$$

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad ,\omega_n > 0 \qquad \lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda - \omega_n^2 = 0 \quad ,\omega_n > 0$$

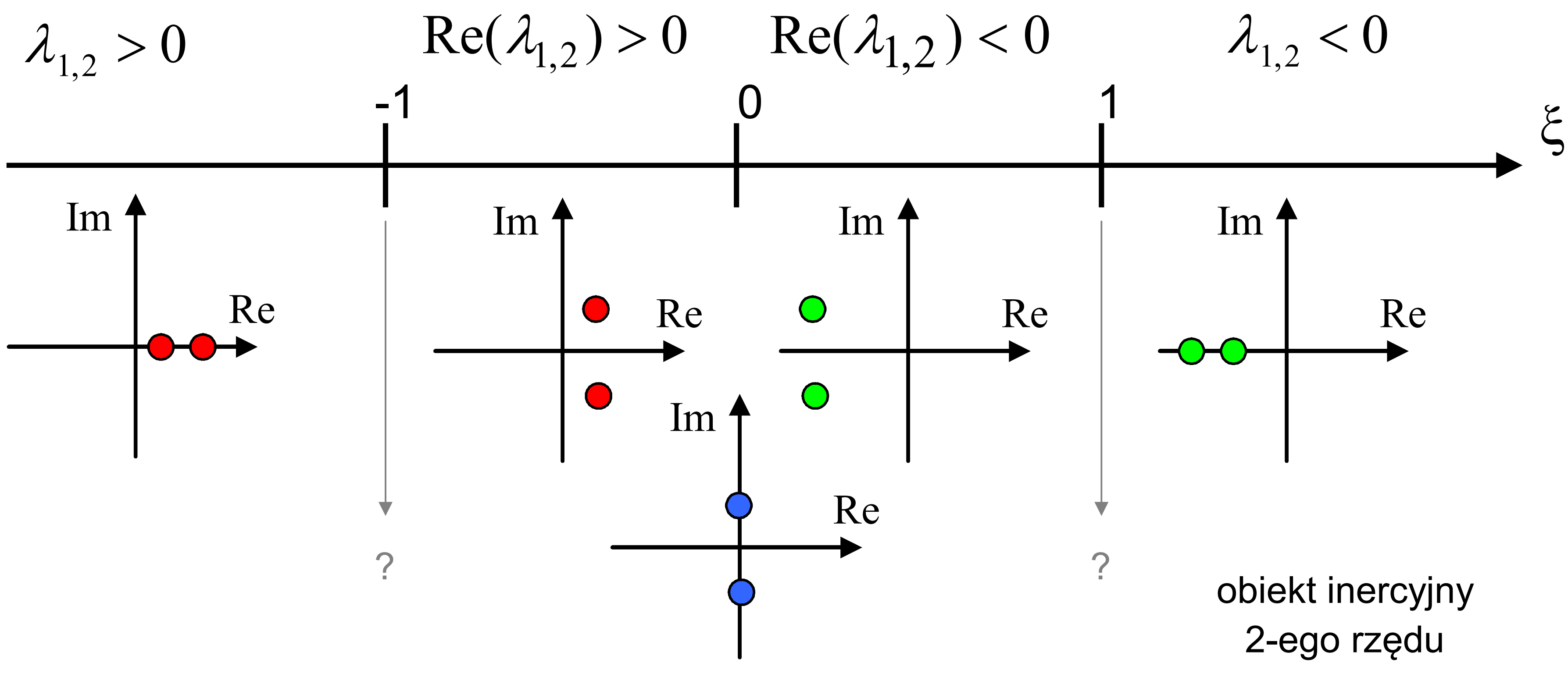
Równanie oscylacyjne

$\omega_n < 0$? oraz $\omega_n = 0$?

