Modele obiektów dynamiki

Cele

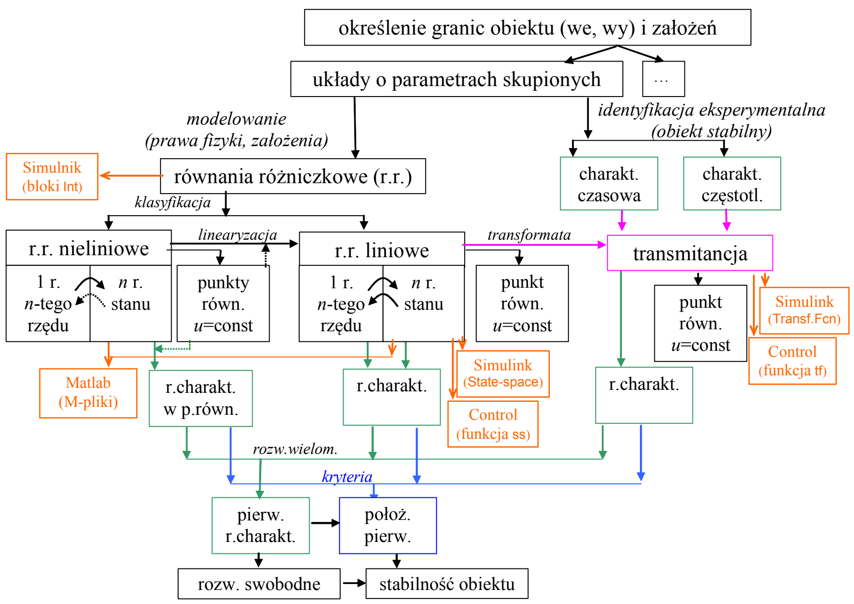
1. Nabycie wiedzy o formach opisu i metodach badania dynamiki obiektów automatyki.
2. Nabycie umiejętności identyfikacji obiektów automatyki.
3. Nabycie umiejętności prowadzenia podstawowych badań analitycznych

4. Nabycie umiejętności przygotowania i prowadzenia symulacyjnych

Efekty kształcenia

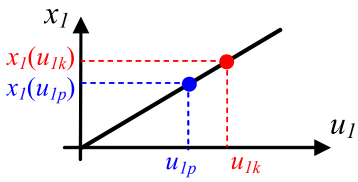
– zna podstawowe matematyczne formy opisu i analizy dynamiki układu – równanie różniczkowe n-tego rzędu, równania stanu i transmitancje.
– zna interpretację własności dynamiki na podstawie położenia biegunów układu, odpowiedzi skokowej i impulsowej, charakterystyk Bodego.
– zna parametry, własności i przykłady podstawowych członów dynamiki.
– zna typowe obszary zastosowania modeli obiektów.
– zna podstawowe metody identyfikacji modeli na podstawie odpowiedzi skokowych i charakterystyk częstotliwościowych.
– zna zasady i sposoby symulacyjnego badania własności dynamiki
– potrafi zidentyfikować proste modele obiektów automatyki
– potrafi przekształcić jedną formę opisu dynamiki na inną: liniowe równanie różniczkowe n-tego rzędu na równania stanu lub transmitancję, równania stanu na transmitancje.
– potrafi wyznaczyć analitycznie stan równowagi i zbadać stabilność układu liniowego, opisanego równaniem różniczkowym n-tego rzędu, równaniami stanu lub transmitancją
– potrafi wyznaczyć symulacyjnie odpowiedź skokową i impulsową dowolnego układu opisanego równaniami różniczkowymi zwyczajnymi lub transmitancjami przy użyciu pakietu Matlab i Simulink (lub Scilab)
– stosuje precyzyjne pojęcia do opisu zjawisk własności dynamicznych.