Równanie oscylacyjne

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \qquad \omega_n > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \longrightarrow \lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$



Położenie biegunów

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\,\omega_n\,\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t)$$

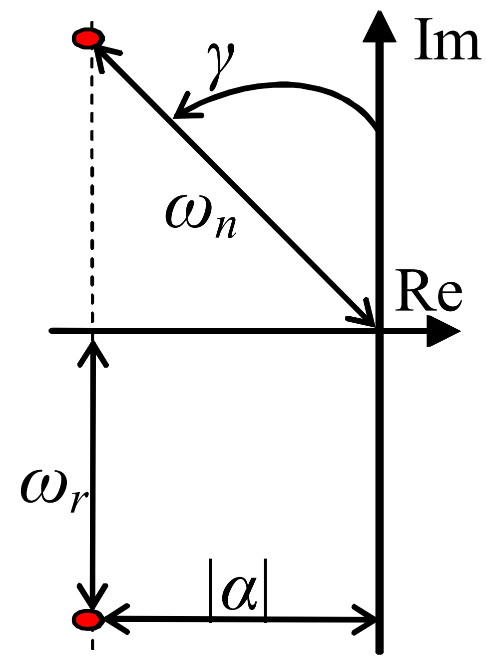
$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega_r$$

$$\alpha = -\xi\omega_n$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \omega_r{}^2} = \sqrt{(-\xi\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2} = \omega_n$$

$$\sin\gamma = \frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2+\omega_r^2}} = \frac{\xi\omega_n}{\sqrt{\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}} = \xi$$



Położenie biegunów a odpowiedź skokowa

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\,\omega_n\,\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t)$$

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega_r$$

$$\alpha = -\xi\omega_n$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Dla $0<\xi<1 \quad (\rightarrow \alpha<0)$

$$x_s(t) = A_1 e^{(\alpha + j\omega_r)t} + A_2 e^{(\alpha - j\omega_r)t} =$$

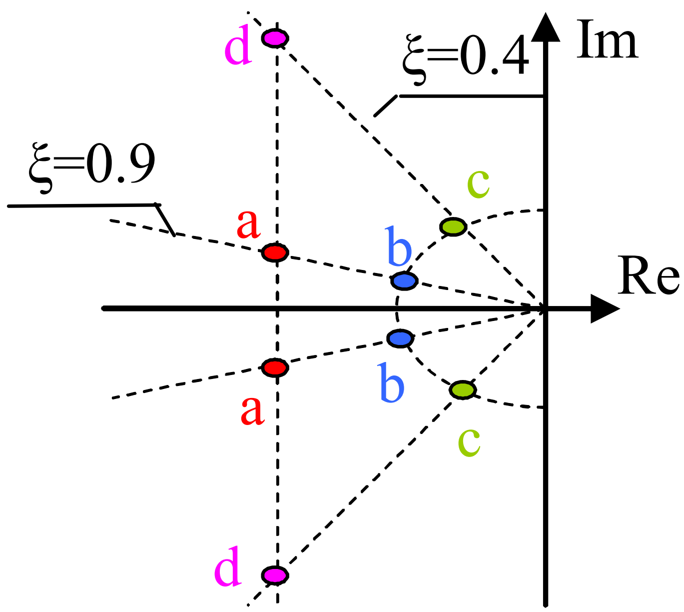
$$= e^{\alpha t}\left(B_1\cos\omega_r t + B_2\sin\omega_r t\right) =$$