Konstrukcja modelu dynamiki i podstawowe badania własności obiektu



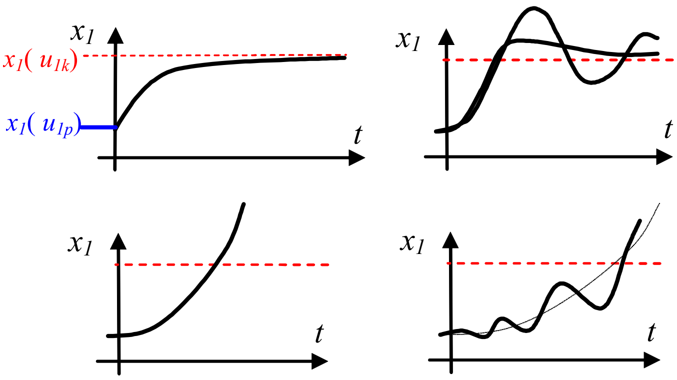
Modele obiektów dynamiki

CO? **DLACZEGO? PO CO?** **JAK?**



$$f\left(x^{(n)}, \ldots, \dot{x}, x, u^{(m)}, \ldots, \dot{u}, u\right) = 0$$

$$G(s) = \frac{x(s)}{u(s)}$$



Modele obiektów dynamiki

CO? **DLACZEGO? PO CO?** **JAK?**

- opis statyczny
- opis dynamiczny

  - reakcje – stabilność,oscylacje
  - własności – obiektu, u.regulacji

    - teoretycznie
    - eksperymentalnie

Zastosowanie modeli dynamiki

- Poszukiwanie rozwiązań analitycznych
- Podstawa do symulacji zachowania obiektów
- Analityczne i komputerowo wspomagane projektowanie układów regulacji

- Nabywanie doświadczenia
- Zastosowanie wyników teoretycznych w praktyce
  - Podaj przykład obiektu typu inercyjnego?
    - Co to znaczy typ inercyjny? Jakie ma cechy?
    - Jak rozpoznać obiekty tego typu?
  - Zaproponuj układ sterowania dla danego obiektu?
    - Do jakiej klasy zagadnień należy obiekt? (Jakie są klasy?)
    - Jak rozwiązuje się sterowanie w danej klasie?

Pytamy o …

- Co opisuje dynamika obiektu?
- Co powoduje, że zmiany w rzeczywistych układach nie zachodzą natychmiast?
- Po co zajmować się dynamiką zjawisk?

Odpowiedzi …

– na koniec semestru ☺

Słowniczek …

- równania (model) dynamiki układu, opis dynamiczny i statyczny
- wymuszenie, zakłócenie, sterowanie
- równania stanu, zmienna stanu
- transmitancja (operatorowa, widmowa)
- rozwiązanie równania różniczkowego (swobodne, wymuszone, ogólne)
- punkt równowagi, stan ustalony (z r.różniczkowego, z transmitancji)
- równanie charakterystyczne i statyczne
- pierwiastki równania charakterystycznego
- bieguny i zera transmitancji
- charakterystyka statyczna
- odpowiedzi czasowe
- charakterystyki częstotliwościowe
- podstawowe człony dynamiki: proporcjonalny, całkujący, różniczkujący, inercyjny, oscylacyjny, opóźniający
- [linearyzacja dynamiczna w punkcie pracy, macierz Jacobianu]

Równanie różniczkowe zwyczajne - klasyfikacja

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Współczynniki a_i i b_i	*Równanie różniczkowe*
stałe	liniowe stacjonarne
stałe lub funkcje czasu	liniowe niestacjonarne
zależne od x, u lub ich pochodnych	nieliniowe

Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe - rozwiązanie

zasada superpozycji

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t)$$

rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa) — rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona)

Metoda klasyczna $b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$

I. Rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa) $u(t)=u_0$

1) równanie jednorodne: $b\dot{x}_s(t)+cx_s(t)=0$

2) zakładana postać $x_s(t)$: $x_s(t)=Ae^{\lambda t}$

$\dot{x}_s(t)=\lambda Ae^{\lambda t}$

3) podstawienie $x_s(t)$: $b\lambda Ae^{\lambda t}+cAe^{\lambda t}=0 \quad /: Ae^{\lambda t}$

4) równanie charakterystyczne: $b\lambda+c=0$

5) pierwiastki równania charakt.: $\lambda_1=-c/b$

rozwiązanie swobodne: $x_s(t)=A_1e^{-(c/b)t}$

Metoda klasyczna $b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$

II. Rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona) $u(t)=u_0$

1) równanie niejednorodne: $b\dot{x}_w(t)+cx_w(t)=u_0$

2) wymuszenie i pochodne: $u_0,\ 0$

3) postać $x_w(t)$: $x_w(t)=C_1u_0$

$\dot{x}_w(t)=0$

4) podstawienie $x_w(t)$: $b\cdot 0+c\cdot C_1u_0=u_0$

5) stąd $C_1=1/c$

rozwiązanie wymuszone: $x_w(t)=u_0/c$

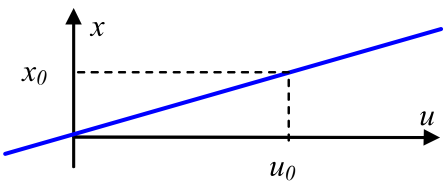
$\dot{x}(t)=0$

$0+cx(t)=u(t)$

$0+cx=u$

$x=u/c$

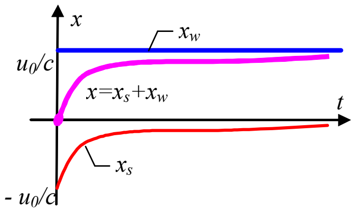
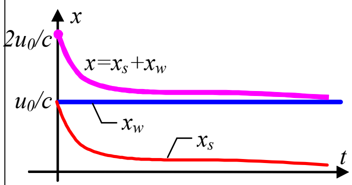
$x_0=u_0/c$



Metoda klasyczna $b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$

$u(t) = u_0$

Rozwiązanie ogólne: $x(t) = \underline{A_1 e^{-(c/b)t}} + \underline{u_0 / c}$

$x(0)=0$	$x(0)=2u_0/c$	$\dot{x}(0)=0$
$0 = A_1 e^{-(c/b)0} + \frac{u_0}{c}$	$\frac{2u_0}{c} = A_1 e^{-(c/b)0} + \frac{u_0}{c}$	$\dot{x}(t) = -\frac{c}{b} A_1 e^{-(c/b)t}$
$A_1 = -\frac{u_0}{c}$	$A_1 = \frac{u_0}{c}$	$0 = -\frac{c}{b} A_1 e^{-(c/b)0}$
$x(t) = -\frac{u_0}{c} e^{-(c/b)t} + \frac{u_0}{c}$	$x(t) = \frac{u_0}{c} e^{-(c/b)t} + \frac{u_0}{c}$	$A_1 = 0$
		$x(t) = \frac{u_0}{c}$

Wybór warunków początkowych

$b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t); \quad u(t) = u_0 \qquad x(t) = A_1 e^{-(c/b)t} + u_0 / c$

stan ustalony: $\dot{x}(0) = 0 \qquad x(t) = \frac{u_0}{c} \qquad b\dot{x}_0 + ax(0) = u_0$

inny stan : $\dot{x}(0) = k \qquad bk + cx(0) = u_0 \rightarrow x(0) = \frac{u_0 - bk}{c}$

$$\dot{x}(t) = -\frac{c}{b} A_1 e^{-(c/b)t} \qquad x(0) = m$$

$$k = -\frac{c}{b} A_1 e^{-(c/b)0} \qquad m = A_1 e^{-(c/b)0} + u_0 / c$$

$$A_1 = -\frac{bk}{c} \qquad A_1 = m - \frac{u_0}{c} = -\frac{bk}{c}$$

$$x(t) = \frac{-bk}{c} e^{-(c/b)t} + \frac{u_0}{c}$$

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$$

$$x^{(n)}(0) = x_{0n}; x^{(n-1)}(0) = x_{0n-1}; \ldots; \dot{x}(0) = x_{01}; x(0) = x_0$$

Metoda klasyczna – przykład: $b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$