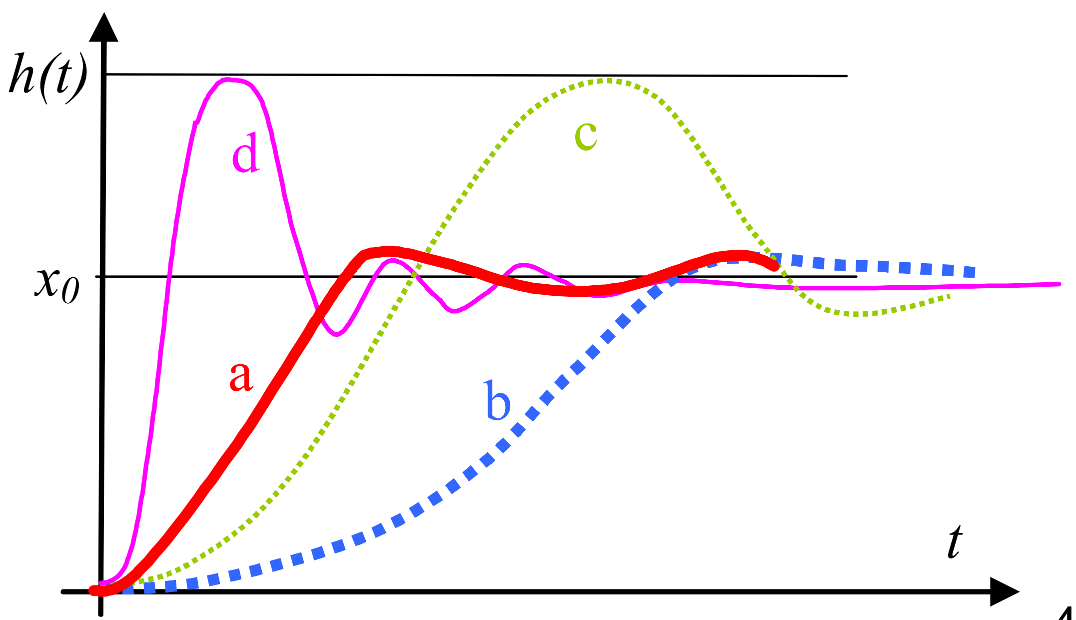
$$= Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t + \varphi)$$

ω_n – pulsacja drgań własnych nietłumionych
ω_r – pulsacja drgań własnych tłumionych
ξ – współczynnik tłumienia względnego

$u(t) = 1(t) \qquad x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = 1 - Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t + \varphi)$$





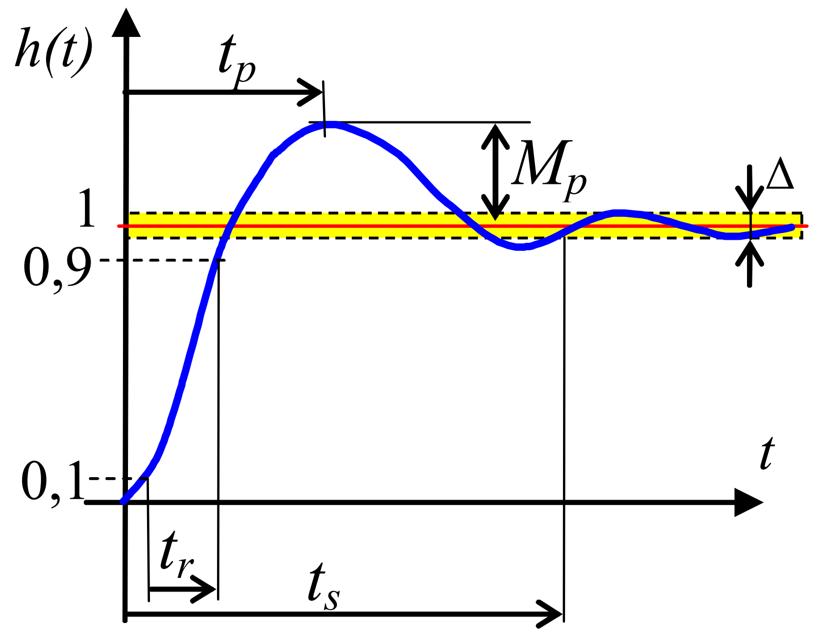
Równanie oscylacyjne a bezpośrednie wskaźniki jakości

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\,\omega_n\,\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t)$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega_r \qquad \alpha = -\xi\omega_n < 0$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$x(t) = 1 - Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t + \varphi)$$



Projektowanie własności układu

$a\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+4x(t)=u(t)$

$a \neq 0$

$$\ddot{x}(t)+\frac{3}{a}\dot{x}(t)+\frac{4}{a}x(t)=\frac{u(t)}{a}$$

$\boxed{a>0}$

$\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda+\omega_n^2=0,\ \omega_n>0$

różne ξ

$\boxed{a<0}$

$\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda-\omega_n^2=0,\ \omega_n>0$