$u(t)=\sin\omega t$

1) równanie jednorodne: $b\dot{x}_s(t)+cx_s(t)=0$

4) równanie charakterystyczne: $b\lambda+c=0$

5) pierwiastki równania charakt.: $\lambda_1=-c/b$

rozwiązanie swobodne: $x_s(t)=A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}$

---

1) równanie niejednorodne: $b\dot{x}_w(t)+cx_w(t)=\sin\omega t$

2) wymuszenie i pochodne: *sin ωt, ω cos ωt*

3) postać $x_w(t)$: $x_w(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$

$\dot{x}_w(t)=\omega C_1\cos\omega t-\omega C_2\sin\omega t$

4) podstawienie $x_w(t)$:

$$b(\omega C_1\cos\omega t-\omega C_2\sin\omega t)+c(C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t)=\sin\omega t$$

5) uporządkowanie 6) układ równań 7) wyznaczenie stałych

rozwiązanie wymuszone: $x_w(t)=\dfrac{c}{b^2\omega^2+c^2}\sin\omega t-\dfrac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}\cos\omega t$

$$x_w(t)=1/\sqrt{b^2\omega^2+c^2}\,\sin\left(\omega t-arctg\frac{b\omega}{c}\right)$$

Metoda klasyczna – przykład: $b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$

$u(t)=\sin\omega t$

$$x(t)=A_1e^{-(c/b)t}+\frac{c}{b^2\omega^2+c^2}\sin\omega t-\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}\cos\omega t$$

$$x(t)=A_1e^{-(c/b)t}+1/\sqrt{b^2\omega^2+c^2}\,\sin\left(\omega t-arctg\frac{b\omega}{c}\right)$$

$x(0)=0$

$$0=A_1e^{-(c/b)0}+\frac{c}{b^2\omega^2+c^2}\sin\omega 0-\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}\cos\omega 0$$

$$A_1=\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}$$

$$x(t)=\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}e^{-(c/b)t}+\frac{c}{b^2\omega^2+c^2}\sin\omega t-\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}\cos\omega t$$

$$x(t)=\frac{b\omega}{b^2\omega^2+c^2}e^{-(c/b)t}+1/\sqrt{b^2\omega^2+c^2}\,\sin\left(\omega t-\mathrm{arctg}\frac{b\omega}{c}\right)$$

Metoda klasyczna – przykład: $\ddot{x}(t)+6\dot{x}(t)+8x(t)=u(t)$

$$u(t)=at^2$$

I. Rozwiązanie swobodne $x_s(t)$

1) równanie jednorodne: $\ddot{x}_s(t)+6\dot{x}_s(t)+8x_s(t)=0$

2) zakładana postać $x_s(t)$: $x_s(t)=Ae^{\lambda t}$

3) podstawienie $x_s(t)$: $\dot{x}_s(t)=\lambda Ae^{\lambda t}$

$$\ddot{x}_s(t)=\lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t}+6\lambda Ae^{\lambda t}+8Ae^{\lambda t}=0 \quad /:\ Ae^{\lambda t}$$

4) równanie charakterystyczne: $\lambda^2+6\lambda+8=0$

5) pierwiastki równania charakt.: $\lambda_1=-2 \qquad \lambda_2=-4$

rozwiązanie swobodne: $x_s(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-4t}$

Metoda klasyczna – przykład: $\ddot{x}(t)+6\dot{x}(t)+8x(t)=u(t)$

$$u(t)=at^2$$

II. Rozwiązanie wymuszone $x_w(t)$ dla $u(t)=at^2$

1) równanie niejednorodne: $\ddot{x}_w(t)+6\dot{x}_w(t)+8x_w(t)=at^2$

2) wymuszenie i jego pochodne: $t^2,\ t,\ 1$

3) postać $x_w(t)$: $x_w(t)=C_1t^2+C_2t+C_3$

$$\dot{x}_w(t)=2C_1t+C_2 \qquad \ddot{x}_w(t)=2C_1$$

4) podstawienie $x_w(t)$: $2C_1+6(2C_1t+C_2)+8(C_1t^2+C_2t+C_3)=at^2$

5) uporządkowanie: $8C_1t^2+(12C_1+8C_2)t+2C_1+6C_2+8C_3=at^2$

6) układ równań:

7) wyznaczenie stałych:

$$\begin{cases} 8C_1=a \\ 12C_1+8C_2=0 \\ 2C_1+6C_2+8C_3=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} C_1=a/8 \\ C_2=-3a/16 \\ C_3=7a/64 \end{array}$$

rozwiązanie wymuszone: $x_w(t)=a(8t^2-12t+7)/64$

Metoda klasyczna – przykład: $\ddot{x}(t)+6\dot{x}(t)+8x(t)=u(t)$ ❋

$$u(t)=at^2$$

I. Rozwiązanie swobodne $\quad x_s(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-4t}$

II. Rozwiązanie wymuszone *dla $u(t)=at^2$* $\quad x_w(t)=a(8t^2-12t+7)/64$

Rozwiązanie pełne (ogólne)

$$x(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-4t}+a(8t^2-12t+7)/64$$

Rozwiązanie szczególne dla $\quad x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=0$

$$\begin{cases} x(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-4t}+\dfrac{a}{64}(8t^2-12t+7) \\ \dot{x}(t)=-2A_1\mathrm{e}^{-2t}-4A_2\mathrm{e}^{-4t}+\dfrac{a}{64}(16t-12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=A_1\mathrm{e}^{0}+A_2\mathrm{e}^{0}+\dfrac{a}{64}(8\cdot 0-12\cdot 0+7) \\ 0=-2A_1\mathrm{e}^{0}-4A_2\mathrm{e}^{0}+\dfrac{a}{64}(16\cdot 0-12) \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1+A_2=-7a/64 \\ 2A_1+4A_2=-12a/64 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A_1&=-a/8 \\ A_2&=a/64 \end{aligned}$$

Metoda klasyczna – przykład: $\ddot{x}(t)+6\dot{x}(t)+8x(t)=u(t)$ ❋

$$u(t)=at^2$$

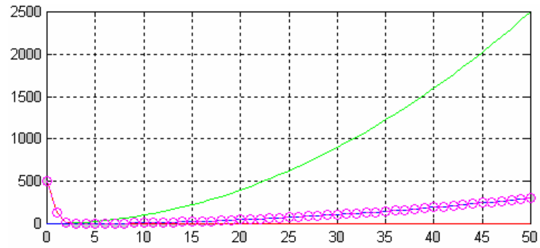
r.ogólne $\quad x(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-4t}+a(8t^2-12t+7)/64$

r.szczególne dla $\quad x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=0$

$$x(t)=-\frac{a}{8}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{a}{64}\mathrm{e}^{-4t}+a(8t^2-12t+7)/64$$

r.szczególne dla $\quad x(0)=k \qquad \dot{x}(0)=0$

$$x(t)=\left(2\mathrm{k}-\frac{a}{8}\right)\mathrm{e}^{-2t}+\left(-k+\frac{a}{64}\right)\mathrm{e}^{-4t}+a(8t^2-12t+7)/64$$



$u(t)$

$x_s(t)$

$x_w(t)$

x(t), x(0)=500, x'(0)=0

Równanie różniczkowe zwyczajne - własności

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$$

Rozwiązanie równania jednorodnego

$$a_n \lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Pierwiastki równania charakterystycznego

Algebra: Wielomian rzeczywisty stopnia n: $\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$

- n pierwiastków
- pierwiastki pojedyncze i wielokrotne;
- pierwiastki rzeczywiste i zespolone (pary liczb sprzężonych)
- rozkład na wielomiany rzeczywiste stopnia co najwyżej drugiego
  - wielomiany stopnia pierwszego
  - wielomiany stopnia drugiego z ujemnym wyróżnikiem

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda^2+b_1\lambda+b_0)\cdots=0$$

a) jednokrotne rzeczywiste λ_i

b) m-krotne λ_k

c) pary pierwiastków zespolonych $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$

Równanie różniczkowe zwyczajne - własności

Równanie charakterystyczne: $a_n \lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$