$\boxed{a=0}$

$3\dot{x}(t)+4x(t)=u(t)$

$a\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+4x(t)=u(t)$

$\Delta=9-16a$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$a \neq 0$

$a=0$

$3\dot{x}(t)+4x(t)=u(t)$

$2\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+ax(t)=u(t)$

$$\ddot{x}(t)+\frac{3}{2}\dot{x}(t)+\frac{a}{2}x(t)=\frac{u(t)}{2}$$

$\boxed{a>0}$

$\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda+\omega_n^2=0,\ \omega_n>0$

różne ξ

$\boxed{a<0}$

$\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda-\omega_n^2=0,\ \omega_n>0$

$\boxed{a=0}$

$2\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)=u(t)$

$2\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+ax(t)=u(t)$

$\Delta=9-8a$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{\Delta}}{4}$$

$2\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+4x(t)=u(t)$

$$\ddot{x}(t)+\frac{a}{2}\dot{x}(t)+2x(t)=\frac{u(t)}{2}$$

$\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda+\omega_n^2=0,\ \omega_n>0$

różne ξ

$2\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+4x(t)=u(t)$

$\Delta=a^2-32$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{\Delta}}{4}$$

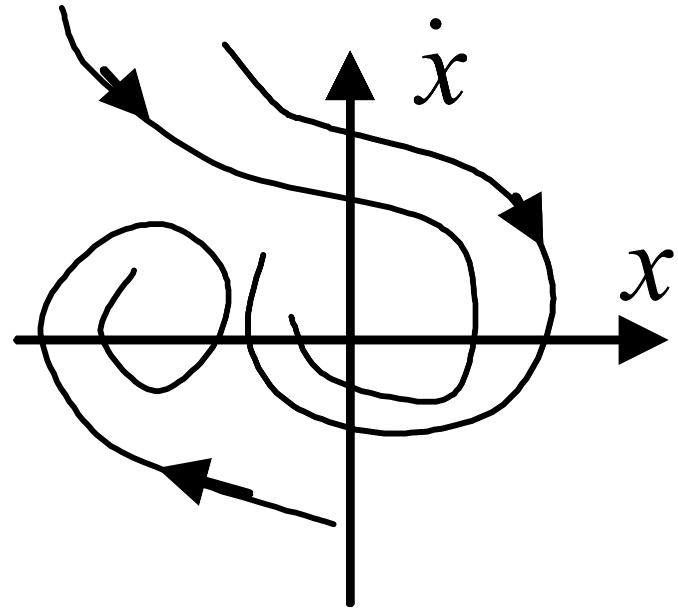
Portrety fazowe

płaszczyzna fazowa $\left(\dot{x},\ x\right)$

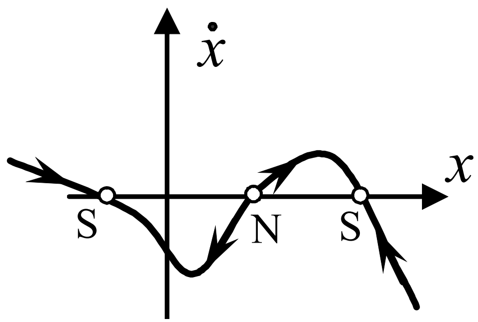
trajektoria fazowa (obraz ewolucji stanu)

- stałe wymuszenie

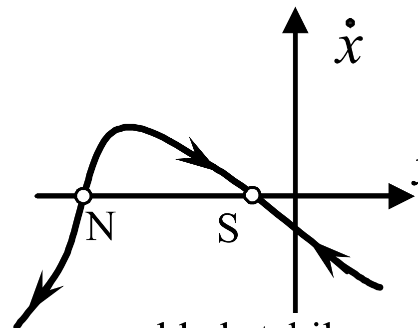
portret fazowy



- punkt(y) równowagi
- kierunek czasu
- przecięcie z osią *x*
- determinizm
- układy 1-2 rzędu
- układy liniowe/nieliniowe
- stabilność



układ stabilny globalnie



układ stabilny tylko lokalnie

Portrety fazowe