Składowe rozwiązania swobodnego

a) pierwiastki jednokrotne rzeczywiste λ_i

$$x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t}$$

b) pierwiastek m-krotny λ_k

$$\left(A_{k1} + A_{k2}t + \ldots + A_{km}t^{m-1}\right)e^{\lambda_k t}$$

c) para pierwiastków zespolonych $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$

$$A_1 e^{(\alpha+j\omega)t} + A_2 e^{(\alpha-j\omega)t}$$

$B_1 = A_1 + A_2 \qquad B_2 = A_1 - A_2$

$$e^{\alpha t}\left(B_1 \cos\omega t + jB_2 \sin\omega t\right)$$

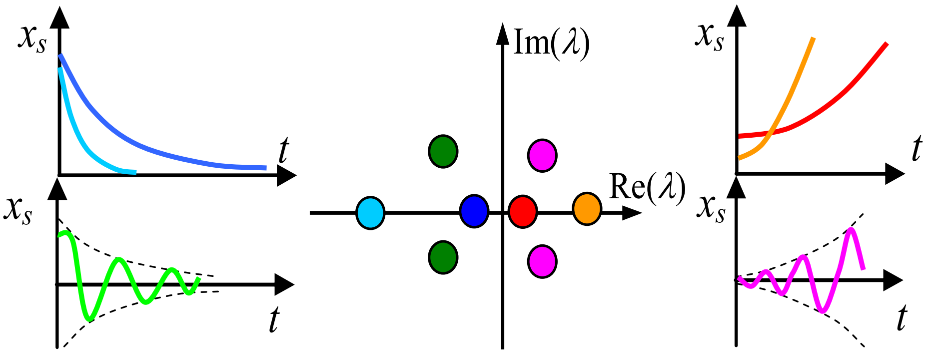
$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$

$$Ae^{\alpha t}\cos(\omega t - \varphi) = Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$\varphi = arc\,tg\dfrac{B_2}{B_1} \qquad \varphi_1 = arc\,ctg\dfrac{B_2}{B_1}$

Położenie pierwiastków, stabilność, charakter odpowiedzi

$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$



$$Ae^{\alpha t}\cos(\omega t - \varphi)$$

Rozwiązane równania różniczkowego zwyczajnego liniowego

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t)$$

Rozwiązanie swobodne *xs(t)* | Rozwiązanie wymuszone *xw(t)*

to rozwiązanie równania

jednorodnego, czyli u(t)=0 | niejednorodnego, czyli u(t)≠0

zależy od

parametrów układu | parametrów układu i wymuszenia

decyduje o

stabilności układu | uchybie ustalonym

Przypadki szczególne

$$b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$$

1) x_s

$$b\lambda+c=0$$
$$\lambda_1=-c/b$$
$$x_s(t)=A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}$$

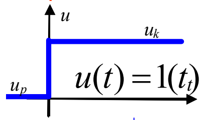
2) x_w

$$cx=u$$
$$x_o=u_o/c$$

3) $x=x_s+x_w$

$$x(t)=A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}+\frac{u_o}{c}$$

Odpowiedź skokowa

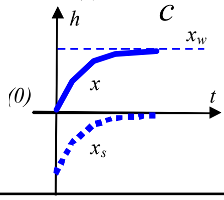


$u_p=0$	$u_k=1$
$x_p=0$	$x_k=1/c$
$x(0)=0$	$x_w=1/c$

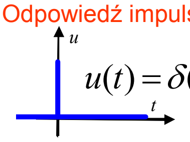
4) $x(0)=0$

$$x(t)=A_1\mathrm{e}^{-(c/b)t}+\frac{u_k}{c}$$

$$x(t)=-\frac{1}{c}\mathrm{e}^{-(c/b)t}+\frac{1}{c}$$



Odpowiedź impulsowa



5)

$$\frac{d(1(t))}{dt}=\delta(t)$$

$$\frac{d(h(t))}{dt}=k(t)$$

$$x(t)=\frac{1}{b}\mathrm{e}^{-(c/b)t}$$